# SOLUCIONES PERIODICAS DE LAS ECUACIONES DE LA ELASTICIDAD EN EL CILINDRO INFINITO

por

ALBERTO DOU

SUMMARY

The homogeneous second boundary value problem of the Elasticity in the infinite circular cylinder is considered, as set by formulae $(2 \cdot 2) - (2 \cdot 4)$, where $\lambda$ and $\mu$ are real constants and $z \varepsilon (-\infty, \infty)$.

The main result, stated in the final corollary 2, is the proof of the existence of solutions periodic in $z$, if and only if $\sigma < -1$, where $\sigma$ is the POISSON's ratio given by $(1 \cdot 4)$.

## $\phi$ 1. INTRODUCCIÓN(*)

Consideremos un cilindro $C_l$, cuya sección recta ocupa la adherencia de un dominio $Q$. El dominio $Q$ se supone acotado y con frontera suficientemente lisa. El cilindro $C_l$ ocupa la adherencia de un dominio $\Omega_l$ del espacio euclídeo. Suponemos este espacio referido a un sistema cartesiano $\{0 ; y_1, y_2, y_3\}$, de modo que

$$(1.1) \quad \Omega_l = \{(y_1, y_2, y_3) \mid (y_1, y_2) \varepsilon Q, |y_3| < l\}, 0 < l_0 \leq l \leq \infty.$$

Se supone que el medio del cilindro $C_l$ es homogéneo, invariable con el tiempo, isótropo y perfectamente elástico. Nos ponemos en la hipótesis de la teoría lineal e infinitesimal de Elasticidad.

Suponemos también que $C_l$ está libre de fuerzas de volumen y que su superficie lateral está libre de fuerzas superficiales exteriores. Únicamente puede haber fuerzas exteriores cuando $l < \infty$, y en-

(*) En este artículo exponemos, algo simplificados y mejorados, los resultados presentados en una comunicación al Congreso Internacional de Matemáticos, Moscú, 1966 [1].

tonces aplicadas para $y_3 = \pm l$; en este caso supondremos que el conjunto de las fuerzas exteriores está en equilibrio estático.

En estas condiciones las relaciones constitutivas que ligan los esfuerzos $\tau^*_{ij}(y)$ y los desplazamientos $u^*_i(y)$ de un estado elástico del cilindro $C_l$ son

$$(1.2) \qquad \tau^*_{ij} = \delta_{ij}\ \lambda u^*_{h,h} + \mu\,(u^*_{i,j} + u^*_{j,i}),\ y \in \Omega_l\,; \quad i,j = 1,\ 2,\ 3,$$

donde $\mu$ se supone una constante positiva y $\lambda$ una constante real.

Las ecuaciones de la Elasticidad o de NAVIER son

$$(1.3) \qquad N^*_i[u] \equiv \mu\ \Delta\ u^*_i + (\lambda + \mu)\, u^*_{h,hi} = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3; \quad y\ \varepsilon\ \Omega_l\,.$$

Especialmente interesante es el caso en que

$$(1.4) \qquad -1 < \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \equiv \sigma < \frac{1}{2}\,.$$

La condición de contorno de que la superficie lateral de $\Omega_l$ sea libre viene expresada por

$$(1.5) \qquad \tau^*_{i1}\ \nu_1 + \tau^*_{i2}\,\nu_2 = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3;\ (y_1,\ y_2)\ \varepsilon\ \partial Q, \quad |y_3| \leq l,$$

donde $\nu_1$, $\nu_2$, $\nu_3$, son las componentes de la normal a la superficie lateral de $C_l$, siendo, por tanto, $\nu_3 = 0$.

Los resultados de R. A. TOUPIN [7], J. J. ROSEMAN [6] y A. DOU [2], permiten conjeturar que en el cilindro infinito $C_\infty$, si se impone que los esfuerzos $\tau^*_{ji}(y)$ y sus derivadas primeras se mantengan uniformemente acotados en $C_\infty$, entonces las únicas soluciones continuas del problema $(1 \cdot 1) - (1 \cdot 5)$ son las soluciones elementales del tipo de SAINT-VENANT, caracterizadas por el hecho de que los esfuerzos $\tau^*_{ij}$ son independientes de $y_3$. El artículo de A. DOU ciertamente excluye en $C_\infty$ y cuando la sección $Q$ es un cuadrado la posibilidad de que el problema $(1 \cdot 1) - (1 \cdot 5)$ pueda tener soluciones periódicas en $y_3$, salvo que tales soluciones representen desplazamientos rígidos.

En este artículo supondremos que $Q$ es el círculo de radio unidad,

(1.6) $$Q = \{(y_1, y_2) \mid y_1^2 + y_2^2 < 1\},$$

y nos proponemos demostrar que en este caso las ecuaciones de NAVIER $(1 \cdot 3)$ en el dominio $\Omega_\infty$ admiten soluciones reales periódicas en $y_3$ que satisfacen la condición de contorno $(1 \cdot 5)$, pero con la condición

(1.7) $$\sigma < -1$$

en lugar de la condición $(1 \cdot 4)$. Con la condición $(1 \cdot 7)$ las ecuaciones de NAVIER siguen siendo un sistema elíptico, pero la forma cuadrática $W(\tau^*)$,

$W(\tau^*) = \dfrac{1}{2E}[(1+\sigma)\,\tau^*_{ij}\,\tau^*_{ij} - \sigma\,(\tau^*_{hh})^2]$, $E$ constante positiva, que da la densidad de energía elástica, deja de ser definida positiva. Para un dominio acotado, véanse los artículos de S. G. MIJLIN [4,5].

