VARIEDADES FOLIADAS CON METRICA CASI-FIBRADA

por

A. M. NAVEIRA

INTRODUCCION

El estudio de las foliaciones que admiten métricas casi-fibradas, es decir, variedades foliadas que admiten métrica de la forma:

$$ds^2 = g_{ab}(x, y)\,\theta^a \theta^b + g_{uv}(y)\,dy^u dy^v$$

fue introducido por REINHART en 1958 (28) en un trabajo titulado: «Foliated manifolds with bundle-like metrics». En otro trabajo posterior (30) señala como el nombre más conveniente es el de casi-fibrada (fibre-like), reservando el de casi-haz (bundle-like) para las foliaciones cuyas hojas son totalmente geodésicas. Los trabajos de REINHART fueron continuados por HERMANN (9), (10), MOGI (16), SACKSTEDER (33) y VIDAL (37), lo cual prueba el interés de estas foliaciones a las que se pueden generalizar muchas de las propiedades de las variedades de RIEMANN fibradas.

Es sabido la importancia creciente de las foliaciones como generalización de los espacios fibrados y entre éstas tienen especial interés aquellas que por admitir una métrica casi-fibrada parecen una generalización intermedia entre esos dos tipos de variedades. Ejemplos de folicaciones de este tipo son las foliaciones de un grupo de LIE por conjuntos de un subgrupo analítico (no necesariamente cerrado), la foliación de un espacio de RIEMANN por órbitas de un grupo de isometrías, teniendo todas sus órbitas la misma dimensión y todos los espacios fibrados con una conveniente elección de métrica.

Los trabajos sobre métricas casi-fibradas aparecidos posteriormente a 1958 son resultados independientes, a veces relativos sólo a foliaciones de codimensión uno, como los de SACKSTEDER; parece, pues, de interés abordar su estudio de una manera metódica y sistemática y esto es lo que hacemos en este trabajo, tratando de analizar especialmente aquellas propiedades fundamentales que permiten conocer las estructuras métricas de esas foliaciones y relacionarlas con otras propiedades o estructuras, tales como la holonomia o las estructuras casi-producto.

Primeramente establecemos las notaciones y definiciones, alguna de ellas introducida por nosotros, como la de aplicación de foliación totalmente compatible.

Se analizan las relaciones entre las transformaciones infinitesimales de foliación y los campos de vectores básicos. Una vez establecido el concepto de $(r + s)$-forma de tipo (r, P) y (s, Q); es decir, expresada localmente en una base cuyas r primeras formas son duales de los campos vectoriales verticales (P) y las restantes s duales de campos horizontales (Q), se estudia la descomposición de la diferencial exterior en el caso más general, deduciendo algunas condiciones para la integrabilidad de la estructura casi-producto y analizando las propiedades de estas variedades según los diversos tipos de métrica admitidos.

Se demuestra la equivalencia entre las diversas definiciones dadas por distintos autores de métrica casi-fibrada y se establecen algunas nuevas como la 6) y 7) siguientes:

6). —

$$\nabla \phi_{U*} X = \phi_{U*} (\nabla H X)$$

donde ∇ es la derivada covariante a lo largo de una curva, HX es el complemento ortogonal al espacio vectorial tangente a la hoja y $\phi_U : U \longrightarrow B_U$ una aplicación de descomposición local entre el abierto U y una variedad de Riemann B_U.

7). — Cualquier geodésica ortogonal a una hoja L de una foliación sobre una variedad de Riemann es ortogonal a todas las hojas que corta.

Investigamos las relaciones entre los campos de vectores básicos y las formas invariantes y estudiamos las propiedades algebraicas de las transformaciones infinitesimales de foliación y de los campos verticales en el álgebra de los campos de vectores.

Analizamos las formas casi-base, su importancia en las métricas casi-fibradas y la noción de orientabilidad en las estructuras casi-producto y en las foliaciones.

Estudiamos la holonomia en los espacios de Riemann fibrados, dando algunos resultados; así como en las foliaciones, en particular en las foliaciones métricas cerradas y en las foliaciones de codimensión uno. (Proposición 5.4).

Siguiendo ideas del profesor DEHEUVELS, se relaciona el grupo de holonomia y el grupo de cohomologia $H^1(M, R)$.

En el capítulo VI, se generalizan a las foliaciones propiedades de los espacios de RIEMANN fibrados, en especial algunos de los obtenidos por ISHIHARA (12) y MUTO (19), tales como la correspondencia entre hojas, condiciones para que las hojas sean paralelas y hojas isométricas, dando, además, en algún caso nuevas demostraciones de otros resultados conocidos.

Finalmente, se estudian ejemplos de foliaciones admitiendo métrica casi-fibrada y se analizan las llamadas «foliaciones de LIE» (HERMANN (10)), deduciendo algunos resultados.

Deseo hacer constar mi agradecimiento al profesor E. VIDAL por la dirección de este trabajo y por los consejos dados a lo largo de su ejecución sobre su desarrollo.

También deseo hacer constar mi gratitud al Profesor R. DEHEUVELS, de la Universidad de París, por sus consejos sobre algunas cuestiones.

INDICE

CAPÍTULO I VARIEDADES FOLIADAS. NOTACIONES.

Pág.

§ 1. — Notaciones 47
§ 2. — Foliaciones 48
§ 3. — Un subgrupo del grupo lineal general 49
§ 4. — Entornos llanos 50
§ 5. — Aplicación de foliación 50
§ 6. — Aplicaciones distinguidas 51
§ 7. — Aplicación de descomposición 52
§ 8. — Relación localmente semejante 53

CAPÍTULO II ESTRUCTURAS CASI-PRODUCTO Y TIPOS DE METRICAS.

§ 1. — Espacios tangente y cotangente en un punto de una variedad de RIEMANN foliada 54
§ 2. — Transformaciones infinitesimales de foliación y campos de vectores básicos 55
§ 3. — Subespacio ortogonal al espacio tangente a una hoja 56
§ 4. — Estructura casi-producto 56
§ 5. — Estructura casi-producto integrable 60
§ 6. — Tipos de métrica. Propiedades 61

CAPÍTULO III METRICA CASI-FIBRADA.

§ 1. — Equivalencias 63
§ 2. — Propiedades de las foliaciones admitiendo métrica casi-fibrada 70
§ 3. — Métrica casi-haz. Propiedades 73
§ 4. — Foliaciones métricas cerradas 76

CAPÍTULO IV FORMAS CASI-BASE.

Pág.

§ 1. — Relación entre operadores diferenciales 77
§ 2. — Hojas holonómicas 78
§ 3. — Formas casi-base. Propiedades 79
§ 4. — Orientabilidad. Propiedades 80

CAPÍTULO V HOLONOMIA DE LAS FOLIACIONES CON METRICA CASI-FIBRADA.

§ 1. — Holonomia de una variedad de RIEMANN fibrada. 83
§ 2. — Holonomia. Construcción y propiedades 84
§ 3. — Primer grupo de cohomologia singular de un espacio M con coeficientes en un grupo G discreto — no necesariamente abeliano — y de su revestimiento universal 85
§ 4. — Holonomia de las foliaciones métricas cerradas.. 86

CAPÍTULO VI GENERALIZACION A LAS VARIEDADES FOLIADAS DE ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE RIEMANN FIBRADOS

§ 1. — Correspondencia entre hojas 88
§ 2. — Hojas paralelas 89
§ 3. — Hojas isométricas 89

CAPÍTULO VII EJEMPLOS DE FOLIACIONES QUE ADMITEN METRICA CASI-FIBRADA Y FOLIACIONES DE LIE.

§ 1. — Espacios fibrados 91
§ 2. — Grupo de isometrías actuando sobre una variedad de RIEMANN 91
§ 3. — Foliaciones de LIE 92

BIBLIOGRAFIA 95

CAPÍTULO I

INTRODUCCION Y NOTACIONES

§ 1. — *Notaciones*

En lo que sigue utilizaremos los convenios y notaciones siguientes:

Todas las variedades, curvas, campos vectoriales, aplicaciones y funciones serán diferenciables C^{∞} mientras no especifiquemos lo contrario.

Si M es una variedad diferenciable, representaremos por $T_x(M)$ ó M_x el espacio tangente a M en $x \varepsilon M$. Si $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$ es una curva, para todo $t \varepsilon [0,1]$, $\sigma'(t) \varepsilon M_{\sigma(t)}$ representará el vector tangente a σ en $\sigma(t)$. Si $\phi : M \longrightarrow M'$ es una aplicación entre variedades, $\phi_* : T_x(M) \longrightarrow T_{\phi(x)}(M')$ representa la aplicación lineal inducida sobre los espacios tangentes. La aplicación inducida sobre las formas diferenciales la representaremos por ϕ^*.

