COMPLEXES TRIPHASÉS D'UN GROUPE

par

J. CHACRON

INTRODUCTION. — Soient; G un groupe, H un sous-groupe de G. Pour tout $x \in G$, la classe $H \cdot x$ vérifie la propriété suivante: $(H \cdot x) \cdot (H \cdot x)^{-1} \cdot (H \cdot x) = H \cdot x$. Réciproquement si M est une partie non vide de G telle que $M \cdot M^{-1} \cdot M = M$ (ce que nous appellerons un complexe triphasé de G), nous verrons que $M \cdot M^{-1}$ est un sous-groupe de G (Cf. Proposition 1), et il est facile de montrer que pour un $x \in M$, on a $M = H \cdot x$ si $H = M \cdot M^{-1}$.

Nous nous proposons ainsi d'étudier l'ensemble des complexes triphasés d'un groupe. Nous montrerons que cet ensemble est une catégorie dont les unités sont les sous-groupes de G. Les résultats bien connus en ce qui concerne la modularité du treillis des sous-groupes distingués, ou à savoir sa distributivité sont généralisés au sup-demi-treillis des complexes triphases distingués.

Enfin nous montrerons que l'ensemble des complexes triphasés distingués d'un groupe est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des équivalences de CORAY compatibles avec ce groupe.

1. *Groupoïde des complexes triphasés d'un groupe.* — Nous supposons que G est un groupe dont l'élément unité est noté e. Si M et Q sont deux parties de G, la partie $M \cdot Q$ est l'ensemble des $m \cdot q$ lorsque $m \in M$ et $q \in Q$. La partie M^{-1} est l'ensemble des m^{-1} lorsque $m \in M$.

DÉFINITION 1. — Une partie non vide de G est appelée complexe triphasé si: $M \cdot M^{-1} \cdot M = M$.

Prouvons que:

PROPOSITION 1. — *Si M est un complexe triphasé, alors $M \cdot M^{-1}$ et $M^{-1} \cdot M$ sont deux sous-groupes*

PREUVE

— Pour un $a \in M$, on a $a \cdot a^{-1} \in M \cdot M^{-1}$, et par suite $e \in M$.

— On a $(M \cdot M^{-1})^{-1} = M \cdot M^{-1}$

— Enfin $(M \cdot M^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1}) = (M \cdot M^{-1} \cdot M) \cdot M^{-1} = M \cdot M^{-1}$

Il en est de même pour $M^{-1} \cdot M$.

PROPOSITION 2. — *Si M et P sont deux complexes triphasés tels que $M^{-1} \cdot M = P \cdot P^{-1}$,* alors *$M \cdot P$ est un complexe triphasé.*

PREUVE

On a $(M \cdot P) \cdot (M \cdot P)^{-1} \cdot (M \cdot P) = M \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot (M^{-1} \cdot M) \cdot P = M \cdot (M^{-1} \cdot M) \cdot (M^{-1} \cdot M) \cdot P = M \cdot (M^{-1} \cdot M) \cdot P = M \cdot P$.

PROPOSITION 3. — *Si M et P sont deux complexes triphasés tels que $M^{-1} \cdot M = P^{p-1}$, alors $(M \cdot P) \cdot (M \cdot P)^{-1} \cdot = M \cdot M^{-1}$ et $(M \cdot P)^{-1} \cdot (M \cdot P) = P^{-1} \cdot P$*

PREUVE

— On a $(M \cdot P) \cdot (M \cdot P)^{-1} = M \cdot (P^{-1} \cdot P) \cdot M^{-1} = M \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot M = (M \cdot M^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1}) = M \cdot M^{-1}$

— Et $(M \cdot P)^{-1} \cdot (M \cdot P) = P^{-1} \cdot (M^{-1} \cdot M) \cdot P = P^{-1} \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot P = (P^{-1} \cdot P) \cdot (P^{-1} \cdot P) = P^{-1} \cdot P$