## $\phi$ 2. FORMA DE LAS SOLUCIONES

Introduzcamos coordenadas cilíndricas $(\varrho, \Theta, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$,

(2.1) $$\begin{aligned} y_1 &= \varrho \cos \Theta \\ y_2 &= \varrho \operatorname{sen} \Theta \\ y_3 &= z, \ \varrho \leq 1, \ |z| \leq l \end{aligned}$$

de modo que en cada punto de $\Omega_l$ tenemos un triedro natural de referencia, que dotamos con una base ortonormal. Sean $\tau_{ij}(\varrho, \Theta, z)$ y $u_i(\varrho, \Theta, z)$, las componentes (físicas) del tensor de esfuerzos y del vector desplazamiento referidos a estos sistemas. Entonces las relaciones constitutivas $(1 \cdot 2)$ toman la forma

$$\tau_{11} \equiv \tau_{\varrho\varrho} = (\lambda + 2\mu)\, u_{\varrho,\varrho} + \lambda \left(\frac{1}{\varrho}\, u_{\Theta,\Theta} + u_{z,z} + \frac{1}{\varrho}\, u_\varrho\right)$$

$$\tau_{22} \equiv \tau_{\Theta\Theta} = (\lambda + 2\mu)\left(\frac{1}{\varrho}\, u_{\Theta,\Theta} + \frac{1}{\varrho}\, u_\varrho\right) + \lambda\,(u_{\varrho,\varrho} + u_{z,z})$$

(2.2) $$\tau_{33} \equiv \tau_{zz} = (\lambda + 2\mu)\, u_{z,z} + \lambda\left(u_{\varrho,\varrho} + \frac{1}{\varrho}\, u_{\Theta,\Theta} + \frac{1}{\varrho}\, u_\varrho\right)$$

$$(2.2)\quad \tau_{12} \equiv \tau_{\varrho\Theta} = \mu \left( \frac{1}{\varrho} u_{\varrho,\Theta} + \varrho \left( \frac{1}{\varrho} u_\Theta \right)_{,\varrho} \right)$$

$$\tau_{13} \equiv \tau_{\varrho z} = \mu \left( u_{\varrho,z} + u_{z,\varrho} \right)$$

$$\tau_{23} \equiv \tau_{\Theta z} = \mu \left( u_{\Theta,z} + \frac{1}{\varrho} u_{z,\Theta} \right), \ \varrho \leq 1, \ |z| \leq l,$$

donde los subíndices que siguen a una coma indican derivada parcial ordinaria respecto de la misma variable que el subíndice.

Las ecuaciones de NAVIER $(1 \cdot 3)$ toman la forma

$$N_1 [u] \equiv (\lambda + 2\mu) u_{\varrho,\varrho\varrho} + \frac{\mu}{\varrho^2} u_{\varrho,\Theta\Theta} + \mu u_{\varrho,zz} +$$

$$+ \frac{\lambda + \mu}{\varrho} u_{\Theta,\varrho\Theta} + (\lambda + \mu) u_{z,\varrho z} + \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} u_{\varrho,\varrho} -$$

$$- \frac{\lambda + 3\mu}{\varrho^2} u_{\Theta,\Theta} - \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho^2} u_\varrho = - F_\varrho \equiv 0$$

$$(2.3)\quad \frac{1}{\varrho} N_2 [u] \equiv \frac{\mu + \lambda}{\varrho} u_{\varrho,\varrho\Theta} + \mu u_{\Theta,\varrho\varrho} + \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho^2} u_{\Theta,\Theta\Theta} +$$

$$+ \mu u_{\Theta,zz} + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} u_{z,\Theta z} + \frac{\lambda + 3\mu}{\varrho^2} u_{\varrho,\Theta} +$$

$$+ \frac{\mu}{\varrho} u_{\Theta,\varrho} - \frac{\mu}{\varrho^2} u_\Theta = - F_\Theta \equiv 0$$

$$N_3 [u] \equiv (\lambda + \mu) u_{\varrho,\varrho z} + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} u_{\Theta,\Theta z} + \mu u_{z,\varrho\varrho} +$$

$$+ \frac{\mu}{\varrho^2} u_{z,\Theta\Theta} + (\lambda + 2\mu) u_{z,zz} + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} u_{\varrho,z} +$$

$$+ \frac{\mu}{\varrho} u_{z,\varrho} = - F_z \equiv 0, \ \varrho < 1, \ |z| < e.$$

Las condiciones de contorno $(1 \cdot 5)$ toman la forma

$$(2.4)\quad \tau_{\varrho\varrho} (\varrho, \Theta, z) = \tau_{\varrho\Theta} = \tau_{\varrho z} = 0, \quad \varrho = 1, \ |z| \leq l.$$