Sea $T^0(M) = T_0(M) = C(M)$ el álgebra de las funciones reales sobre M, sean $T^1(M)$ y $T_1(M)$ las álgebras de los campos de vectores y de las 1-formas sobre M respectivamente. Si $T^r(M)$ representa el álgebra de los campos de tensores y $T_s(M)$ el álgebra de las formas de grado s, entonces

$$T'(M) = \sum_{r=0}^{\infty} T^r(M), \quad T''(M) = \sum_{s=0}^{\infty} T_s(M), \quad T = \sum_{r,s=0}^{\infty} T_s^r(M)$$

indican las álgebras de tensores contravariantes, covariantes, contravariantes y covariantes.

En todo el trabajo utilizaremos el siguiente convenio de índices:

$$1 \leq a,\ b,\ c,\ d, \ldots \leq p; \qquad 1 \leq u,\ v,\ w, \ldots \leq q$$
$$1 \leq i,\ j,\ k, \ldots \leq p + q = n; \qquad y^r = x^{p+r}$$

M, N, B, M', ... indicarán variedades diferenciables; L, L', ... representarán las hojas de las foliaciones y U, V, W ,... entornos ó subconjuntos de las variedades dadas.

$L_x \equiv T_x L$ indica el espacio tangente a la hoja L en el punto x, H_x es cualquier subespacio complementario a L_x. (P, Q) indicará una estructura casi-producto sobre la variedad M. En el caso que la estructura casi-producto sea integrable (Vid. Cap. 2, § 5), las distribuciones integrales las representaremos indistintamente por F ó P y H ó Q.

§ 2. — *Foliaciones*

DEFINICIÓN 1.1 : FOLIACIÓN. — Definir una foliación F sobre una variedad diferenciable M consiste en asignar a cada punto $x \varepsilon M$ un campo $F \subset T^p(M)$ de subespacios vectoriales tangentes de dimensión constante p, cumpliendo las condiciones de integrabilidad completa.

Sobre la variedad foliada M podemos tomar en cada punto $x \varepsilon U$, $U \subset M$ una referencia del espacio tangente y la dual para el espacio cotangente.

Sean

$$X_a \equiv X_1, X_2, \dots X_p \quad \text{una base de } L_x$$

y

$$X_u \equiv X_{p+1}, X_{p+2}, \dots X_{p+q} \quad \text{una base de } H_x.$$

Sean ω^i formas diferenciales tales que $\omega^i(X_j) = \delta^i_j$, entonces $\omega^{p+1}, \dots, \omega^{p+q}$ determinan una base de las formas anuladoras de X_a y $\omega^1, \dots, \omega^p$ es la base dual del subespacio L_x.

Si $\omega = \omega^{p+1} \wedge \dots \wedge \omega^n$, descomposición local, la integrabilidad del sistema diferencial

$$\omega^{p+1} = 0 = \dots = \omega^n$$

es equivalente a que $d\,\omega = \lambda \wedge \omega$ ($d\,\omega$ pertenece al ideal engendrado por ω) y λ es una 1-forma. En este caso existe un sistema de coordenadas locales $(x^1, \dots, x^n)$ con

$$d\,x^{p+1} = \dots = d\,x^n = 0.$$

El entero p se llama la dimensión de la hoja y $q = n - p$ la codimensión. Una hoja de la foliación es una subvariedad integral maximal y como consecuencia del teorema de FROBENIUS por cada punto de la variedad pasa una y sólo una de tales subvariedades (*).

(*) Es bien sabido que sobre una variedad foliada M tenemos definidas de una manera natural dos topologías T y T_0. Los abiertos de T son los de M como espacio topológico n-dimensional. Los abiertos de T_0 son los abiertos en las hojas de la foliación y esta variedad la designaremos por M_0, la cual es p-dimensional, pudiendo considerarse como subvariedad regularmente embebida en M.

DEFINICIÓN 1.2: CURVAS VERTICAL Y HORIZONTAL. — Una curva $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$ es vertical si su vector tangente $\sigma'(t) \varepsilon L_{\sigma(t)}$.

Un campo de subespacios tangentes $H : x \longrightarrow H_x \subset M_x$ tal que $M_x = F_x \oplus H_x$ se dice campo horizontal de la foliación. Una curva $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$ es horizontal si $\sigma'(t) \varepsilon H_{\sigma(t)}$.

§ 3. — *Un subgrupo del grupo lineal general*

Consideremos un subgrupo G del grupo lineal general $GL(n, R)$ formado por todas las matrices del tipo

$$\begin{pmatrix} P & N \\ O & Q \end{pmatrix} \tag{I.1}$$

donde P y Q representan respectivamente $p \times p$ y $q \times q$ matrices no singulares, N es una $p \times q$ matriz y O es la matriz nula.

Un subgrupo G' de G está formado por todas las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & Q \end{pmatrix} \tag{I.2}$$

Otro subgrupo K de G es el que sus elementos tienen la forma

$$\begin{pmatrix} E_p & N \\ O & E_q \end{pmatrix} \tag{I.3}$$

donde E_p y E_q son $p \times p$ y $q \times q$ matrices identidad.

Observemos que también forman un subgrupo de $GL(n, R)$ las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} P & O \\ N & Q \end{pmatrix} \tag{I.4}$$

Notaremos a este subgrupo por G^*.

Del mismo modo K^*, subgrupo de G^*, está integrado por las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} E_p & O \\ N & E_q \end{pmatrix} \tag{I.5}$$

§ 4. — *Entornos llanos*

Un punto $z \in M$ lo representamos por $z = (x, y)$, donde $x = (x^1, \ldots, x^p)$, $y = (y^1, \ldots, y^q)$.

DEFINICIÓN 1.3 : ENTORNOS LLANOS. — Se dicen entornos llanos los entornos de coordenadas tales que las variedades integrales localmente están dadas por $y^1 = c^1, \ldots, y^q = c^q$ y $U = U_x \times U_y$, siendo $U_x\,(U_y)$ un entorno cúbico en el $p\,(q)$-espacio euclídeo.

Es posible elegir los entornos de esta forma por la existencia del homeomorfismo local entre la variedad y el n-espacio euclídeo. Cada uno de los subespacios $U_x \times \{y\}$, $y \in U_y$ se dice una placa del entorno.

DEFINICIÓN 1.4 : FOLIACIÓN REGULAR. — Una foliación F se dice regular en el punto z si existe un entorno llano de z al que corta cada hoja a lo sumo en una placa.

Sean U y U' dos entornos llanos del punto z, el cambio de coordenadas en $U \cap U'$ es de la forma

$$\begin{aligned} x'^a &= x'^a(x^1, \ldots, x^p, y^1, \ldots, y^q) \\ x'^u &= x'^u(y^1, \ldots, y^q) \end{aligned} \tag{I.6}$$

por tanto la matriz del jacobiano de la transformación será

$$\left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x'^a}{\partial x^b} & \dfrac{\partial x'^a}{\partial x^v} \\ & \\ O & \dfrac{\partial x'^u}{\partial x^v} \end{pmatrix} \in G \tag{I.7}$$

§ 5. — *Aplicación de foliación*

Sea θ una relación de equivalencia sobre un conjunto M, ψ una relación de equivalencia sobre un conjunto M', ϕ una aplicación de M en M'. Se dice que ϕ es *compatible* con θ y ψ si la relación

$$x \equiv x' \ (\text{mod. } \theta) \quad \text{implica} \quad \phi(x) \equiv \phi(x') \ (\text{mod. } \psi).$$

Nosotros diremos que ϕ es *totalmente compatible* con θ y ψ si:

1). — $x \equiv x'$ (mod. θ) implica $\phi(x) \equiv \phi(x')$ (mod. ψ).

2). — $x \not\equiv x'$ (mod. θ) implica $\phi(x) \not\equiv \phi(x')$ (mod. ψ).

DEFINICIÓN 1.5: APLICACIÓN DE FOLIACIÓN. — Sean θ y ψ sistemas diferenciales de PFAFF completamente integrables sobre las variedades diferenciables M y M'. Sean $\pi_\theta : M \longrightarrow M/\theta$, $\pi_\psi : M' \longrightarrow M'/\psi$, ϕ una aplicación diferenciable de M en M'. ϕ es una aplicación de foliación si existe $\Phi : M/\theta \longrightarrow M'/\phi$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[d, "\pi_\theta"'] & M' \arrow[d, "\pi_\psi"] \\ M/\theta \arrow[r, dashed, "\Phi"] & M'/\psi \end{tikzcd} \tag{I.8}$$

es conmutativo ó equivalentemente

$$\phi_* (\theta_z) \subseteq \psi_{\phi(z)}. \tag{I.9}$$

Observemos que según esta definición la correspondencia hoja en hoja puede aplicar todas las hojas de la foliación θ en una única hoja de la foliación ψ. Si ϕ es totalmente compatible con θ y ψ la correspondencia es hojas distintas en hojas distintas.