Les propositions 1,2 et 3 montrent qu'en posant: $\beta(M) = M \cdot M^{-1}$, $\alpha(M) = M^{-1} \cdot M$, et $M \text{ o } P = M \cdot P$ si, et seulement si, $\alpha(M) = \beta(P)$, on a: $\beta(M) \text{ o } M = M$, $M \text{ o } \alpha(M) = M$, $\beta(M \text{ o } P) = \beta(M)$, $\alpha(M \text{ o } P) = \alpha(P)$, et que $M \text{ o } M^{-1} = \beta(M)$ et $M^{-1} \text{ o } M = \alpha(M)$. Ce qui prouve que:

THEOREMA 1. — *L'ensemble des complexes triphasés d'un groupe est un groupoïde*(1) *dont les unités sont les sous-groupes.*

2. *Complexes triphasés distingués.* — Si G est un groupe commutatif, pour tout $m \in G$, on a $x \cdot \{m\} \cdot x^{-1} \subseteq \{m\}$. D'une manière plus générale:

Définition 2. — Nous dirons qu'un complexe triphasé M est *distingué* si, pour tout $x \in G$, on a $x \cdot M \cdot x^{-1} \subseteq M$.

Proposition 4. — *Si M est un complexe triphasé distingué, alors $M \cdot M^{-1}$ et $M^{-1} \cdot M$ sont des sous-groupes distingués, et l'on a $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M$*

Preuve

1) D'après la proposition 1, $M \cdot M^{-1}$ est un sous-groupe. D'autre part on a $x \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot x^{-1} = (x \cdot M \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot M^{-1} \cdot x^{-1}) \subseteq M \cdot M^{-1}$. Il en est de même pour $M^{-1} \cdot M$.

2) Supposons que $a \cdot b^{-1} \in M \cdot M^{-1}$. On a $b^{-1} \cdot a \in M^{-1} \cdot M$. D'après la première partie de la démonstration il vient; $b \cdot (b^{-1} \cdot a) \cdot b - 1 \in M^{-1} \cdot M$. D'où $a \cdot b^{-1} \in M^{-1} \cdot M$. On montre de même que $M^{-1} \cdot M \subseteq M \cdot M^{-1}$.

Proposition 5. — *Si M et P sont deux complexes triphasés distingués non disjoints, alore $M \cdot M^{-1}$. P est le plus petit complexe triphasé distingué contenant M et P.*

Preuve

1) Puisque $M \cdot M^{-1}$ et $P \cdot P^{-1}$ sont deux sous-groupes distingués, on a $(M \cdot M^{-1}) \cdot (P \cdot P^{-1}) = (P \cdot P^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1})$. Ceci dit, montrons que $M \cdot M^{-1}$. P est un complexe triphasé. On a en effet $(M \cdot M^{-1} \cdot P) \cdot (M \cdot M^{-1} \cdot P)^{-1} \cdot (M \cdot M^{-1} \cdot P) = (M \cdot M^{-1}) \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot P = (P \cdot P^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot P = (P \cdot P^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot P = (M \cdot M^{-1}) \cdot (P \cdot P^{-1}) \cdot P = (M \cdot M^{-1}) \cdot (P \cdot P^{-1} \cdot P) = M \cdot M^{-1} \cdot P$.

2) Montrons que $M \cdot M^{-1}$. P est distingué. On a $x \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot P \cdot x^{-1} = x \cdot (M \cdot M^{-1}) \cdot x^{-1} \cdot (x \cdot P \cdot x^{-1}) \subseteq M \cdot M^{-1} \cdot P$.

3) On a évidemment $P \subseteq M \cdot M^{-1} \cdot P$, et puisque $M \cap P \neq \phi$, $M \subseteq M \cdot M^{-1} \cdot P$. Si enfin Q est un complexe triphasé distingué contenant M et P, las inclusions $M \subseteq Q$ et $P \subseteq Q$ entraînent $M \cdot M^{-1} \subseteq Q \cdot Q^{-1}$ et $P \subseteq Q$. D'où $M \cdot M^{-1} \cdot P \subseteq Q \cdot Q^{-1} \cdot Q = Q$. Ce qui achève la démonstration.