En orden a hallar soluciones periódicas del problema $(2 \cdot 2)$ - $(2 \cdot 4)$, o sea del segundo problema de la Elasticidad en el cilindro $C_l$, hacemos la hipótesis de que sean soluciones separables, y por tanto ponemos

$$
(2.5)\qquad
\begin{aligned}
u_1 &\equiv u_\varrho = r_1(\varrho)\cdot q_1(\Theta)\cdot \operatorname{sen}\,\zeta z\\
u_2 &\equiv u_\Theta = r_2(\varrho)\cdot q_2(\Theta)\cdot \operatorname{sen}\,\zeta z\\
u_3 &\equiv u_z = r_3(\varrho)\cdot q_3(\Theta)\cdot \cos\,\zeta z,
\end{aligned}
$$

donde $\zeta$ es un parámetro real; de este modo al sustituir $u_i$ en las ecuaciones $(2\cdot 3)$ se puede eliminar la variable $z$ con sólo dividir la ecuación por cos $\zeta z$ o por sen $\zeta z$. Ahora bien, si en las tres ecuaciones resultantes de sustituir $(2\cdot 5)$ en $(2\cdot 3)$ y después de eliminar la variable $z$, queremos que se puedan separar las variables $\varrho$, $\Theta$ al dividir la ecuación i-ésima por $r_i\, q_i$, resulta que o bien las $q_i(\Theta)$ han de satisfacer las condiciones

$$
q''_2 + kq_2 = 0,\ q_3 = k'q_1 = k''q_2,\ k,\ k',\ k'' \ \text{constantes},
$$

o bien las $r_1$ han de satisfacer condiciones análogas. Teniendo ahora en cuenta que las $q_i(\Theta)$ han de satisfacer la condición de periodicidad con período $2\pi$, llegamos a la siguiente forma de los desplazamientos

$$
(2.6)\qquad
\begin{aligned}
u_\varrho &= f(\varrho)\cdot \operatorname{sen}\,n\Theta\cdot \operatorname{sen}\,\zeta z\\
u_\Theta &= g(\varrho)\cdot \cos\,n\Theta\cdot \operatorname{sen}\,\zeta z\\
u_z &= h(\varrho)\cdot \operatorname{sen}\,n\Theta\cdot \cos\,\zeta z.
\end{aligned}
$$

En estas ecuaciones el sen $n\Theta$ y cos $n\Theta$ se pueden intercambiar y lo mismo el sen $\zeta z$ y cos $\zeta z$, de modo que se obtienen cuatro formas separables para los desplazamientos $u_i$. Si se considera el cilindro infinito y se supone que los desplazamientos son independientes de $z$, o sea $u = u(\varrho, \Theta)$, entonces las únicas soluciones del problema $(2\cdot 3)$ - $(2\cdot 4)$ son las soluciones elementales del tipo de SAINT-VENANT (combinaciones lineales de tracción o compresión pura, flexión pura y torsión pura); se sigue que el problema $(2\cdot 3)$ - $(2\cdot 4)$ no tiene ninguna solución de la forma que resulta cuando se suprime en $(2\cdot 6)$ el factor que contiene la variable $z$, salvo posibles desplazamientos rígidos; por lo tanto, podemos suponer $\zeta > 0$. En cuanto a $n$ puede ser un número natural cualquiera, $n = 0, 1, 2, \ldots$. También puede considerarse que las $u_i$ sean independientes de $\Theta$, de modo que sea

$$
\begin{aligned}
u_\varrho &= f(\varrho) \cdot \text{sen } \zeta z \\
u_\Theta &= g(\varrho) \cdot \text{sen } \zeta z \\
u_z &= h(\varrho) \cdot \cos \zeta z.
\end{aligned}
\tag{2 · 7}
$$

Esta forma corresponde al caso $n = 0$ cuando se considera simultáneamente con la forma (2 · 6) la que resulta de intercambiar los factores sen $n\Theta$ y cos $n\Theta$.

A continuación en el $\phi$ 3 planteamos el caso general para $n = 1, 2, \ldots$ y luego plantearemos y resolveremos el caso $n = 0$ y el caso de la forma (2 · 7).

## $\phi$ 3. Problema autoadjunto y ecuación característica en $\zeta$

Consideremos la forma (2 · 6) de las soluciones, para $n = 1, 2, \ldots$, y sustituyámosla en el sistema (2 · 3). Pongamos

$$
\begin{aligned}
\varrho \cdot N_1[u] &\equiv \text{sen } n\Theta \cdot \text{sen } \zeta z, \ M_1[v] \\
N_2[u] &\equiv \cos n\Theta \cdot \text{sen } \zeta z \cdot M_2[v], \ v = \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}. \\
\varrho \cdot N_3[u] &\equiv \text{sen } n\Theta \cdot \cos \zeta z \cdot M_3[v]
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Entonces, al sustituir obtenemos el sistema diferencial ordinario en $v$,

$$
M \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} M_1[v] \\ M_2[v] \\ M_3[v] \end{pmatrix} = 0,
\tag{3.2}
$$

siendo $M$ un operador matricial diferencial y siendo

$$
M_1[v] = (\lambda + 2\mu)(\varrho f')' - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} + \frac{\mu\, n^2}{\varrho} + \mu\, \zeta^2 \varrho\right) f -
$$

$$
- (\lambda + \mu)\, ng' + \frac{\lambda + 3\mu}{\varrho}\, ng - (\lambda + \mu)\, \zeta \varrho h'
$$

$$
M_2[v] = (\lambda + \mu)\, n f' + \frac{\lambda + 3\mu}{\varrho}\, n f + \mu(\varrho g')' -
\tag{3.3}
$$

$$(3.3) \qquad - \left( \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} n^2 + \frac{\mu}{\varrho} + \mu \zeta^2 \varrho \right) g - (\lambda + \mu)\, n \zeta h$$

$$M_3 [v] = (\lambda + \mu)\, \zeta\, (\varrho f)' - (\lambda + \mu)\, n\, \zeta g + \mu\, (\varrho h')' -$$

$$- \left( \frac{\mu}{\varrho} n^2 + (\lambda + 2\mu)\, \zeta^2 \varrho \right) h.$$

Observemos que habiendo supuesto $\zeta$ real, los coeficientes son reales y que estamos interesados especialmente en soluciones $f$, $g$, $h$, reales. Supongamos también que $f$, $g$, $h$, sean suficientemente lisas; si son soluciones de $(3 \cdot 2)$ basta requerir que pertenezcan al espacio $C[0,1] \cap C^1(0,1)$, pues de aquí se sigue ya que $f$, $g$, $h$, serán analíticas en todo el intervalo cerrado $[0,1]$, cualesquiera que sean los valores reales de $\lambda$, $\mu$, $n$, $\zeta$, con tal que los coeficientes de las derivadas segundas $\lambda + 2\mu$ y $\mu$ sean distintos de cero, es decir, con tal que sea $\sigma \neq 1$ y $\sigma \neq 1/2$.