§ 6. — *Aplicaciones distinguidas*

Identifiquemos el espacio euclídeo R^n al producto $R^q \times R^p$, sea $\pi : R^n \longrightarrow R^q$ la proyección sobre el primer factor. Sabemos (Vid. Cap. I, § 4) que en una transformación de coordenadas se verifica $x'^u = x'^u(y^1, \ldots, y^q)$ y por tanto, define un homeomorfismo local de R^q. Sean $h_i : U_i \longrightarrow M$, U_i abiertos de R^n, verificando:

1). — Las imágenes $h_i(U_i)$ forman un recubrimiento abierto de M.

2). — Los cambios de las cartas $h_j^{-1} h_i$ son homeomorfismos locales de R^n y localmente, en un cambio de coordenadas, se transforman según (I.7), es decir, de igual forma que en la foliación.

Las aplicaciones continuas f de abiertos de M en R^q que son localmente de la forma πh_i^{-1} se llaman *aplicaciones distinguidas* de F y verifican las propiedades:

1). — $f_i : V_i \longrightarrow R^q$ forman un recubrimiento de M.

2). — Una aplicación f de un abierto $U \subset M$ en R^q es distinguida sí y sólo sí para cualquier otra aplicación distinguida $f_i : V_i \longrightarrow R^q$, $z \varepsilon U \subset V_i$, existe un homeomorfismo local h de R^q tal que $f = hf_i$ en el entorno de z.

Las aplicaciones distinguidas caracterizan completamente la estructura foliada F de la variedad M.

§ 7. — *Aplicación de descomposición,*

Definición 1.6: Aplicación de descomposición. — Una aplicación diferenciable. $\phi : M \longrightarrow B$ (siendo M variedad foliada y B variedad diferenciable), se dice de descomposición para la foliación si:

1). — Es sumersión

2). — $L_x = \phi_*^{-1}(0)$

3). — Dim B + Dim L = Dim M

Tal aplicación de descomposición no existe siempre globalmente pero *sí localmente,* entendiendo por tal una aplicación $\phi_U : U \longrightarrow B_U$, siendo U un abierto contenido en M.

La existencia de aplicación de descomposición local en las foliaciones también está asegurada por la existencia de las aplicaciones distinguidas.

Que haya aplicación de descomposición local sobre otra variedad B_U no implica que exista sobre algún subconjunto de M/F, pues M/F puede no ser variedad. No obstante, existe siempre una aplicación $\pi_F : M \longrightarrow M/F$, considerando M/F como espacio topológico.

§ 8. — *Relación localmente semejante*

DEFINICIÓN 1.7: RELACIÓN LOCALMENTE SEMEJANTE. — Sean M y N variedades diferenciables, $x \varepsilon M$, $y \varepsilon N$ y sea $\phi : M \longrightarrow N$ un morfismo tal que $\phi(x) = y$, $m = \mathrm{Dim}\, M$, $n = \mathrm{Dim}\, N$. Sean M' y N' variedades diferenciables, $x' \varepsilon M'$, $y' \varepsilon N'$ y sea $\phi' : M' \longrightarrow N'$ un morfismo tal que $\phi'(x') = y'$; entonces (M, N, x, y, ϕ) es localmente semejante a (M', N', x', y', ϕ') si existen entornos abiertos U de x, V de y, U' de x', V' de Y' y difeomorfismos locales $g : U \longrightarrow U'$ y $h : V \longrightarrow V'$ tales que:

1). — $\phi(U) \subset V$ y $\phi'(U') \subset V'$

2). — $g(x) = x'$ y $h(y) = y'$

3). — El siguiente diagrama es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & V \arrow[d, "h"] \\
U' \arrow[r, dashed, "\phi'"] & V'
\end{tikzcd}$$

La relación localmente semejante la designaremos mediante el signo Ξ (**).

(**) La definición de la relación localmente semejante sigue cumpliéndose si U' y V' se sustituyen por espacios lineales, en cuyo caso ϕ' es una aplicación lineal, haciendo $x' = 0$ e $y' = 0$.

Capítulo II

ESTRUCTURAS CASI-PRODUCTO Y TIPOS DE METRICA

§ 1. — *Espacios tangente y cotangente en un punto de una variedad de* RIEMANN *foliada.*

Sobre la variedad foliada M consideremos un entorno llano U, del punto z. En este punto las coordenadas están dadas por $(x^1, ..., x^p$ $y^1, ..., y^q)$.

La referencia natural del espacio tangente viene dada por:

$$(\partial/\partial x^1,\ \partial/\partial x^2, ..., \partial/\partial x^p,\ \partial/\partial y^1,\ \partial/\partial y^2, ..., \partial/\partial y^q)$$

siendo la base dual de la forma:

$$(dx^1, ..., dx^p,\ dy^1, ..., dy^q).$$

Una base del espacio tangente en cada punto se obtiene también completando los p campos de vectores $\partial/\partial x^a$ con q campos X_u, combinación lineal de $\partial/\partial x^a$ y $\partial/\partial y^u$, los cuales serán de la forma :

$$X_u = \partial/\partial y^u - \Gamma^a_u\, \partial/\partial x^a \tag{II.1}$$

es decir, la base será

$$(\partial/\partial x^1, ..., \partial/\partial x^p,\ X_1, ..., X_q) \tag{II.2}$$

La matriz del cambio de base de la referencia natural a la de la forma (II.2) es

$$\begin{pmatrix} E_p & O \\ -\Gamma & E_q \end{pmatrix} \varepsilon\, K^* \tag{II.3}$$

Una base dual para el espacio cotangente se obtiene completando $(dy^1, ..., dy^q)$ con p 1-formas combinaciones lineales de dx^a y dy^u

$$\theta^a = dx^a + \Gamma^a_u\, dy^u \tag{II.4}$$

y la matriz del cambio de base es ahora de la forma

$$\begin{pmatrix} E_p & \Gamma \\ O & E_q \end{pmatrix} \varepsilon K \tag{II.5}$$

Por tanto, en un sistema de coordenadas (x^a, y^u) una referencia del espacio tangente está dada por (*):

$$X_a = \partial_a ; \qquad X_u = \partial_u - \Gamma_u^a \partial_a$$

escribiendo $\partial_a = \partial / \partial x^a$, $\partial_u = \partial / \partial y^u$.

§ 2. — *Transformaciones infinitesimales de foliación y campos de vectores básicos*

Sean: Y un campo vectorial perteneciente a F y X un campo vectorial sobre M.

DEFINICIÓN 2.1: TRANSFORMACIÓN INFINITESIMAL DE FOLIACIÓN. — *Un campo vectorial X es una transformación infinitesimal de foliación sí y sólo sí*

$$\underset{X}{L} Y = [X, Y] \varepsilon F$$

donde $\underset{X}{L}$ representa la derivada de LIE *respecto al campo X.*

DEFINICIÓN 2.2: CAMPO VECTORIAL BÁSICO. — *Un campo de vectores*

$$Y = \xi^u X_u, \quad \textit{tal que} \quad \xi^u = \xi^u (y^1, ..., y^q) \tag{II.6}$$

está bien definido sobre la variedad foliada M y se dice un campo de vectores básicos.

El conjunto de campos de vectores básicos lo representaremos por B' y en cada punto constituye un subespacio vectorial de H.

PROPOSIÓIÓN 2.1. — *Un campo vectorial $X \varepsilon H$ es una transformación infinitesimal sí y sólo si es básico.*

Para la demostración, Vid. (16).

(*) Que exista globalmente esta referencia es consecuencia de la existencia de una sección global en el espacio fibrado asociado principal. (16)

§ 3. — *Subespacio ortogonal al espacio tangente a una hoja*

En una variedad de Riemann foliada con métrica

$$ds^2 = g_{ab}(x, y)\, dx^a dx^b + 2 g_{au}(x, y)\, dx^a dy^u + g_{uv}(x, y)\, dy^u dy^v \qquad \text{(II.7)}$$

según (II.4), ds^2 se puede escribir en la forma

$$ds^2 = (\theta^a - \Gamma^a_u dy^u)\, g_{ab}\, (\theta^b - \Gamma^b_v dy^v) +$$
$$+ 2 g_{bv} (\theta^b - \Gamma^b_u dy^u)\, dy^v + g_{uv}\, dy^u dy^v = g_{ab}\, \theta^a \theta^b + G_{uv}\, dy^u dy^v \qquad \text{(II.8)}$$

donde $G_{uv} = g_{uv} + g_{ab} \Gamma^a_u \Gamma^b_v$.

Como $|g_{ab}| \neq 0$ se sigue $|G_{uv}| \neq 0$. Puesto que $g_{ab} = g_{ab}(x, y)$ y $\Gamma^a_u = \Gamma^a_u(x, y)$, en general $G_{uv} = G_{uv}(x, y)$.