Comme corollaire de la proposition 5, nous pouvons donc dire que si M et P sont deux complexes triphasés distingués non disjoints, alors:

$$M \cdot M^{-1} \cdot P = P \cdot P^{-1} \cdot M = M \cdot P^{-1} \cdot P = P \cdot M^{-1} \cdot M$$

3. *Sup-demi-treillis des complexes triphasés d'un groupe.* — Il est facile de montrer que si (M_i) pour $i \in I$ est une famille de complexes triphasés distingués telle que $\cap\ M_i \neq \phi$, alors $\cap\ M_i$ est un complexe triphasé distingué. Comme G est évidement le plus grand complexe triphasé distingué, l'ensemble $T(G)$ des complexes triphasés distingués de G est un sup-demi-treillis dont tout segment est un treillis complet. Nous allons prouver la modularité de chacun de ces segments.

LEMME 1. — *Si M et P sont deux complexes triphasés tels que $M \cap P \neq \phi$, alors $(M \cap P) \cdot (M \cap P)^{-1} = (M \cdot M^{-1}) \cap (P \cdot P^{-1})$.*

PREUVE

Il est clair que $(M \cap P) \cdot (M \cap P)^{-1} \subseteq (M \cdot M^{-1}) \cap (P \cdot P^{-1})$. Soit réciproquement $x \in (M \cdot M^{-1}) \cap (P \cdot P^{-1})$. Si $a \in M \cap P$, on a $x \cdot a \in M \cdot M^{-1}$. M et $x \cdot a \in P \cdot P^{-1} \cdot P$. Par conséquent $x . a \in M \cap P$. Mais l'écriture $x = (x \cdot a) \cdot a^{-1}$ montre que $x \in (M \cap P) \cdot (M \cap P)^{-1}$.

LEMME 2. — *Si M et P sont deux complexes triphasés tels que $M \cap P \neq \phi$, et si $M \cdot M^{-1} = P \cdot P^{-1}$, alors $M = P$.*

PREUVE

Puisque $M \cap P \neq \phi$, on a $M \subseteq M \cdot M^{-1}$. P et $P \cap P \cdot P^{-1} \cdot M$. Ceci dit, l'égalité $M \cdot M^{-1} = P \cdot P^{-1}$ entraîne $M \cdot M^{-1} \cdot M = P \cdot P^{-1} \cdot M$ et $M \cdot M^{-1} \cdot P = P \cdot P^{-1} \cdot P$. D'où $M = P \cdot P^{-1}. M$ et $M . M^{-1} \cdot P = P$. D'où $P \subseteq M$ et $M \subseteq P$, et par suite $M = P$.

Considérons alors l'ensemble $D(G)$ de tous les complexes triphasés distingués. Il est clair que $D(G)$ est un sup-demi-treillis complet dont tous les segments sont des treillis complets. Démontrons que:

THEOREME 2. — *L'ensemble des complexes triphasés distingués d'un groupe est un sup-demi-treillis dont tous les segments sont des treillis modulaires.*

PREUVE

Il suffit de prouver que si M, P et Q sont trois complexes triphasés tels $M \cap P \neq \phi$, $M \cap P = M \cap Q$, $M \vee P = M \vee Q$, et $P \subseteq Q$, alors $P = Q$.

Or d'après la proposition 5, on a $M \vee P = M \cdot P \cdot P^{-1}$ et $M \vee Q = M \cdot Q \cdot Q^{-1}$. D'où $(M^{-1} \cdot M) \cdot (P \cdot P^{-1}) = (M^{-1} \cdot M) \cdot (Q \cdot Q^{-1})$. D'après la proposition 4, on a $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M$, et par suite: $(M \cdot M^{-1}) \cdot (P \cdot P^{-1}) = (M \cdot M^{-1}) \cdot (Q \cdot Q^{-1})$. D'autre part l'égalité $M \cap P = M \cap Q$, et le lemme 1 entraînent que $(M \cdot M^{-1}) \cap (P \cdot P^{-1}) = (M \cdot M^{-1}) \cap (Q \cdot Q^{-1})$. L'hypothèse $P \subseteq Q$, entraîne enfin que $P \cdot P^{-1} \subseteq Q \cdot Q^{-1}$. D'où:

$$(M \cdot M^{-1}) \cdot (P \cdot P^{-1}) = (M \cdot M^{-1}) \cdot (Q \cdot Q^{-1})$$

$$(M \cdot M^{-1}) \cap (P \cdot P^{-1}) = M \cdot M^{-1}) \cap (Q \cdot Q^{-1})$$

$$P \cdot P^{-1} \subseteq Q \cdot Q^{-1}$$

Les sous-groupes $M \cdot M^{-1}$, $P \cdot P^{-1}$ et $Q \cdot Q^{-1}$ étant distingués d'après la proposition 4, et le treillis des sous-groupes distingués d'un groupe étant modulaire, il vient $P \cdot P^{-1} = Q \cdot Q^{-1}$. Par conséquent $P = Q$ d'après le lemme 2. Ce qui achève la démonstration.

On sait que si un groupe est quasi-cyclique, c'est à dire si pour tout couple d'éléments a et b de G, il existe un $c \in G$ dépendant de a et b tel que $a = c^m$ et $b = c^n$, chacun de ses-groupes est distingué, et que le treillis de ses sous-groupes est distributif (2). Réciproquement si le treilli des sous-groupes d'un groupe est distributif, alors ce groupe est quasi-cyclique. Ceci dit, on a:

THEOREME 3. — *Pour que le sup-demi-treillis des complexes triphasés d'un groupe ait pour segments des treillis distributifs, il faut et il suffit que ce groupe soit quasi-cyclique.*

PREUVE

1) Si les segments du sup-demi-treillis $T(G)$ sont tous distributifs, en particulier le segment des complexes triphasés contenant $\{e\}$ est distributif. Ce qui revient à dire que le treillis des sous-groupes de G est distributif. Par conséquent G est quasi-cyclique.

2) Réciproquement, si G est quasi-cyclique, il est clair que tout complexe triphasé est un complexe triphasé distingué. Ceci dit supposons que M, P et Q soient trois complexes triphasés tels que $M \cap P \cap Q \neq \phi$. Il suffit de montrer que si $M \wedge P = M \wedge Q$, $M \vee P = M \vee Q$, alors $P = Q$. La démonstration du théorème 2, nous montre que:

$$(M \cdot M^{-1}) \cdot (P \cdot P^{-1}) = (M \cdot M^{-1}) \cdot (Q \cdot Q^{-1})$$

$$(M \cdot M^{-1}) \cap (P \cdot P^{-1}) = (M \cdot M^{-1}) \cap (Q \cdot Q^{-1})$$

Puisque le treillis des sous-groupes distingués de G est distributif, on obtient $P \cdot P^{-1} = Q \cdot Q^{-1}$. Le lemme 2 nous montre que $P = Q$.

4. *Relations de* Coray *compatibles avec un groupe.* — Si R est une relation dans un ensemble E, nous notons R^{-1} l'ensemble des couples (b, a) tels que $(a, b) \in R$. Nous désignons par $R \circ R$ l'ensemble des couples $(a, c) \in E \times E$ tels que $(a, b) \in R$ et $(b, c) \in R$ pour un $b \in E$. Enfin Δ_E est l'ensemble des couples (x, x) lorsque $x \in E$.

Une relation de Coray(3) sur E est une relation R sur E vérifiant les propriétés suivante: $R \circ R^{-1} \supseteq \Delta_E$, $R^{-1} \circ R \supseteq \Delta_E$ et $R \circ R^{-1} \circ R = R$. On monte que si R est une relation de Coray sur E, alors $R \circ R^{-1}$ et $R^{-1} \circ R$ sont deux équivalences sur E. Pour que R soit une équivalence sur E, il faut et il suffit que $\Delta_E \subseteq R$.

Définition 3. — Nous dirons que R est une relation de Coray compatible avec le groupe G si $(a, b) \in R$ entraîne que $(x \cdot a, x \cdot b) \in R$ et $(a \cdot x, b \cdot x) \in R$ pour tout $x \in G$.