El operador $M$ es autoadjunto en el sentido siguiente. Pongamos

$$(3.4) \qquad w_k = \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \\ r_k \end{pmatrix}, \quad k = 1,\ 2; \quad w_k \,\varepsilon\, C^1 [0,\ 1] \cap C^2 (0,\ 1).$$

y representemos por una raya el conjugado complejo y por una cruz el traspuesto de modo que

$$w^*_k \equiv \overline{w}_k^{+} = (\overline{p}_k,\ \overline{q}_k,\ \overline{r}_k).$$

Entonces se tiene

$$(3.5) \qquad w^*_2 \cdot M[w_1] - M[w_2]^* \cdot w_1 = \frac{d}{d\varrho} (w^*_2,\ w'_2{}^*)\, S \begin{pmatrix} w_1 \\ w'_1 \end{pmatrix},$$

donde $w'$ representa la derivada respecto de $\varrho$, y siendo

$$(3.6) \quad S = \begin{bmatrix} 0 & -(\lambda+\mu)\, n & -(\lambda+\mu)\, \zeta\varrho & (\lambda+2\mu)\,\varrho & 0 & 0 \\ (\lambda+\mu)\, n & 0 & 0 & 0 & \mu\varrho & 0 \\ (\lambda+\mu)\, \zeta\varrho & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu\varrho \\ -(\lambda+2\mu)\,\varrho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu\varrho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\varrho & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideremos ahora las condiciones de contorno que las soluciones $f, g, h$, del sistema $(3 \cdot 2)$ tienen que satisfacer. Las obtendremos sustituyendo $(2 \cdot 6)$ en $(2 \cdot 4)$ y teniendo en cuenta las $(2 \cdot 2)$. Si ponemos

$$\begin{aligned} \tau_{\varrho\varrho} &\equiv B_1[v] \cdot \operatorname{sen} n\Theta \cdot \operatorname{sen} \zeta z \\ \tau_{\varrho\varrho} &\equiv B_2[v] \cdot \cos n\Theta \cdot \operatorname{sen} \zeta z \\ \tau_{\varrho z} &\equiv B_3[v] \cdot \operatorname{sen} n\Theta \cdot \cos \zeta z, \end{aligned} \tag{3.7}$$

entonces las condiciones de contorno toman la forma

$$B[v(1)] = 0, \tag{3.8a}$$

siendo

$$\begin{aligned} \varrho B[v] &\equiv \begin{pmatrix} \varrho \cdot B_1[v] \\ \varrho \cdot B_2[v] \\ \varrho \cdot B_3[v] \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)\, \varrho f' + \lambda\,(f - n \cdot g - \zeta\, \varrho\, h) \\ \mu\,(n \cdot f + \varrho g' - g) \\ \mu \varrho\,(\zeta f + h') \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.8b}$$

Introduzcamos ahora el espacio $V$,

$$V = \{v \mid v \,\varepsilon\, C^1[0,1] \cap C^2(0,1),\ B[v(1)] = 0,\ f(0) = 0\} \tag{3.9}$$

y observemos que el teorema que sigue sería también válido si cambiáramos la condición $f(0) = 0$ por la condición $g(0) = 0$; y también que esta última condición $f(0) = 0$ es superflua y puede, por tanto, ser omitida para el caso en que $n = 0$ o de soluciones de la forma $(2 \cdot 7)$.

Podemos enunciar ya el siguiente teorema para la determinación de las funciones $f, g, h$, que den desplazamientos de la forma $(2 \cdot 6)$, con $n$, $\zeta$ reales y fijos, que sean solución del problema $(2 \cdot 3)$-$(2 \cdot 4)$ en el cilindro infinito $\Omega_\infty$.

TEOREMA 1. — *Una condición necesaria y suficiente para que los desplazamientos de la forma* $(2 \cdot 6)$ *con* $n$ *y* $\zeta$ *constantes complejas no nulas y*

$$v^+ \equiv (f,\ g,\ h)\ \varepsilon\ C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$$

*sean solución del problema* (2 · 3)-(2 · 4) *en el cilindro infinito* $\Omega_\infty$ *es que se tenga*

$$(3.10) \qquad \begin{aligned} &M[v] = 0, \quad \varrho \,\varepsilon\, [0,1] \\ &B[v(1)] = 0, \end{aligned}$$

*donde* $M$ *y* $B$ *vienen dados por* (3 · 2)-(3 · 3) *y* (3 · 8) *respectivamente.*

*Cuando* $n$ *y* $\zeta$ *son reales y fijos el problema* (3 · 10) *es autoadjunto, es decir, para todo par de vectores* $w_i = (p_i, q_i, r_i)$, $i = 1, 2$, *pertenecientes al espacio* $V$ *dado por* (3 · 9), *se tiene*

$$(3.11) \qquad \int_0^1 (w^*{}_2 \cdot Mw_1 - (Mw_2)^* \cdot w_1)\, d\varrho = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. — Hemos demostrado ya la reducción equivalente del problema (2 · 3)-(2 · 4) al problema (3 · 2)-(3 · 3) y (3 · 8), que es el mismo problema (3 · 10).