Sea M una variedad de Riemann con métrica (II.7), siendo (∂_a, ∂_u) la base natural del espacio tangente y (X_a, X_u) otra base del mismo espacio, X_a es ortogonal a X_u si

$$X_a X_u = \left(\frac{\partial}{\partial y^u} - \Gamma^b_u \frac{\partial}{\partial x^b}\right) \frac{\partial}{\partial x^a} =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y^u} \frac{\partial}{\partial x^a} - \Gamma^b_u \frac{\partial}{\partial x^b} \frac{\partial}{\partial x^a} = g_{au} - \Gamma^b_u g_{ab} = 0$$

Así, pues, las ecuaciones

$$g_{au} = \Gamma^b_u g_{ab} \qquad \text{(II.9)}$$

determinan la ortogonalidad de los subespacios F y H y las funciones Γ^b_u están definidas de esta forma.

§ 4. — *Estructura casi-producto*

Definición 2.3 : Estructura casi-producto. — *Una variedad M tiene estructura casi-producto (P, Q) si existen homomorfismos $P, Q : T(M) \longrightarrow T(M)$, tales que*

$$T(M) = PT(M) \oplus QT(M).$$

Si $X_i \varepsilon T(M)$ entonces $X_1 \wedge X_2 \wedge \ldots \wedge X_k$ es una suma de términos cada uno de los cuales es el producto exterior de r campos PX_i y s campos QX_j, $(r + s = k)$.

Sean ω^a y ω^u 1-formas. Decimos que ω^a y ω^u son $(1, P)$ y $(1, Q)$-formas si son duales de campos vectoriales en P y Q respectivamente. Del mismo modo podemos hablar de (r, P) y (s, Q)-formas de grados r y s respectivamente, duales de campos tensoriales en P y Q.

En general, una k-forma α es el producto exterior de una (r, P)-forma con una (s, Q)-forma:

$$\alpha = A_{i_1 \ldots i_r j_{r+1} \ldots j_{s+r}} \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_r} \wedge \omega^{j_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \omega^{j_{r+s}}. \quad \text{(II.10)}$$

Consideremos α del tipo (r, s).

Proposición 2.2. — *La diferencial de una k-forma α del tipo (r, s) es una suma de $(k + 1)$-formas de los tipos $(r + 1, s)$, $(r, s + 1)$, $(r + 2, s - 1)$ y $(r - 1, s + 2)$.*

Demostración. —

$$\begin{aligned} d\alpha = {} & dA_{i_1 \ldots} \wedge \omega^{i_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{r+s}} + A_{i_1 \ldots i_a \ldots i_r} \omega^{i_1} \wedge \\ & \wedge \ldots \wedge d\omega^{i_a} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{r+s}} + A_{i_1 \ldots i_r i_{r+1} \ldots i_u \ldots i_{r+s}} \omega^{i_1} \wedge \\ & \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{r+1}} \wedge \ldots \wedge d\omega^{i_u} \wedge \ldots \wedge \omega^{i_{r+s}}. \end{aligned} \quad \text{(II.11)}$$

Efectuando en el espacio cotangente en función de las diferenciales el cambio de base

$$\omega^{i_a} = A^{i_a}_{i_b} dx^{i_b} + B^{i_a}_{i_u} dy^{i_u} \quad \text{(II.12)}$$

$$\omega^{i_v} = C^{i_v}_{i_b} dx^{i_b} + D^{i_v}_{i_u} dy^{i_u} \quad \text{(II.13)}$$

ó equivalentemente

$$dx^{i_b} = A'^{i_b}_{i_a} \omega^{i_a} + B'^{i_b}_{i_v} \omega^{i_v} \quad \text{(II.14)}$$

$$dy^{i_u} = C'^{i_u}_{i_a} \omega^{i_a} + D'^{i_u}_{i_v} \omega^{i_v} \quad \text{(II.15)}$$

Diferenciando (II.12) y (II.13) y efectuando operaciones, se deduce

$$\begin{gathered} d\omega^{i_a} = dA^{i_a}_{i_b} \wedge dx^{i_b} + dB^{i_a}_{i_u} \wedge dy^{i_u} = \\ M^{i_a}_{i_b i_c} dx^{i_b} \wedge dx^{i_c} + M^{i_a}_{i_b i_u} dx^{i_b} \wedge dy^{i_u} + M^{i_a}_{i_u i_v} dy^{i_u} \wedge dy^{i_v} \end{gathered} \quad \text{(II.16)}$$

Sustituyendo dx^{i_a} y dy^{i_u} por sus expresiones (II.14) y (II.15) y asociando términos semejantes se obtiene

$$d\,\omega^{i_a} = N^{i_a}_{i_b i_c}\,\omega^{i_b} \wedge \omega^{i_c} + N^{i_a}_{i_b i_u}\,\omega^{i_b} \wedge \omega^{i_u} + N^{i_a}_{i_u i_v}\,\omega^{i_u} \wedge \omega^{i_v} \qquad \text{(II.17)}$$

Análogamente

$$d\,\omega^{i_u} = N^{i_u}_{i_b i_c}\,\omega^{i_b} \wedge \omega^{i_c} + N^{i_u}_{i_b i_v}\,\omega^{i_b} \wedge \omega^{i_v} + N^{i_u}_{i_v i_w}\,\omega^{i_v} \wedge \omega^{i_w} \qquad \text{(II.18)}$$

Puesto que

$$dA_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{r+s}} = \frac{\partial A \dots}{\partial x^{i_a}}\, dx^{i_a} + \frac{\partial A \dots}{\partial y^{i_u}}\, dy^{i_u} =$$

$$= \frac{\partial A \dots}{\partial x^{i_a}}\,(A'^{i_a}_{i_b}\,\omega^{i_b} + B'^{i_a}_{i_u}\,\omega^{i_u}) + \frac{\partial A \dots}{\partial y^{i_w}}\,(C'^{i_w}_{i_a}\,\omega^{i_a} + D'^{i_w}_{i_v}\,\omega^{i_v}) =$$

$$= L_{i_a}\,\omega^{i_a} + L_{i_u}\,\omega^{i_u} \qquad \text{(II.19)}$$

Sustituyendo (II.17), (II.18) y (II.19), en (II.11), se deduce

$$\begin{aligned} d\alpha = {} & B_{i_a i_1 \dots i_r \dots i_{r+s}}\,\omega^{i_a} \wedge \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge \omega^{i_{r+s}} + \\ & + B_{i_u i_1 \dots i_r \dots i_{r+s}}\,\omega^{i_u} \wedge \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r} \wedge \omega^{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge \omega^{i_{r+s}} + \\ & + B_{i_1 \dots i_{r-1} i_{r+1} i_{r+s} i_u i_v}\,\omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_{r-1}} \wedge \omega^{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge \omega^{i_{r+s}} \wedge \omega^{i_u} \wedge \omega^{i_v} + \\ & + B_{i_a i_b i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_{r+s-1}}\,\omega^{i_a} \wedge \omega^{i_b} \wedge \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_r} \wedge \omega^{i_{r+1}} \wedge \dots \wedge \omega^{i_{r+s-1}} \end{aligned} \qquad \text{(II.20)}$$

Así, pues, el operador diferencial $d : T_k(M) \longrightarrow T_{k+1}(M)$ se puede descomponer en

$$d = d'_2 + d'_1 + d''_1 + d''_2 \qquad \text{(II.21)}$$

donde d'_2, d'_1, d''_1 y d''_2, son, respectivamente, de los tipos $(r+2,\ s-1)$, $(r+1,\ s)$, $(r,\ s+1)$ y $(r-1,\ s+2)$.

De una manera abstracta, para un r y un s fijos definimos $\pi_{r,s}\,\alpha$ como la suma de todos aquellos términos teniendo fijos los subíndices r y s. $\pi_{r,s}$ es, por tanto, un operador proyección de $T_{r+s}(M) \longrightarrow T_{r+s}(M)$.

El tipo de descomposición de formas diferenciales induce una descomposición sobre la derivada exterior d mediante la fórmula

$$(\pi_{a,u}\,d)\,\alpha = \Sigma_{r,s}\,\pi_{r+a,\,s+u}\,d\,\pi_{r,s} \qquad \text{(II.22)}$$

Entonces, con nuestras notaciones anteriores

$$\pi_{1,0}\, d = d'_1\,; \quad \pi_{0,1}\, d = d''_1\,; \quad \pi_{2,-1}\, d = d'_2\,; \quad \pi_{-1,2}\, d = d''_2 \qquad \text{(II.23)}$$

Si M es una variedad foliada, entonces $\omega^{iu} = dy^{iu}$ y en la descomposición (II.21) $d'_2 = 0$ (Vid. Cap. IV, § 1).