Proposition 6. — *Si M est un complexe triphasé distingué, la relation R_M définie par: $(a, b) \in R_M$ si $a \cdot b^{-1} \in M$ est une relation de* Coray *compatible avec G.*

Preuve

1) Montrons que $R_M \circ R_M^{-1} \supseteq \Delta_E$ et que $R_M^{-1} \circ R_M \supseteq \Delta_E$. Soit en effet $x \in G$. Pour un $a \in M$, on a $x \cdot a \cdot x^{-1} \in M$. Ce qui peut s'écrire $x \cdot (x \cdot a^{-1})^{-1} \in M$. Par conséquent $(x,(x \cdot a^{-1})) \in R_M$. D'où $(x, x) \in R_M \circ R_M^{-1}$. On montre de même que $R_M^{-1} \circ R_M \supseteq \Delta_E$.

2) Montrons que $R_M \circ R_M^{-1} \circ R_M = R_M$. D'après ce qui précéde on a $R_M \subseteq (R_M \circ R_M^{-1}) \circ R_M$. Réciproquement supposons que $(a, d) \in R_M \circ R_M^{-1} \circ R_M$. Il existe b et $c \in G$ tels que $(a, b) \in R_M$, $(b, c) \in R_M^{-1}$ et $(c, d) \in R_M$. Par définition on a: $a \cdot b^{-1} \in M$, $c^{-1} \cdot b \in M$ et $c \cdot d^{-1} \in M$. D'où $a \cdot b^{-1} \in M$, $b \cdot c^{-1} \in M^{-1}$ et $c \cdot d^{-1} \in M$. Comme M est triphasé, il vient: $(a \cdot b^{-1})\ (b \cdot c^{-1}) \cdot (c \cdot d^{-1}) \in M$. Soit encore $a \cdot d^{-1} \in M$. Ce qui revient à dire que $(a, d) \in R_M$ et que $R_M \circ R_M^{-1} \circ R_M = R_M$.

3) Montrons que R_M est compatible avec G. Supposons que $(a, b) \in R_M$ et soit un $x \in G$. Il est clair que $(a \cdot x, b \cdot x) \in R_M$. Enfin $(x \cdot a) \cdot (x \cdot b)^{-1} = x \cdot (a \cdot b)^{-1} \cdot x^{-1}$ et est donc un élément de M. Ce qui revient à dire que $(x \cdot a, x \cdot b) \in R_M$.

Proposition 7. — *Si R est une relation de* Coray *compatible sur G, et si $R(e)$ désigne le sous-ensemble des $x \in G$ tels que $(x, e) \in R$, alors $R(e)$ est un complexe triphasé distingué.*

Preuve

1) Puisque $R \circ R^{-1} \supseteq \Delta_G$, on a $(e, e) \in R \circ R^{-1}$, et par suite il existe $x \in G$ tel que $(e, x) \in R$ et $(x, e) \in R^{-1}$. La relation $(e, x) \in R$ entraîne $(x^{-1}, e) \in R$ et par suite $x^{-1} \in R\ (e)$, soit $R(e) \neq \phi$.

2) Supposons que a, b et c soient trois éléments de $R(e)$. On a $(a, e) \in R$, $(b, e) \in R$ et $(c, e) \in R$. Par conséquent $(a \cdot b^{-1} \cdot c, b^{-1} \cdot c) \in R$, $(e, b^{-1}) \in R$ et $(c, e) \in R$. D'où $(a \cdot b^{-1} \cdot c,\ b^{-1} \cdot c) \in R$, $(c,\ b^{-1} \cdot c) \in R$ et $(c, e) \in R$. Par suite $(a \cdot b^{-1} \cdot c, b^{-1} \cdot c) \in R$, $(b^{-1} \cdot c, c) \in R^{-1}$ et $(c, e) \in R$. D'où: puisque $R \circ R^{-1} \circ R \subseteq R$, $(a \cdot b^{-1} \cdot c, e) \in R$, et $a \cdot b^{-1} \cdot c \in R\ (e)$. Ce qui revient à dire que $R(e) \cdot (R(e))^{-1} \cdot R(e) = R\ (e)$, et que $R\ (e)$ est un complexe triphasé.

