SOBRE LOS CONJUNTOS COMPACTOS EN LOS ESPACIOS $\mathcal{DF}$

por

MANUEL VALDIVIA

SUMMARY

The main result of this article is the following one: If in a $\mathcal{DF}$-space E, M is a subset which has a numerable family of compact sets, which union is dense in M, then the topology of E and the topology of its strong bidual E_b'' are coincident in M.

* * *

Los espacios vectoriales que manejamos están definidos sobre el cuerpo K de los números reales o de los números complejos.

Con la palabra «espacio» queremos decir «espacio vectorial topológico localmente convexo y de HAUSDORFF».

Si E es un espacio, representamos por E_q' su dual topológico, con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos de E. Si la topología de E es $\mathcal{T}$ también escribimos $E[\mathcal{T}]$ en vez de E. Con la notación $\mathcal{T}_{b*}(E')$ indicamos la topología sobre E, que posee un sistema fundamental de entornos del origen formado por todos los toneles bornívoros, dicha topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos acotados de E_b', dual fuerte de E, y también con la topología que induce el bidual fuerte E_b'' de E sobre E. A E con dicha topología le representamos con la notación $E[\mathcal{T}_{b*}(E')]$.

Utilizaremos el siguiente resultado que ha sido obtenido por A. GROTHENDIECK [1]:

a) *Sea M un subconjunto separable del espacio $E[\mathcal{T}]$. Si $E[\mathcal{T}]$ es un espacio $\mathcal{DF}$, entonces $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_{b*}(E')$ coinciden sobre M.*

LEMA

Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio $\mathcal{DF}$. Si A es un conjunto compacto cualquiera de $E[\mathcal{T}]$, entonces A es compacto en $E[\mathcal{T}_{b*}(E')]$.

DEMOSTRACIÓN

Un sistema fundamental de entornos del origen en $E[\mathcal{T}_{b*}(E')]$ está formado por los toneles bornívoros de $E[\mathcal{T}]$ y, por lo tanto, todo conjunto $\mathcal{T}$-completo es $\mathcal{T}_{b*}(E')$-completo.

Sea A un conjunto compacto cualquiera de $E[\mathcal{T}]$ y veamos que A es $\mathcal{T}_{b*}(E')$-compacto. En $E[\mathcal{T}_{b*}(E')]$ A es completo y, por lo tanto, si no fuera compacto no sería precompacto, por lo que existiría una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en A, sin ningún punto adherente. Dicha sucesión tendría un punto x $\mathcal{T}$-adherente. El conjunto $M = \{x, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ es separable, por lo que, aplicando el resultado a), $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_{b*}(E')$ coinciden en M, de aquí que x sea $\mathcal{T}_{b*}(E')$-adherente de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, lo cual es una contradicción. Queda, pues, demostrado el lema.

El teorema siguiente tiene mayor alcance que el resultado a) de A. GROTHENDIECK.

TEOREMA 1

Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio $\mathcal{DF}$. Si en el conjunto M de $E[\mathcal{T}]$ existe una sucesión de conjuntos compactos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, tales que $\bigcup_{u=1}^{\infty} A_n$ sea denso en M, entonces $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}_{b*}(E')$ coinciden sobre M.

DEMOSTRACIÓN

Evidentemente, la topología $\mathcal{T}_{b*}(E')$ es más fina que $\mathcal{T}$, por lo que en $E[\mathcal{T}]$, dados un punto $x \in M$ y un tonel bornívoro V cualesquiera, hemos de demostrar que existe un entorno del origen U, tal que

$$(x + U) \cap M \subset x + V, \tag{1}$$

Si V^* es el interior de V en $E[\mathcal{T}_{b*}(E')]$, entonces, teniendo en cuenta el lema, se verifica, para cada entero positivo n, que $(x + V^*) \cap A_n$ es un abierto en A_n, para la topología inducida por $\mathcal{T}$, y, por lo tanto, $C_n = A_n \cap \complement(x + V^*)$ es un conjunto compacto, tal que $x \notin C_n$. Suponiendo que $\{B_p\}_{p=1}^{\infty}$ es un sistema fundamental de conjuntos acotados y absolutamente convexos de $E[\mathcal{T}]$, veamos que podemos determinar una sucesión $\{U_p\}_{p=1}^{\infty}$ de entornos del origen, cerrados y absolutamente convexos, y una sucesión $\{a_p\}_{p=1}^{\infty}$ de números reales estrictamente positivos, de manera que, para cada entero positivo p, se tenga

$$a_i\, B_i \subset U_p \cap \frac{V}{2}\,, \quad i = 1,\, 2,\, \dots,\, p, \tag{2}$$

$$C_p \cap (x + U_p) = \phi \tag{3}$$

En efecto, suponiendo que la determinación se ha hecho para i, $p \leq n$, hallamos un número real estrictamente positivo a_{n+1}, tal que