También hemos mostrado en la fórmula (3 · 5) que, cuando $n$ y $\zeta$ son reales, el operador diferencial $M$ es autoadjunto. Nos queda únicamente por demostrar que las condiciones de contorno impuestas a los elementos $w_i$ del espacio $V$ son autoadjuntas respecto del operador $M$, o sea que si $w_i \,\varepsilon\, V$, $i = 1, 2$, entonces se sigue que

$$\left[(w^*{}_2, w'{}_2{}^*)\; S\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1' \end{pmatrix}\right]_0^1 = 0.$$

Ahora bien, esta afirmación es una consecuencia inmediata de la siguiente igualdad

$$(w^*{}_2, w'{}_2{}^*)\; S\begin{pmatrix} w_1 \\ w'{}_1 \end{pmatrix} =$$

$$(3.12) \qquad \begin{aligned} &= (\lambda + 2\mu)\, \varrho\, (\bar{p}_2 p'{}_1 - p_1 \bar{p}'{}_2) + \mu\varrho\, (\bar{q}_2 q'{}_1 - q_1 \bar{q}'{}_2) + \\ &+ \mu\varrho\, (\bar{r}_2\, r'{}_1 - r_1\, \bar{r}'{}_2) + (\lambda + \mu)\, n\, (p_1\, \bar{q}_2 - q_1\, \bar{p}_2) + \\ &+ (\lambda + \mu)\, \zeta\varrho\, (p_1 \bar{r}_2 - r_1 \bar{p}_2) = w^*{}_2 \cdot \varrho\, B w_1 - (\varrho\, B w_2)^* \cdot w_1, \end{aligned}$$

cuya comprobación no ofrece dificultad teniendo en cuenta las (3 · 8) y (3 · 9).

Observemos que si $n \neq 0$ y en los desplazamientos (2 · 6) intercambiamos sen $n\theta$ y cos $n\theta$ se obtienen un nuevo operador diferencial y un nuevo operador de contorno que se obtienen a partir de $M$ y $B$ cambiando $n$ por $-n$. Análogamente, si $\zeta \neq 0$ y en los mismos desplazamientos $(2 \cdot 6)$ se intercambian sen $\zeta z$ y cos $\zeta z$ se obtienen un nuevo operador diferencial y un nuevo operador de contorno que se obtienen a partir de $M$ y $B$ cambiando $\zeta$ por $-\zeta$. De esta observación y de la forma de los operadores $M$ y $B$ se sigue el corolario siguiente.

COROLARIO 1. — *Sean $n$ y $\zeta$ reales y $n \neq 0$. Entonces se puede suponer $n > 0$ y $\zeta > 0$ sin perder soluciones de la forma* $(2 \cdot 6)$. *Si $v = (f, g, h)$ es una solución del problema* $(3 \cdot 10)$ *para $n$ y $\zeta$ determinados, entonces el conjunto de todas las soluciones del problema* $(2 \cdot 3)$-$(2 \cdot 4)$, *que sean de la forma* $(2 \cdot 6)$ *o de las que resultan de intercambiar senos y cosenos, viene dado por*

$$
\begin{aligned}
u_\varrho &= f(\varrho)\,(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\,(c_n \cos \zeta z + d_n \operatorname{sen} \zeta z) \\
u_\Theta &= g(\varrho)\,(b_n \cos n\theta - a_n \operatorname{sen} n\theta)\,(c_n \cos \zeta z + d_n \operatorname{sen} \zeta z) \qquad (3.13) \\
u_z &= h(\varrho)\,(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta)\,(d_n \cos \zeta z - c_n \operatorname{sen} \zeta z).
\end{aligned}
$$

El sistema $(3 \cdot 3)$ - $(3 \cdot 4)$ tiene una singularidad de primera especie en el origen $\varrho = 0$ y para todo $n$ natural admite un conjunto lineal de soluciones acotadas en el origen que depende de tres constantes arbitrarias $C_1$, $C_2$, $C_3$ y que cabe esperar que satisfagan automáticamente la condición $f(0) = 0$ de $(3 \cdot 9)$. Al imponer que la solución general dependiente de las tres constantes y del parámetro $\zeta$ satisfaga la condición de contorno $B[v(1))] = 0$, se obtendrá un sistema lineal algebraico homogéneo de tres ecuaciones en las tres incógnitas $C_1$, $C_2$, $C_3$ y la ecuación característica en $\zeta$ se obtendrá al anular el determinante de los coeficientes de este sistema. Vamos ahora a llevar a cabo este programa para $(2 \cdot 6)$ en el caso $n = 0$, y también intercambiando sen $n\theta$ y cos $n\theta$, o sea para soluciones de la forma $(2 \cdot 7)$.

## $\phi$ 4. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA PARA EL CASO $n = 0$

Nos proponemos hallar las soluciones del problema $(2 \cdot 3)$-$(2 \cdot 4)$ que sean de la forma $(2 \cdot 7)$, o lo que es lo mismo, que sean de la forma $(2 \cdot 6)$ o de la que resulta de intercambiar sen $n\theta$ y cos $n\theta$ y haciendo $n = 0$.