3) Montrons que $R(e)$ est distingué. Si en effet $a \in R(e)$, on a $(a, e) \in R$ par définition. Si $x \in G$, il vient: $(x \cdot a \cdot x^{-1}, x \cdot x^{-1}) \in R$, d'où $(x \cdot a \cdot x^{-1}, e) \in R$, et $x \cdot a \cdot x^{-1} \in R\ (e)$.

Proposition 8. — *Si R est une relation de* Coray *compatible sur G, alors $R_{R(e)} = R$. Si M est un complexe triphasé distingué dans G, alors $R_M(e) = M$.*

Preuve

1) Soit à montrer que $R_M(e) = M$. Soit en effet $a \in M$. On a $(a, e) \in R_M$ puisque $a \cdot e^{-1} = a \in M$. Soit $a \in R_M(e)$. On a de même $a \cdot e^{-1} \in M$ et par suite $a \in M$.

2) Soit à montrer que $R_{R(e)} = R$. Supposons que $(a, b) \in R$. On peut écrire que $(a \cdot b^{-1}, e) \in R$. Ce qui revient à dire que $a \cdot b^{-1} \in R(e)$ et que $(a, b) \in R_{R(e)}$. Si $(a, b) \in R_{R(e)}$. Cela revient à dire que $a \cdot b^{-1} \in R(e)$ et que $(a \cdot b^{-1}, e) \in R$. D'où $(a \cdot b^{-1} \cdot b, e \cdot b) \in R$ et $(a, b) \in R$. De qui achève la démonstration.

Il est clair que si $M \subseteq M'$ alors $R_M \subseteq R_{M'}$ et que si $R \subseteq R'$, alors $R(e) \subseteq R \cdot (e)$. Il est aussi facile de montrer que l'ensemble des relations de CORAY compatibles avec G est un sup-demi-treillis dont chaque segment est complet. Les propositions 6 et 7 montrent alors que:

THEOREME 4. — *L'ensemble des relations de* CORAY *compatibles avec un groupe est en correspondance biunivoque avec l'ensemble de ses complexes triphasés distingués.*

Le théorème 2 montre que:

THEOREME 5. — *Le sup-demi-treillis des relations de* CORAY *compatibles avec un groupe a pour segments des treillis modulaires.*

Le théorème 3 montre que:

THEOREME 6. — *Pour que le sup-demi-treillis des relations de* CORAY *compatibles avec un groupe soit distributif, il faut et il suffit que ce groupe soit quasi-cyclique.*

5. *Groupoïde des relations de* CORAY *compatibles avec un groupe.* On dómontre de la même manière que pour les propositions 1, 2 et 3 les résultats suivants:

PROPOSITION 9. — 1) *Si R est une relation de* CORAY *compatible avec G, alors $R \circ R^{-1}$ et $R^{-1} \circ R$ sont deux équivalences compatibles avec G.*

2) *Si R et P sont deux relations de* CORAY *compatibles avec G, et telles que $R^{-1} \circ R = P \circ P^{-1}$, alor $R \circ P$ est une relation de* CORAY *compatible avec G.*

3) *On a de plus $(R \circ P) \circ (R \circ P)^{-1} = R \circ R^{-1}$ et $(R \circ P)^{-1} \circ (R \circ P) = P^{-1} \circ P$.*

Ce qui revient à dire qu'en posant $\beta(R) = R \circ R^{-1}$, $\alpha(R) = R^{-1} \circ R$, en définissant $R \cdot P = R \circ P$ si et seulement si, $\alpha(R) = \beta(P)$, on a:

THEOREME 7. — *L'ensemble des relations de* CORAY *compatibles avec un groupe est un groupoïde dont les unités sont les relations d'équivalences compatibles avec ce groupe.*

De montrons que:

THEOREME 8. — *Le groupoïde des relations de* CORAY *compatibles avec un groupe, et le groupoïde de ses complexes triphasés distingués sont isomorphes.*

PREUVE

D'après le théorème 4, l'application $M \to R_M$ est une bijection du groupoïde des complexes triphasés distingués vers le groupoïde des relations de CORAY. Supposons alors que $\alpha(M) = \beta(P)$. Ce qui revient à dire que $M^{-1} \cdot M = P \cdot P^{-1}$ et montrons que $R_M{}^{-1} \circ R_M = R_P \circ R_P{}^{-1}$.