Como $d^2 = 0$ se tiene

$$\begin{aligned}(d'_2)^2 = d'_2 d'_1 + d'_1 d'_2 = d'_2 d''_1 + (d'_1)^2 + d''_1 d'_2 = \\ = d'_2 d''_2 + d'_1 d''_1 + d''_1 d'_1 + d''_2 d'_2 = d''_2 d''_1 + d''_1 d''_2 = \\ = d''_2 d'_1 + (d''_1)^2 + d'_1 d''_2 = (d''_2)^2 = 0 \end{aligned} \qquad \text{(II.24)}$$

siendo éstos los únicos términos obtenidos en d^2 de órdenes $(r + 4,\ s - 2)$, $(r + 3,\ s - 1)$, $(r + 2,\ s)$, $(r + 1,\ s + 1)$, $(r,\ s + 2)$, $(r - 1,\ s + 3)$ y $(r - 2,\ s + 4)$.

Definamos las expresiones

$$d_P = 2\, d'_2 + d'_1 - d''_2 \qquad \text{(II.25)}$$

$$d_Q = 2\, d''_2 + d''_1 - d'_2 \qquad \text{(II.26)}$$

de $T_k(M) \longrightarrow T_{k+1}(M)$, cumpliendo:

1). — $\phi \in C(M)$, $X \in T'(M)$ entonces $(d_P\, \phi)\, X = (PX)\, \phi$;

$\{(d_Q\, \phi)\, X = (QX)\, \phi\}$.

2). — Si $\phi \in C(M)$, $(d_P\, d + d\, d_P)\, \phi = 0$

$\{d_Q\, d + d\, d_Q)\, \phi = 0\}$.

3). — Si $\phi \in T_r(M)$, $\psi \in T''(M)$, $d_P(\phi \wedge \psi) = d_P\, \phi \wedge \psi + (-1)^r \phi \wedge d_P \psi$; $\{d_Q(\phi \wedge \psi) = d_Q\, \phi \wedge \psi + (-1)^r \phi \wedge d_Q \psi\}$.

Observemos que $d = d_P + d_Q$. Utilizando las relaciones (II.24)

$$d_P^2 = (d'_1)^2 + (d'_1 d''_1 + d''_1 d'_1) + (d''_1)^2 = d_Q^2 \qquad \text{(II.27)}$$

Lema 2.1. — *$d_P^2 = d_Q^2 = 0$ sí y sólo si*

$d = d'_1 + d''_1$; *es decir* $d'_2 = d''_2 = 0$ *y* $d_P = d'_1$, $d_Q = d''_1$.

DEMOSTRACIÓN. —

$$d_P^2 = d_Q^2 = 0 = (d_1'^2 + d_1' d_1'' + d_1'' d_1' + d_1''^2) =$$
$$= (d_1' + d_1'') (d_1' + d_1'') \Longrightarrow d = d_1' + d_1'' \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow d_2' = d_2'' = 0 \Longleftrightarrow d = d_P + d_Q$$

Recíprocamente

$$d = d_1' + d_1'' \Longleftrightarrow d^2 = 0 \Longrightarrow d_1'^2 + (d^1 d_1'' + d_1'' d_1') +$$
$$+ d_1''^2 = 0 \Longrightarrow d_P^2 = d_Q^2 = 0.$$

§ 5. — *Estructura casi-producto integrable*

LEMA 2.2. — $d_P^2 = d_Q^2 = 0$ *es condición necesaria y suficiente para que las distribuciones* P *y* Q *de la estructura casi-producto sean completamente integrables.*

DEMOSTRACIÓN. — Sean X_p, e Y_p campos de vectores pertenecientes a $PT(M)$ y X_q, Y_q pertenecientes a $QT(M)$.

$$[X_p, Y_p] = Z_p + Z_q, \quad \text{donde} \quad Z_p \in P, \ Z_q \in Q$$
$$[X_q, Y_q] = Z_p' + Z_q' \quad \text{con} \quad Z_p' \in P, \ Z_q' \in Q.$$

Para que las distribuciones sean integrables se ha de verificar $Z_q = 0$ y $Z_p' = 0$.

Por la definición de d_P y d_Q,

$$(d_P \phi)(QX) = 0; \qquad (d_P \phi)(PX) = (PX)\phi;$$
$$(d_Q \phi)(PX) = 0; \qquad (d_Q \phi)(QX) = (QX)\phi$$

donde ϕ es una función sobre M.

Partiendo de la relación entre el producto corchete y la diferencial exterior, podemos escribir

$$2\, d_Q^2 \phi (X_p, Y_p) = X_p \{d_Q \phi (Y_P)\} - Y_P \{d_Q \phi (X_p)\} - d_Q \phi [X_p, Y_p] \quad \text{(II.28)}$$

Si suponemos $d_Q^2 = 0$ se sigue

$$d_Q \phi [X_p, Y_p] = X_p(0) - Y_p(0)$$

Por otra parte

$$d_Q \phi [X_p, Y_p] = (d_Q \phi)(Z_p + Z_q) = Z_q(\phi) = 0$$

por tanto $[X_p, Y_p] \varepsilon P$. Análogamente se probaría $[X_q, Y_q] \varepsilon Q$.

Recíprocamente, si el producto corchete de dos campos de vectores pertenece a P, entonces $d_Q \phi [X_p, Y_p] = 0$; Como $(d_Q \phi)(PX) = 0$, se sigue $(d_Q^2 \phi)(X_p, Y_p) = 0$, esto es, $d_Q^2 = 0$. De forma análoga $d_P^2 = 0$.

Sea M una variedad de RIEMANN, como sabemos $T(M)$ se puede descomponer en la suma directa de $PT(M) \oplus QT(M)$. Según que las distribuciones $PT(M)$ ó $QT(M)$ sean involutivas ó no, pueden darse los siguientes casos:

1) $PT(M)$ y $QT(M)$ son dos distribuciones complementarias no involutivas. *(Estructura casi-producto no integrable).*

2) La distribución $PT(M)$ es involutiva y $QT(M)$ no involutiva, obtenemos así sobre M una *estructura foliada* cuyas hojas son las variedades integrales de $PT(M)$.

3) Si las distribuciones $PT(M)$ y $QT(M)$ son ambas involutivas, obtenemos dos familias de subvariedades integrales complementarias y la variedad se dice que tiene *estructura casi-producto integrable,* en cuyo caso obtenemos una estructura producto local (31).

§ 6. — *Tipos de métrica. Propiedades*

Sea M una variedad de RIEMANN, g_{ij} las componentes del tensor métrico, respecto a la referencia natural, M admite una métrica de la forma

$$ds^2 = g_{ab}(x, y)\, dx^a dx^b + g_{au}(x, y)\, dx^a dy^u + g_{uv}(x, y)\, dy^u dy^v \qquad (II.29)$$

Si M es una variedad foliada, la métrica (II.29) es reducible a la forma (II.8).

$$ds^2 = g_{ab}(x, y)\, \theta^a \theta^b + G_{uv}(x, y)\, dy^u dy^v$$

DEFINICIÓN 2.4: MÉTRICA CASI-FIBRADA. — *Una métrica casi-fibrada sobre una variedad foliada es aquella que tiene la representación local*

$$ds^2 = g_{ab}(x, y)\, \theta^a \theta^b + g_{uv}(y)\, dy^u dy^v \qquad (II.30)$$

LEMA 2.3: *Toda estructura casi-producto integrable admite una métrica de la forma*

$$ds^2 = g_{ab}(x, y)\, dx^a dx^b + g_{uv}(x, y)\, dy^u dy^v \tag{II.31}$$

y con respecto a esta métrica las distribuciones complementarias P y Q son ortogonales.

DEMOSTRACIÓN. — Es evidente, puesto que para la métrica dada en (II.31) $g_{au} = 0$ es condición necesaria y suficiente para que las distribuciones complementarias sean ortogonales.

DEFINICIÓN 2.5: METRICA SIN TORSIÓN. — *Una estructura casi-producto integrable admite métrica sin torsión si localmente tiene la representación*

$$ds^2 = g_{ab}(x)\, dx^a dx^b + g_{uv}(y)\, dy^u dy^v \tag{II.32}$$

PROPOSICIÓN 2.3. — *Bajo las hipótesis del lema* 2.3 *los dos apartados siguientes son equivalentes:*

1). — *El transporte paralelo por medio de la conexión inducida por la métrica de un campo vectorial* $X \varepsilon PT(M)$, $(Y \varepsilon QT(M))$ *es también un campo vectorial en* $PT(M)$, $(QT(M))$.