Si en $(2 \cdot 6)$ hacemos $n = 0$, resulta que las soluciones han de ser de la forma

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} u_\varrho &= u_z = 0 \\ u_\Theta &= g(\varrho) \cdot \operatorname{sen} \zeta z \end{aligned}$$

LEMA 1. — *No existe ninguna solución del problema* (2 · 3)-(2 · 4) *de la forma* (4 · 1) *con* $\zeta$ *real.*

DEMOSTRACIÓN. — Al sustituir (4 · 1) en el sistema (2 · 3) las ecuaciones primera y tercera se satisfacen idénticamente y la segunda arroja

$$\frac{1}{\varrho \cdot \operatorname{sen} \zeta z} N_2[u] = g'' + \frac{1}{\varrho} g' - \left(\zeta^2 + \frac{1}{\varrho^2}\right) g = 0.$$

La única solución acotada en el origen de esta ecuación de BESSEL es

$$(4.2)\qquad g = I_1(\zeta\varrho).$$

Al imponer las condiciones de contorno (2 · 4) encontramos que también la primera y la tercera se satisfacen idénticamente y que la segunda arroja

$$g'(1) - g(1) = 0,$$

o sea, teniendo en cuenta (4 · 2),

$$(4.3)\qquad 2\, I_1(\zeta) - \zeta\, I_0(\zeta) = 0.$$

Esta es la ecuación característica en $\zeta$ y es inmediato comprobar que carece de raíz real no nula, de donde se sigue que no existe solución de la forma (4 · 1), c.q.d.

Consideremos ahora soluciones de la forma (2 · 7). Puesto que las incógnitas $f$, $h$, por un lado y la $g$ por otro se separan tanto en el sistema (2 · 3) como en las condiciones (2 · 4), resulta en virtud del lema anterior que ha de ser $g = 0$.

TEOREMA 2. — *Para que los desplazamientos*

$$(4.4) = (2.7)\qquad \begin{aligned} u_\varrho &= f(\varrho) \cdot \operatorname{sen} \zeta z \\ u_\theta &= g(\varrho) \cdot \operatorname{sen} \zeta z \\ u_z &= h(\varrho) \cdot \cos z\zeta \end{aligned}$$

*sean una solución real del problema* $(2 \cdot 3)$-$(2 \cdot 4)$ *es condición necesaria y suficiente que sea* $g = 0$, *que* $f$ *y* $h$ *vengan dados por*

$$(4.5)\quad \begin{aligned} f &= c_1 I_1(\zeta\varrho) + c_2 \left(\varrho I_0(\zeta\varrho) - \frac{2\lambda + 4\mu}{(\lambda + \mu)\zeta} I_1(\zeta\varrho)\right) \\ h &= c_1 I_0(\zeta\varrho) + c_2 \varrho I_1(\zeta\varrho), \end{aligned}$$

*y que* $\zeta$ *sea una solución real no nula de la ecuación característica*

$$(4.6)\quad E(\zeta) \equiv (\zeta^2 + 2(1 - \sigma)) I^2{}_1(\zeta) - \zeta^2 I^2{}_0(\zeta) = 0,\ \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}.$$

*Si* $\zeta$ *es una raíz de esta ecuación, las constantes* $c_1$, $c_2$, *han de ser tales que*

$$(4.7)\quad I_1(\zeta) \cdot c_1 + [(\lambda + \mu)\zeta I_0(\zeta) - (\lambda + 2\mu) I_1(\zeta)] c_2 = 0.$$

Demostración. — Ya hemos probado que ha de ser $g = 0$. Hagamos $g = 0$ en $(4 \cdot 4)$ y sustituyamos en $(2 \cdot 3)$. La segunda ecuación se satisface idénticamente y la primera y tercera arrojan

$$(4.8)\quad \begin{aligned} M_1(f, 0, h) &= (\lambda + 2\mu)(\varrho f')' - \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} + \mu\zeta^2\varrho\right) f - \\ &\quad - (\lambda + \mu)\zeta\varrho h' = 0 \\ M_3(f, 0, h) &= (\lambda + \mu)\zeta(\varrho f)' + \mu(\varrho h')' - (\lambda + 2\mu)\zeta^2\varrho h = 0, \end{aligned}$$

donde $M$ es el operador dado por $(3 \cdot 2)$-$(3 \cdot 3)$ cuando se hace $g = 0$, $n = 0$.

La solución general del sistema $(4 \cdot 8)$ es

$$(4.9)\quad \begin{aligned} f &= c_1 I^2(\zeta\varrho) + c_2\left(\varrho I_0(\zeta\varrho) - \frac{2\lambda + 4\mu}{(\lambda + \mu)\zeta} I_1(\zeta\varrho)\right) + \\ &\quad + c_3 K_1(\zeta\varrho) + c_4\left(\varrho I_0(\zeta\varrho) + \frac{2\lambda + 4\mu}{(\lambda + \mu)\zeta} K_1(\zeta\varrho)\right) \\ h &= c_1 I_0(\zeta\varrho) + c_2\varrho I_1(\zeta\varrho) - c_3 K_0(\zeta\varrho) - c_4\varrho K_1(\zeta\varrho). \end{aligned}$$

Considerando únicamente las soluciones acotadas para $\varrho = 0$ contenidas en esta integral general, obtenemos que $f$ y $h$ han de ser de la forma dada por la fórmula $(4 \cdot 5)$ como queríamos demostrar.

Comprobamos que para todas las soluciones contenidas en $(4 \cdot 5)$ se verifica que $f(0) = 0$, aunque para $n = 0$ esta condición sea superfiua para la validez de $(3 \cdot 11)$.