1) Soit en effet $(a, c) \in R_M{}^{-1} \circ R_M$. Il existe un $b \in G$ tel que $(a, b) \in R_M{}^{-1}$ et $(b, c) \in R_M$. Ce qui revient à dire que $a \cdot b^{-1} \in M^{-1}$ et $b \cdot c^{-1} \in M$. D'où $a \cdot c^{-1} \in M^{-1}$. M, et par suite $a \cdot c^{-1} \in P \cdot P^{-1}$. Par conséquent il existe p et $q \in P$ tels que $a \cdot c^{-1} = p \cdot q^{-1}$. On a alors $a \cdot (c^{-1} \cdot q) = p$ et par suite $a \cdot (q^{-1} \cdot c)^{-1} = p \in P$. Ce qui revient à dire que $(a, q^{-1} \cdot c) \in R_P$. D'autre part $(c, q^{-1} \cdot c) \in R_P$ puisque $c \cdot (q^{-1} \cdot e)^{-1} = c \cdot c^{-1} \cdot q \in P$. Ce qui montre que $(a, q^{-1} \cdot c) \in R_P$ et $(q^{-1} \cdot c, c) \in R_P{}^{-1}$ .D·où $(a, c) \in R_P \circ R_P{}^{-1}$. D'où $R_M{}^{-1} \circ R_M \subseteq R_P \circ R_P{}^{-1}$.

2) Supposons que $M^{-1} \cdot M = P \cdot P^{-1}$ et montrons que $R_{M.P} = R_M \circ R_P$. Soit en effet $(a, c) \in R_{M.H}$. Il existe $m \in M$ et $p \in P$ tels que $a \cdot c^{-1} = m \cdot p$. D'où $a \cdot (c^{-1} \cdot p^{-1}) = m$. Ce qui peut encore s'écrire $a \cdot (p \cdot c)^{-1} = m \in M$. Ce qui montre que $(a, p \cdot c) \in R_M$. D'autre part on a $(p \cdot c, c) \in P$, puisque $(p \cdot c) \cdot c^{-1} = p \in P$. Par conséquent $(a, c) \in R_M \circ R_P$. Supposons réciproquement que $(a, c) \in R_M \circ R_P$. Il existe un $b \in G$ tel que $(a, b) \in R_M$ et $(b, c) \in R_P$.

D'où $a \cdot b^{-1} \in M$ et $b \cdot c^{-1} \in P$. Par conséquent $a \cdot c^{-1} \in M \cdot P$. Ce qui revient à dire que $(a, c) \in R_{M.P}$ et achève la démonstration.

Comme corollaire du théorème 8, nous avons:

PROPOSITION 10. — *Si R et Q sont deux relations de* CORAY *compatibles avec un groupe, si $R \cap Q \neq \phi$, alors:* $R \vee Q = R \circ R^{-1} \circ Q = Q \circ Q^{-1} \circ R = R \circ Q^{-1} \circ Q = Q \circ R^{-1} \circ R$.

6. *Quotient de deux complexes triphasés distingués.* — Si M et H sont deux complexes triphasés distingués tels que $M \supseteq H$, nous savons que $M \cdot M^{-1}$ et $H \cdot H^{-1}$ sont deux sous-groupes distingués (proposition 4). Comme on a de plus $M \cdot M^{-1} \supseteq H \cdot H^{-1}$, le quotient $M \cdot M^{-1}/H \cdot H^{-1}$ est défini, et est un sous-groupe de $G/H \cdot H^{-1}$.