2). — *La métrica respecto a las foliaciones P y Q es casi-fibrada.*

(La demostración es inmediata)

DEFINICIÓN 2.6: METRICA CASI-HAZ. — *Una variedad foliada M admite métrica casi-haz si admite métrica casi-fibrada y si las hojas de la foliación son subvariedades totalmente geodésicas.*

Las hojas de las foliaciones P y Q de una estructura casi-producto integrable son subespacios totalmente geodésicos (31); por tanto, sobre la estructura casi-producto integrable la métrica casi-fibrada es siempre casi-haz.

Capítulo III

METRICA CASI-FIBRADA

§ 1. — *Equivalencias*

Proposición 3.1. — *Las siguientes condiciones determinan la misma métrica.*

1). — *La métrica es casi-fibrada (Def.* 2.4*).*

2). — *Sea* U *un entorno llano (Cap. I,* § 4*),* $\pi_U : U \longrightarrow U_y$ *la aplicación de descomposición local. Dos curvas cualesquiera en* U *ortogonales a la hoja* L *con la misma proyección, tienen la misma longitud.*

3). — *Dos vectores ortogonales cualesquiera con la misma proyección mediante* π_{U*} *(los puntos base sobre la misma hoja), tienen la misma longitud.*

4). — *Supongamos definida sobre* M *una métrica de* Riemann *y mediante la aplicación de descomposición local* ϕ_U *sobre otra variedad de* Riemann B_U*, el isomorfismo*

$$\phi_{U*} : M_z/F_z \longrightarrow B_{U\,\phi_U(z)}$$

conserva el producto interior definido por las estructuras de Riemann *sobre estos espacios vectoriales.*

5). — *En cada abierto* U, $U \subset M$ *la métrica está dada por* $ds^2 = \omega_i\, \omega_i$ *(*ω_i *formas ortonormales) y las formas* ω_u *son invariantes en el sentido que proceden de* 1*-formas sobre* B_U *mediante la aplicación inducida sobre las mismas.*

6). —

$$\nabla\, \phi_{U*} X = \phi_{U*} (\nabla\, HX) \tag{III.1}$$

donde ∇ *es la derivada covariante a lo largo de una curva y* HX *es el complemento ortogonal al espacio vectorial tangente a la hoja.*

7). — *Cualquier geodésica ortogonal a una hoja* L *de una foliación sobre una variedad de* Riemann *es ortogonal a todas las hojas que corta.*

DEMOSTRACIÓN. —

1) $\Longrightarrow$ 2) y 1) $\Longrightarrow$ 3)

Supongamos que la métrica es casi-fibrada, entonces en U_y podemos tomar la métrica de la forma

$$ds^2 = g_{uv}(y)\, dy^u\, dy^v \tag{III.2}$$

Una curva ortogonal $\alpha(t)$ tiene por vector tangente

$$X = c^u X_u = c^u \frac{\partial}{\partial y^u} - c^u \Gamma^a_u \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{III.3}$$

De (III.3) se sigue

$$\phi_{U*} X = c^u \frac{\partial}{\partial y^u}$$

Las funciones g_{ij} en la referencia dada son:

$$g_{ab} = \frac{\partial}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial x^b}; \quad g_{au} = \frac{\partial}{\partial x^a} X_u; \quad g_{uv} = X_u X_v \tag{III.4}$$

por tanto, el elemento de arco de la curva $\alpha(t)$ viene dado por

$$l(\alpha(t)) = \left\{\left(c^u \frac{\partial}{\partial y^u} - c^u \Gamma^a_u \frac{\partial}{\partial x^a}\right)\left(c^v \frac{\partial}{\partial y^v} - c^v \Gamma^b_v \frac{\partial}{\partial x^b}\right)\right\}^{1/2} \tag{III.5}$$

Puesto que $$\frac{\partial}{\partial y^u} = X_u + \Gamma^a_u \frac{\partial}{\partial x^a}$$

de (III.4) y (III.5) se sigue

$$\begin{aligned} l(\alpha(t)) = &\left\{\left(c^u X_u - c^u \Gamma^a_u \frac{\partial}{\partial x^a} + c^u \Gamma^a_u \frac{\partial}{\partial x^a}\right)\left(c^v X_v - c^v \Gamma^b_v \frac{\partial}{\partial x^b} + \right.\right. \\ &\left.\left. + c^v \Gamma^b_v \frac{\partial}{\partial x^b}\right)\right\}^{1/2} = (c^u X_u c^v X_v)^{1/2} = (c^u c^v g_{uv}(y))^{1/2} \end{aligned} \tag{III.6}$$

$$\begin{aligned} l\{\pi_U(\alpha(t))\} &= \left(c^u \frac{\partial}{\partial y^u} c^v \frac{\partial}{\partial y^v}\right)^{1/2} = \left\{c^u c^v \left(X^u + \Gamma^a_u \frac{\partial}{\partial x^a}\right)\left(X_v + \Gamma^b_v \frac{\partial}{\partial x^b}\right)\right\}^{1/2} = \\ &= \left\{c^u c^v \left(g_{uv} + g_{av} \Gamma^a_u + g_{bu} \Gamma^b_v + g_{ab} \Gamma^a_u \Gamma^b_v\right)\right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{III.7}$$

Puesto que X es un campo vectorial tangente a una curva ortogonal, $g_{ua} = 0$ y (III.7) se reduce a

$$l\{\pi_U(\alpha(t))\} = \{c^u c^v (g_{uv} + \Gamma^a_u \Gamma^b_v g_{ab})\}^{1/2} \tag{III.8}$$

(III.8) sería el elemento de arco de la curva $\pi_U(\alpha(t))$ con la métrica inducida a partir de U. Siendo la métrica casi-fibrada, podemos modificarla para que tome la forma (III.2). En este caso

$$\Gamma^a_u \Gamma^b_v g_{ab} = 0$$

resultando finalmente

$$l\{\pi_U(\alpha(t))\} = (c^u c^v g_{uv}(y))^{1/2} \tag{III.9}$$

Puesto que $l(\alpha(t))$ y $l\{\pi_U(\alpha(t))\}$ tienen la misma expresión, tienen la misma longitud, así como sus vectores tangentes. Por tanto, se verifican 2) y 3).

2) $\Longrightarrow$ 1)

Por cada punto $y \in U_y$ consideremos curvas con vectores tangentes $c^u \partial/\partial y^u$, c^u constantes. En cualquier punto $z \in U$, $U \subset M$, $\pi_U(z) = y$ existe una curva $\alpha(t)$, transversal, proyectándose en un arco dado, cuyo vector tangente X puede escribirse:

$$X = c^u X_u \tag{III.10}$$

Por hipótesis, dos cualesquiera de tales curvas en puntos diferentes tienen la misma longitud en un arco dado. Consideremos la curva $\alpha(t)$ tal que

$$c^1 = 0, \ldots, c^u = 1, \ldots, c^q = 0$$

su longitud está dada por

$$l(\alpha(t)) = \int_0^t \{g_{uu}(x(t), y(t))\}^{1/2} dt \tag{III.11}$$

Como $(dl/dt)_{t=0} = \{g_{uu}(x(0), y(0))\}^{1/2}$ y l y dl/dt son independientes del valor de $x(0)$

$$g_{uu} = g_{uu}(y) \tag{III.12}$$

Sea ahora

$$c^1 = 0, \ldots, c^u = 1, \ldots, c^v = 1, \ldots, c^q = 0$$

entonces la longitud de esta curva es

$$l(\alpha(t)) = \int_0^t \{g_{uu}(x(t), y(t)) + 2g_{uv}(x(t), y(t)) + g_{vv}(x(t), y(t))\}^{1/2} dt$$

$$y \ (dl/dt)_{t=0} = \{g_{uu}(x(0), y(0)) + 2g_{uv}(x(0), y(0)) + g_{vv}(x(0), y(0))\}^{1/2}$$

Asimismo l y dl/dt son independientes del valor de $x(0)$ y por tanto, haciendo uso de (III.12) se deduce igualmente

$$g_{uv} = g_{uv}(y) \tag{III.13}$$

siendo la métrica casi-fibrada.

3) $\Longrightarrow$ 1)

Si dos curvas ortogonales tienen la misma proyección, también sus vectores tangentes en los puntos correspondientes. Puesto que los dos vectores tienen la misma longitud en cualquier par de puntos correspondientes, las dos curvas tienen la misma longitud.

1) $\Longleftrightarrow$ 5)

Las dos expresiones para la métrica casi-fibrada son equivalentes, ya que siendo las formas ω_u invariantes pasamos de una expresión de la métrica a la otra mediante un cambio de base al poder tomar en U_y la métrica $g_{uv}(y)\, dy^u\, dy^v$.

4) $\Longleftrightarrow$ 5)

Si demostramos que los campos de vectores X_u, duales de las formas ω_u (invariantes), son básicos, entonces conservan su longitud mediante la aplicación de descomposición local y por tanto se verifica 4).