$$a_{n+1}\, B_{n+1} \subset \frac{V}{2}\,.$$

Si D_{n+1} es la envoltura convexa cerrada de $\bigcup_{j=1}^{n+1} a_j\, B_j$, se tiene que $D_{n+1} \subset \frac{V}{2} \subset V^*$, por lo que, teniendo en cuenta la definición de C_{n+1}, resulta que

$$(x + D_{n+1}) \cap C_{n+1} = \phi,$$

pero como D_{n+1} es cerrado y C_{n+1} es compacto existe un entorno del origen U_{n+1}, cerrado y absolutamente convexo, de manera que

$$(x + U_{n+1}) \cap C_{n+1} = \phi,\ U_{n+1} \supset D_{n+1},$$

es decir, que se tienen las relaciones (2) y (3) para $p = n + 1$, $i = 1,\, 2,\, \dots,\, n + 1$.

El conjunto $2U = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ es cerrado, absolutamente convexo y, por la condición (2), bornívoro, y puesto que $E[\mathcal{T}]$ es un espacio $\mathcal{DF}$, resulta que U es un entorno del origen.

Sea $\mathring{U}$ el interior de U en $E[\mathcal{T}]$. Veamos, ahora, que U cumple la condición (1). En efecto, si $z \in (x + U) \cap M$, entonces $z \in x + 2\mathring{U}$, de donde se deduce que z no puede pertenecer a $\complement(x + V)$, ya que si z perteneciera a dicho conjunto se tendría $z \in (x + 2U^o) \cap \complement(x + V)$, y como este último conjunto es abierto y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es denso en M, existiría un entero positivo n_0 tal que

$$A_{n_0} \cap (x + 2\mathring{U}) \cap \complement(x + V) \neq \phi, \tag{4}$$

por otra parte

$$C_{n_0} = A_{n_0} \cap \complement\,(x + V^*) \supset A_{n_0} \cap \complement\,(x + V),$$

por lo que, observando (4), resulta que

$$(x + 2\mathring{U}) \cap C_{n_0} \neq \phi.$$

y de aquí

$$(x + 2U) \cap C_{n_0} \neq \phi,$$

lo cual es un absurdo, ya que $2U \subset U_{n_0}$ y se verifica la condición (3). Queda, pues, demostrado el teorema.

COROLARIO 1.1

Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio $\mathcal{DF}$. Si existe en $E[\mathcal{T}]$ una sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de conjuntos compactos, tales que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ sea total, entonces E es infratonelado.

DEMOSTRACIÓN

Si $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ es total en $E[\mathcal{T}]$ es fácil comprobar que existe en $E[\mathcal{T}]$ una familia numerable de conjuntos compactos cuya unión es densa en $E[\mathcal{T}]$, por lo que, aplicando el Teorema 1, $\mathcal{T}_{b*}(E')$ coincide con $\mathcal{T}$, de aquí que $E[\mathcal{T}]$ sea infratonelado, c.q.d.

COROLARIO 2.1

Sea E un espacio metrizable. Si en el dual fuerte E_b' de E, existe una familia numerable de conjuntos compactos, cuya unión es total, entonces E es distinguido.

Es sabido que hay espacios $\mathcal{DF}$ semi-reflexivos que no son reflexivos [2, p. 401]. La situación es distinta con respecto a los espacios $\mathcal{DF}$ semi-MONTEL, como pone de manifiesto el teorema siguiente.

TEOREMA 2

*Sea E un espacio $\mathcal{DF}$. Si E es un espacio semi-*MONTEL, *entonces E es un espacio de* MONTEL.

DEMOSTRACIÓN

Hemos de ver que E es tonelado. En efecto, el espacio E es unión numerable de conjuntos compactos, por lo que, teniendo en cuenta el Corolario 1.1, E es infratonelado, pero como además E es completo, por ser semi-reflexivo, se tiene que E es tonelado, c.q.d.

Finalmente, damos la siguiente caracterización de los espacios de FRECHET-MONTEL.

TEOREMA 3

Sea E un espacio metrizable tonelado. Es condición necesaria y suficiente para que E sea un espacio de FRECHET-MONTEL, *que E_q' sea un espacio $\mathcal{DF}$.*

DEMOSTRACIÓN

La condición necesaria es conocida. Veamos, pues, la condición suficiente. Los conjuntos cerrados y acotados en E', con la topología $\sigma(E', E)$, son $\sigma(E', E)$-compactos, por ser E tonelado, y, por lo tanto, son también compactos en E_q', de aquí que E_q' sea un espacio semi-MONTEL. Aplicando el Teorema 2, E_q' será un espacio de MONTEL y como consecuencia E es un espacio de MONTEL, c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. GROTHENDIECK. — *Sur les espaces (F) et (DF)*. — Summa Brasil. Math. *3*, 57-123 (1954).

[2] G. KOTHE. — *Topological Vector Spaces*, I. — Springer-Verlag-Berlin-Heidelberg-New York (1969).