Impongamos ahora que los desplazamientos $(4 \cdot 4)$ satisfagan las condiciones de contorno $(2 \cdot 4)$, o lo que es lo mismo, que las funciones $f$ y $h$ dadas por $(4 \cdot 5)$ satisfagan las condiciones $(3 \cdot 8)$, después de haber hecho $g = 0$ y $n = 0$ en las mismas. Esta sustitución de $(4 \cdot 5)$ en las $(3 \cdot 8)$ arroja el siguiente sistema lineal homogéneo de dos ecuaciones en las dos incógnitas $c_1$ y $c_2$, a saber

$$(4.10) \qquad \begin{aligned} &2\mu\,(\zeta\varrho\, I_0 - I_1)\, c_1 + [-\, 2\mu\,(2\lambda + 3\mu)\,\zeta\varrho\, I_0 + \\ &+ [4\mu\,(\lambda + 2\mu) + 2\mu\,(\lambda + \mu)\,\zeta^2\varrho^2]\, I_1]\, c_2 = 0 \\ &I_1\, c_1 + [(\lambda + \mu)\,\zeta\varrho\, I_0 - (\lambda + 2\mu)\, I_1]\, c_2 = 0, \end{aligned}$$

donde el argumento de las funciones $I_0$, $I_1$ es $\zeta\varrho$. Haciendo ahora $\varrho = 1$ y calculando el determinante de los coeficientes se obtiene la ecuación característica, que resulta ser la $(4 \cdot 6)$ como queríamos demostrar. En cuanto a la condición $(4 \cdot 7)$ es la que resulta al hacer $\varrho = 1$ en la segunda de las ecuaciones $(4 \cdot 10)$, con lo que el teorema queda demostrado en todas sus partes.

## $\phi$ 5. Resolución de la ecuación característica

He aquí el resultado que hemos anunciado en la introducción.

Teorema 3. — *La ecuación característica*

$$(5.1) = (4.6) \qquad E\,(\zeta) \equiv (\zeta^2 + 2\,(1 - \sigma))\, I_1^2\,(\zeta) - \zeta^2 I_0^2\,(\zeta) = 0$$

*carece de solución real no nula para $\sigma \geq -1$, pero tiene una solución real positiva para $\sigma < -1$.*

Demostración. — Es suficiente considerar sólo los valores $\zeta > 0$. Puesto que para $\zeta > 0$ se tiene

$$0 < I_1\,(\zeta) < I_0\,(\zeta),$$

resulta que se tiene también

$$(5.2) \qquad E\,(\zeta) < 0, \quad \text{para} \quad \sigma \geq 1,$$

y la ecuación característica carece de raíz positiva para $\sigma \geq 1$. En adelante suponemos $\zeta > 0$ y $\sigma < 1$.

Vamos a considerar sucesivamente los dos casos $\zeta \geq 2$ y $0 < \zeta < 2$. Para $\zeta = 2$ se tiene

$$E\,(2) < 0 \quad \text{para} \quad \sigma \geq -1$$

$$E\,(2) < 0 \quad \text{para} \quad \sigma < -1{,}1.$$

Supongamos ahora en primer lugar $\zeta \geq 2$, además de suponer $\sigma < 1$. Pongamos $(5 \cdot 1)$ en la forma

$$\text{(5.3a)} \qquad \left(1 + \frac{2\,(1-\sigma)}{\zeta^2}\right)^{1/2} I_1\,(\zeta) = I_0\,(\zeta).$$

Para $\sigma$ tal que $-1 \leq \sigma < 1$ se tiene

$$\text{(5.3b)} \qquad \left(1 + \frac{2\,(1-\sigma)}{\zeta^2}\right)^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1-\sigma}{\zeta^2} - \frac{1 \cdot 1}{2!}\left(\frac{1-\sigma}{\zeta^2}\right)^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{3!}\left(\frac{1-\sigma}{\zeta^2}\right)^3 - \ldots$$

y también vale el mismo desarrollo para todo $\sigma < -1$ con tal que se suponga $\zeta$ suficientemente grande, es decir, con tal que $\zeta^2 > 2(1-\sigma)$.

Teniendo en cuenta los desarrollos asintóticos de HANKEL de las funciones de BESSEL (véase por ejemplo G. N. WATSON [8] o bien E. JAHNKE y F. EMDE [3]), válidas para valores grandes de $\zeta$,

$$I_0\,(\zeta) = \frac{e^\zeta}{\sqrt{2\pi\zeta}}\, F_0\,(\zeta), \quad F_0\,(\zeta) = 1 + \frac{1}{8 \cdot \zeta} + \frac{9}{128 \cdot \zeta^2} + \ldots$$

$$I_1\,(\zeta) = \frac{e^\zeta}{\sqrt{2\pi\zeta}}\, F_1\,(\zeta), \quad F_1\,(\zeta) = 1 - \frac{3}{8 \cdot \zeta} - \frac{15}{128 \cdot \zeta^2} - \ldots$$

se sigue inmediatamente de $(5 \cdot 3)$, bajo la presente hipótesis $\zeta > 2$, que

$$\text{(5.4)} \qquad E\,(\zeta) < 0 \quad \text{para} \quad \sigma \geq -1 \ \text{ y } \ \zeta \geq 2$$

y también que cualquiera que sea $\sigma$ se tiene también

$$\text{(5.5)} \qquad E\,(\zeta) < 0 \quad \text{para } \zeta \text{ suficientemente grande.}$$

Supongamos ahora $0 < \zeta < 2$, además de suponer $\sigma < 1$. Pongamos (5.1) en la forma

$$(5.6a) \qquad \sqrt{2(1-\sigma)}\left(1+\frac{\zeta^2}{2(1-\sigma)}\right)^{1/2} \cdot I_1(\zeta) = \zeta \cdot I_0(\zeta).$$