Por ser ω_u invariante

$$\omega_u = \phi_U^*(\theta_u) \tag{III.14}$$

donde θ_u es una 1-forma sobre B_U, con

$$d\theta_u = \frac{1}{2} f'_{vwu}\, \theta_v \wedge \theta_w$$

Ahora bien

$$d\,\omega_u = d\,(\phi_U^* \,\theta_u) = \phi_U^* \,(d\,\theta_u) =$$

$$= \phi_U^* \left(\frac{1}{2} f'_{vwu}\, \theta_v \wedge \theta_w\right) = \frac{1}{2} f_{vwu}\, \omega_v \wedge \omega_w \qquad \text{(III.15)}$$

Pero también se verifica que

$$d\,\omega_u = 1/2 f_{abu}\, \omega_a \wedge \omega_b + 1/2 f_{avu}\, \omega_a \wedge \omega_v + 1/2 f_{vwu}\, \omega_v \wedge \omega_w \qquad \text{(III.16)}$$

Identificando términos correspondientes en (III.15) y (III.16), obtenemos

$$f_{abu} = 0\,; \qquad f_{avu} = 0 \qquad \text{(III.17)}$$

Sean X_i n campos de vectores duales de ω_j, (*) entonces:

$$[X_a,\ X_v] = f_{avk}\, X_k = f_{avb}\, X_b + f_{avu}\, X_u = f_{avb}\, X_b \qquad \text{(III.18)}$$

lo cual prueba que los campos X_v son básicos (Vid. Prop. 2.1).

Recíprocamente, si los campos X_v son básicos $f_{auv} = 0$. Entonces (III.16) se reduce a

$$d\,\omega_u = 1/2\ f_{vwu}\, \omega_v \wedge \omega_w$$

lo cual prueba que las formas ω_u son invariantes.

5) $\Longrightarrow$ 6)

Sea M una variedad de RIEMANN foliada. Si $\sigma : [0,1] \longrightarrow M$ es una curva, $\sigma' : t \longrightarrow \sigma'(t)$ representa el campo vectorial tangente a σ.

Si $X : t \longrightarrow X(t)\ \varepsilon\ M_{\sigma(t)}$ es un campo vectorial a lo largo de σ, $\nabla X\ \varepsilon\ M_{\sigma(t)}$ indica la derivada covariante de X a lo largo de σ.

En este apartado consideraremos referencias ortonormales. Si $U \subset M$ y ω_i es una base de 1-formas diferenciales en el abierto U con $d s^2 = \omega_i\, \omega_i$ (producto simétrico), entonces existen unas únicas 1-formas ω_{ij} en U llamadas las formas de la conexión tales que

$$d\,\omega_i = \omega_{ij} \wedge \omega_j\,; \qquad \omega_{ij} = -\,\omega_{ji} \qquad \text{(III.19)}$$

(*) $d\,\omega_i = \frac{1}{2} f_{jki}\omega_j \wedge \omega_k$ es equivalente a $[X_i,\ X_j] = f_{ijk} X_k$ solamente cuando los campos vectoriales X_j son duales de las formas ω_i.

Recordando la definición de derivada covariante de la componente X_i de un vector $X = X_i e_i$

$$\nabla X_j = \frac{d X_j}{d t} - X_i \omega_{ij} \tag{III.20}$$

Es bien sabido que la derivada covariante del campo X en un punto arbitrario está dada por

$$\nabla X(t) = \frac{d X(t)}{d t} - \omega_{ij} X_i e_j \tag{III.21}$$

Aplicando ω_i a (III.21), obtenemos (**)

$$\omega_i (\nabla X(t)) = \frac{d\, \omega_i (X(t))}{d t} - \omega_{ij} (\sigma'(t))\, \omega_i (X_i e_j) =$$

$$= \frac{d\, \omega_i (X(t))}{d t} - \omega_{ij} (\sigma'(t))\, \omega_j (X(t)) \tag{III.22}$$

Sea :

$$\phi_U : U \rightarrow B_U$$

la aplicación de descomposición local compatible con la métrica casi-fibrada sobre U; θ_u 1-formas definidas sobre un subconjunto abierto $W \subset B_U$ con $ds^2 = \theta_u \theta_u$ y θ_{uv} las correspondientes formas de la conexión. Sean ω_i las 1-formas definidas en un abierto $U \subset M$ con $\phi_U (U) \subset W$, tales que $\omega_u = \phi_U^* \theta_u$.

$$\theta_{uv} = f_{uvw} \theta_w ; \qquad \omega_{ij} = g_{ijk} \omega_k ; \qquad \omega_a (H X) = 0. \tag{III.23}$$

Partiendo de (III.23), se sigue

$$g_{uvw} \omega_w = \phi_U^* (f_{uvw} \theta_w) \tag{III.24}$$

Por ser la conexión de LEVI-CIVITA

$$g_{uav} = g_{uva} ; \qquad g_{uab} = g_{uba} \tag{III.25}$$

Como

$$\theta_u (\phi_{U*} \nabla H X) = \frac{d}{d t} \theta_u (\phi_{U*} X) - \theta_{uv} (\phi_{U*} \sigma'(t))\, \theta_v (\phi_{U*} X) \tag{III.26}$$

(**) (III.22) sigue verificándose para una referencia arbitraria.

y mediante el levantamiento

$$\omega_u(\nabla HX) = \frac{d}{dt}\omega_u(HX) - \omega_{uv}(\sigma'(t))\,\omega_v(HX) - \omega_{ua}(\sigma'(t))\,\omega_a(HX) =$$

$$= \frac{d}{dt}\omega_u(HX) - \omega_{uv}(\sigma'(t))\,\omega_v(HX) \qquad \text{(III.27)}$$

Comparando las relaciones (III.26) y (III.27) y puesto que

$$\phi_{U*}X = \phi_{U*}(HX),$$

entonces

$$\theta_u(\phi_{U*}(\nabla HX)) = \theta_u(\nabla\,\phi_{U*}X)$$

o equivalentemente

$$\phi_{U*}(\nabla HX) = \nabla\,\phi_{U*}X$$

lo cual prueba (III.1).

6) $\Longrightarrow$ 5)

En cada punto perteneciente al abierto U tomamos una base ortonormal del espacio tangente. Las imágenes mediante ϕ_{U*} constituyen una base del mismo espacio en B_U.

Por hipótesis, las métricas correspondientes en U y B_U verifican (III.1), esto es

$$\phi_{U*}(\nabla HX) = \nabla\,\phi_{U*}X \Longrightarrow \theta_u(\nabla\,\phi_{U*}X) = \theta_v(\phi_{U*}(\nabla HX))$$

Puesto que $\omega_u(\nabla HX)$ es la componente de ∇HX en U, bajando mediante la aplicación de descomposición local obtenemos

$$\gamma_u(\phi_{U*}(\nabla HX)) = \theta_u(\nabla\,\phi_{U*}X) \qquad \text{(III.28)}$$

Como en (III.28) las componentes han de ser las mismas, se sigue $\gamma_u = \theta_u$, esto es

$$\omega_u = \phi_U^*\,\theta_u \qquad \text{(III.29)}$$

1) $\Longrightarrow$ 7)

Sea α una geodésica con vector inicial X_0 en un punto z, perteneciendo a un entorno llano U. Supongamos que X_0 es ortogonal a la hoja L en z. Sea α' una curva ortogonal en z tal que $\pi_U(\alpha')$ es la geodésica en $\pi_U(z)$ con vector tangente inicial $\pi_{U*}X_0$. Sea z'

un punto sobre α' suficientemente cercano a z; entonces α' es la curva de longitud mínima en U uniendo los puntos z y z', puesto que la métrica es casi-fibrada.

Si α''es otra curva uniendo z y z' con $\pi_U(\alpha'') = \pi_U(\alpha')$, entonces α'' es de longitud mayor que α', ya que en cualquier punto sus vectores tangentes tienen las mismas componentes ortogonales y el vector tangente a α'' tiene una componente tangente a la hoja.

Si $\pi_U(\alpha'') \neq \pi_U(\alpha')$, entonces $\pi_U(\alpha'')$ es mayor que $\pi_U(\alpha')$, así α'' es de longitud mayor que α'. Reiterando el razonamiento se prueba que α' es una geodésica con vector tangente inicial X_0, así $\alpha = \alpha'$.

7) $\Longrightarrow$ 1)

Para la demostración (Vid. (19) Teor. 5).