DEFINITION 4. — Si M et H sont deux complexes triphasés distingués tels que $M \supseteq H$, nous appelons le quotient de M par H, le groupe $M \cdot M^{-1}/H \cdot H^{-1}$, et nous posons $M/H = M \cdot M^{-1}/H \cdot H^{-1}$

PROPOSITION 11. — *Si M et H sont deux complexes triphasés distingués tels que $M \cap H \neq \phi$, alors $(M \vee H)/H$ et $M/(M \cap H)$ sont deux groupes isomorphes.*

PREUVE

D'apres la proposition 5 on sait que $M \vee H = M \cdot M^{-1} \cdot H$. D'où $(M\ H)/H = (M \cdot M^{-1} \cdot H) \cdot (M \cdot M^{-1} \cdot H)^{-1}/H \cdot H^{-1} = (M \cdot M^{-1}) \cdot (H \cdot H^{-1}) \cdot (M \cdot M^{-1})/H \cdot H^{-1}$. Comme $M \cdot M^{-1}$ et $H \cdot H^{-1}$ sont deux sous-groupes distingués, ils commutent. On a donc $(M \vee H)/H = (M \cdot M^{-1}) \cdot (H \cdot H^{-1})/H \cdot H^{-1}$.

D'autre part $M/(M \cap H) = M \cdot M^{-1}/(M \cap H) \cdot (M \cap H)^{-1}$. Mais le lemme 1 montre que $M/(M \cap H) = M \cdot M^{-1}/(H \cdot H^{-1}) \cap (M \cdot M^{-1})$.

On sait que si A et B sont deux sous-groupes distingués, les quotients $A \cdot B/B$ et $A/(A \cap B)$ sont isomorphes. Par conséquent $(M \vee H)/H$ et $M/(M \cap H)$ sont aussi isomorphes. Ce qui achève la démonstration..

Le théorème de JORDAN-HÖLDER (2), et le théorème 2 nous montrent alors que:

THEOREME 9. — *Si G_0 est un complexe triphasé distingué quelconque, et si $G_0 \subset H_1 \subset H_2 \ldots \subset H_m \subset G$ et $G_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots \subset Q_n \subset G$ sont deux chaînes maximales de complexes triphasés distingués, alors $m = n$ et les quotients H_{i-1}/H_i et Q_{j-1}/Q_j sont isomorphes.*

On définit de même le quotient de deux relations R et P de CORAY compatibles avec G, en posant $R/P = R \circ R^{-1}/P \circ P^{-1}$ si $R \supseteq P$(2). On a alors l'équivalent du théoreme 9.

7. *Complexe triphasé engendré par une partie.* — Si X est une partie de G contenant e, il est clair que le plus petit complexe triphasé contenant X est le sous-groupe engendré par X. Si non on monte que le plus petit complexe triphasé distingué contenant X est l'ensemble des composés $x_1 \cdot x_2^{-1}, \ldots x_i \ldots x_n$ où n est un entier impair, et où $x_i \in X$ si i est impair, et $x_i \in X^{-1}$ si i est pair.

Enfin il est clair que si f est un homomorphisme d'un groupe G vers un groupe G', l'image par f de tout complexe triphasé de G est un complexe triphasé de G'. Il en est de même pour l'image inverse par f d'un complexe triphasé de G'.

REMERCIEMENTS. — Je voudrais remercier M^{eme} S. DIXMIER pour une très judicieuse remarque: Un complexe triphasé d'un groupe est une classe d'équivalence modulo un sous-groupe donné.

BIBLIOGRAPHIE

(1) C. EHRESMANN. — *Groupoïdes inductifs, groupoïdes sous-inductifs*, Séminaire de Topologie et Géométrie différentielle (1961-1962).

(2) G. BIRKHOFF. — *Lattice Theory*, Am. Math. Soc. (Edition 1964).

(3) G. CORAY. — *Validité dans les Algèbres de* BOOLE *partielles*, Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 45, Fasc. 1/1970.

(4) J. CHACRON. — a) *Ensemble ordonné des atlas d'un groupoïde*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 271, p. 235-236 (1970).

b) *Treillis des équivalences élémentaires d'une catégorie*, C.R. Acad. Sc. Paris, t. 270, p. 1480-1482 (1970).

c) *Sur la notion de classe dans un demi-groupe involutif*, Semigroup Forum (à paraître).

Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
33, rue St. Leu
80-AMIENS