Para $\sigma$ tal que $\sigma \leq -1$ se tiene

$$(5.6b) \qquad \left(1+\frac{\zeta^2}{2(1-\sigma)}\right)^{1/2} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2 \cdot 1!} \cdot \frac{\zeta^2}{2(1-\sigma)} - \frac{1 \cdot 1}{2^2 \cdot 2!}\left(\frac{\zeta^2}{2(1-\sigma)}\right)^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2^3 \cdot 3!}\left(\frac{\zeta^2}{(1-\sigma)}\right)^3 - \ldots$$

Sustituyendo $I_0$ e $I_1$ por sus desarrollos en serie de potencias, los dos miembros de la fórmula $(5 \cdot 6a)$ admiten desarrollos en serie que, cuando $\sigma < -1$, son ciertamente convergentes para $|\zeta| < 2$. El primer término del desarrollo en serie del primer miembro es

$$\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\sigma)} \cdot \zeta$$

y el primer término del desarrollo en serie del segundo miembro es $\zeta$. Por tanto se tiene $E(\zeta) > 0$ para $\sigma < -1$ y $\zeta$ positivo y suficientemente pequeño. Comparando este resultado con $(5 \cdot 5)$ resulta que para $\sigma < -1$ existe ciertamente una raíz positiva $\zeta = \zeta_0$ de la ecuación característica. Esto demuestra la segunda parte del teorema.

Para determinar la demostración de la primera parte nos queda por demostrar que

$$(5.7) \qquad E(\zeta) < 0 \quad \text{para} \quad 0 < \zeta < 2 \text{ y } -1 \leq \sigma < 1.$$

Ahora bien, puesto que para $-1 \leq \sigma < 1$ se tiene

$$\zeta^2 + 2(1-\sigma) \leq \zeta^2 + 4,$$

se sigue que para demostrar $(5 \cdot 7)$ es suficiente demostrar que

$$E(\zeta) < 0 \quad \text{para} \quad 0 < \zeta < 2 \text{ y } \sigma = -1,$$

o equivalentemente es suficiente demostrar que

$$(5.8) \quad E^*(\zeta) \equiv 2\left(1+\frac{\zeta^2}{4}\right)^{1/2} I_1(\zeta) - \zeta I_0(\zeta) < 0, 0 < \zeta < 2.$$

Ahora bien, para $\sigma = -1$ la serie (5 · 6b) es absolutamente convergente (incluso en el círculo de convergencia) y por tanto podemos sustituir esta serie y los desarrollos de $I_1$ e $I_0$ en (5 · 8) y se obtiene

$$E^*(\zeta) =$$

$$= 2\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)\,k\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3 \ldots (2k-3)}{2^k \cdot k!}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k}\right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+1)!}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+1} -$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(k!)^2}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2k+1} =$$

$$= -2 \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(m-1)!\,(m+1)!} -\right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{(-1)\cdot 1\cdot 3 \ldots (2k-3)}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{1}{(m-k)!\,(m-k+1)!}\right)\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2m+1} =$$

$$= -\frac{1}{12}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^5 + \frac{1}{24}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^7 - \frac{31}{960}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^9 + \frac{53}{2160}\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{11} + \ldots$$

Es fácil comprobar que, en efecto, en el desarrollo en serie de $E^*(\zeta)$ los coeficientes de los términos impares son negativos y que los coeficientes decrecen en valor absoluto. Por tanto, $E^*(\zeta) < 0$ para $0 < \zeta < 2$, que es la fórmula (5 · 8) y el teorema queda demostrado en todas sus partes.

Como consecuencia inmediata de este resultado y de los anteriores se deduce el corolario siguiente.

COROLARIO 2. — *Sea $\zeta_0$ una raíz positiva de la ecuación característica* (5 · 1) *cuando* $\sigma < -1$.

*Entonces los desplazamientos*

$$u_\varrho = f(\varrho) \cdot (a \cos \zeta_0 z + b \operatorname{sen} \zeta_0 z)$$
$$u_\theta = 0$$
$$u_z = h(\varrho) \cdot (b \cos \zeta_0 z - a \operatorname{sen} \zeta_0 z)$$
$$\varrho \in [0,1], \; z \in (-\infty, \infty),$$

*donde $f$ y $h$ están determinados por el teorema 2 y donde $a$ y $b$ son constantes arbitrarias, son solución periódica en $z$ del segundo problema homogéneo de la Elasticidad en el cilindro infinito.*

## REFERENCIAS


[1] DOU, A., *Bounded solutions of the Elasticity equations in the unbounded cylinder*, Proceedings of the Inter. Congress of Math., Moscow, 1966. Abstracts of short communications, 12, página 8.

[2] DOU, A., *Upper Estimate of the Potential Elastic Energy of a Cylinder*, Comm. Pure Appl. Math. 19 (1966), 83-93.

[3] JAHNKE, E. and F. EMDE, *Tables of functions*.

[4] MIJLIN, S. G., «On Cosserat functions», *Problems in Math. Physics*, vol. I, edited by V.I. Smirnov, pp. 55-64.

[5] MIJLIN, S. G., «Further investigation on Cosserat functions», *Vestnik Leningrad Univ.*, 22 (1967), 7, pp. 96-102.

[6] ROSEMAN, J. J., *A pointwise estimate for the stress in a cylinder and its application to Saint-Venant's principle*, Arch. Rational Mech. Anal. 2 (1965), 23-48.

[7] TOUPIN, R. A., *Saint-Venant's principle*, Arch. Rational Mech. Anal. 18 (1965), 83-96.

[8] WATSON, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*.


A. DOU