COROLARIO 3.1. — *Una variedad foliada M de codimensión uno admite métrica casi-fibrada si existe una métrica de* RIEMANN *sobre M de forma que la distancia entre placas convenientemente próximas, medida según trayectorias ortogonales a las hojas, es constante localmente.*

DEMOSTRACIÓN. — El corolario se sigue de la proposición 3.1. Basta tomar un abierto U y un homeomorfismo $\psi : U \longrightarrow S$, $S = \{(x^1, ..., x^p, x^{p+1}, ..., x^n); 0 < x^i < 1\}$, de forma que el subconjunto de S obtenido haciendo $x^{p+1} = c^1, ..., x^n = c^q$ es una placa y $x^a = c^a$ son imágenes isométricas sobre trayectorias ortogonales, por tanto con la misma longitud y la métrica es casi-fibrada.

§ 2. — *Propiedades de las foliaciones admitiendo métrica casi-fibrada*

PROPOSICIÓN 3.2. — *Sobre una variedad de* RIEMANN *foliada M de codimensión uno con métrica casi-fibrada, si una curva $\alpha : [0,1] \longrightarrow M$ es ortogonal a todas las hojas de la foliación, entonces α es una curva geodésica.*

DEMOSTRACIÓN. — Sea α la curva ortogonal a todas las hojas de la foliación y su vector tangente en cada punto X_α. Sea U un entorno llano, π_U la aplicación de descomposición local correspondiente. Para todo $z \in U$, $\pi_U(z) = y$, $y \in U_y$ tomemos la geodésica β pasando por el punto y tal que su vector tangente sea $\pi_{U*} X_\alpha$. Por ser la métrica casi-fibrada, el levantamiento de β existe siempre localmente en arcos de geodésica con vector tangente X_α; llamemos a esta curva α'. Puesto que α' es ortogonal en un punto y la métrica casi-fibrada, entonces es ortogonal en todo punto ya que la foliación es de codimensión uno. Por tanto $\alpha = \alpha'$.

COROLARIO 3.2. — *Sobre una variedad de* RIEMANN *foliada M con métrica casi-fibrada, la proyección de una geodésica σ, ortogonal a una hoja, es una geodésica $\sigma_* = \phi_U(\sigma)$ de B_U (Vid. Prop.* 3.1, 4*) y, recíprocamente, el levantamiento ortogonal de σ_*, si existe, es una geodésica.*

DEMOSTRACIÓN. — Como sabemos, la condición necesaria y suficiente para que σ sea una geodésica es

$$\nabla \sigma'(t) = 0 \tag{III.30}$$

Por ser la métrica casi-fibrada

$$\nabla \phi_{U*}(X) = \phi_{U*}(\nabla HX)$$

siendo X un campo vectorial a lo largo de σ. En particular para el campo $\sigma'(t)$ se verifica:

$$\nabla \phi_{U*}(\sigma'(t)) = \phi_{U*}(\nabla H(\sigma'(t))) = \phi_{U*}(\nabla \sigma'(t)) \tag{III.31}$$

Si σ es geodésica, de (III.31) se sigue que $\phi_{U*}(\sigma'(t))$ es tangente a una curva geodésica: $\sigma_* = \phi_U(\sigma)$.

Recíprocamente, los levantamientos ortogonales de curvas en B_U existen siempre localmente (4). Supongamos que existan globalmente y sea σ_* una curva geodésica. Utilizando el razonamiento anterior se sigue que σ es una curva geodésica.

COROLARIO 3.3. — *Sobre una variedad de* RIEMANN *foliada con métrica casi-fibrada, sea $\sigma : [0,1] \longrightarrow L$ un arco de curva en la hoja, X un campo vectorial ortogonal a L a lo largo de σ. $X(t)$ es la traslación vertical de $X(0)$ a lo largo de σ sí y sólo si $\phi_{U*}(\nabla X(t)) = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. — Por ser X un campo vectorial ortogonal en el abierto U,

$$\phi_{U*}(X(t)) = X_1$$

es fijo y además $H(X(t)) = X(t)$.

Siendo la métrica casi-fibrada

$$\nabla \phi_{U*}(X) = \phi_{U*}(\nabla(X)) = \nabla X_1 = 0$$

PROPOSICIÓN 3.3. — *Sea M una variedad diferenciable paracompacta con métrica*

$$d s^2 = \omega_i \, \omega_i \tag{III.32}$$

ω_i base de 1-formas ortonormales, X_j sus campos vectoriales duales con

$$[X_a, X_u] = f_{auv} X_v \tag{III.33}$$

La métrica (III.32) *es casi-fibrada si las matrices f_{auv} son hemi-simétricas para cada a.*

DEMOSTRACIÓN. — Puesto que $[X_a' \; X_u] = f_{auv} X_v$ y la base es ortonormal

$$d\,\omega_v = 1/2 f_{auv} \, \omega_a \wedge \omega_u \tag{III.34}$$

Sea $\sigma : (\lambda, \mu) \longrightarrow \sigma(\lambda, \mu) \subset M$; $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ una superficie tal que para λ fijo, $\mu \longrightarrow \sigma(\lambda, \mu)$ es una curva vertical y para μ fijo, $\lambda \longrightarrow \sigma(\lambda, \mu)$ es una curva horizontal.

Supongamos $\sigma^*(\omega_i) = A_i(\lambda, \mu)\, d\lambda + B_i(\lambda, \mu)\, d\mu$ (III.35)

siendo $A_i X_i$ $(B_i X_i)$ el campo vectorial tangente a la curva $\lambda \longrightarrow \sigma(\lambda, \mu)$; $(\mu \longrightarrow \sigma(\lambda, \mu))$. Por tanto

$$A_u = 0, \qquad B_a = 0 \tag{III.36}$$

Sustituyendo (III.35) en (III.34) y diferenciando obtenemos:

$$d\sigma^*(\omega_i) = 1/2 f_{jki}(\sigma(\lambda, \mu))\, \sigma^*(\omega_j) \wedge \sigma^*(\omega_k) \tag{III.37}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} A_i \, d\mu \wedge d\lambda + \frac{\partial}{\partial \lambda} B_i \, d\lambda \wedge d\mu =$$

$$= 1/2 f_{jki}(\sigma(\lambda, \mu))\, (A_j \, d\lambda + B_j \, d\mu) \wedge (A_k \, d\lambda + B_k \, d\mu)$$

esto es

$$\frac{\partial}{\partial \mu} A_i - \frac{\partial}{\partial \lambda} B_i = f_{jki}(\sigma(\lambda, \mu))\, B_j A_k \tag{III.38}$$

en particular

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} B_u = f_{\iota a u}(\sigma(\lambda, \mu))\, B_v A_a \tag{III.39}$$

Para que la métrica sea casi-fibrada, basta probar que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} B_u B_u = 0$$

ya que la longitud de un vector horizontal. está dada por:

$$B_u X_u \cdot B_u X_u = B_u B_u$$

De (III.39) se deduce

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} B_u B_u = 2 B_u \frac{\partial}{\partial \lambda} B_u = 2 B_u f_{ua} B_v A_a = - 2 B_u f_{avu} B_v A_a$$

Pero $B_u f_{avu} B_v = 0$ si $f_{avu} + f_{auv} = 0$ para cada a. Por tanto, la métrica es casi-fibrada.

§ 3. — *Métrica casi-haz. Propiedades*

Sea $B(M)$ el conjunto de campos vectoriales formado por la suma de todos los campos tangentes a las variedades integrales de la foliación y por los campos de vectores básicos.

Puesto que $\phi_{U*} X_a = 0$ y $\phi_{U*} (X_u)_z = \phi_{U*} (X_u)_{z'}$, siendo X_u básico; $B(M)$ es el conjunto de campos vectoriales tales que su proyección mediante ϕ_{U*} se conserva. Asimismo, $B(M)$ es el conjunto de transformaciones infinitesimales de foliación sobre M. (Vid. prop. 2.1)

Tenemos así definido un homomorfismo

$$\Psi_{U*} : B(M) \longrightarrow T(B_U)$$

en cada U, siendo el núcleo de este homomorfismo en cada punto el espacio tangente a la hoja.

PROPOSICIÓN 3.4. — *El conjunto de transformaciones infinitesimales de foliación, $B(M)$, es una subálgebra del álgebra $T(M)$ y la subálgebra F de los campos vectoriales tangentes a las hojas es un ideal de $B(M)$.*

DEMOSTRACIÓN. — $B(M)$ es una subálgebra de los campos de vectores si:

1). — $X, X' \varepsilon F \Longrightarrow [X, X'] \varepsilon F$.

2). — $X \varepsilon F$, Y básico $\Longrightarrow [X, Y] \varepsilon F$.

3). — Y, Y' básicos $\Longrightarrow [Y, Y'] = X + Z$, donde $X \varepsilon F$ y Z es básico.

1) Se sigue de forma inmediata por ser F foliación.

2) Se verifica siendo Y una transformación infinitesimal de foliación (Vid. prop. 2.1).

3) $Y = \xi^u X_u, \quad Y' = \eta^v X_v$

$$\begin{aligned}[Y, Y'] &= [\xi^u X_u, \eta^v X_v] = \xi^u X_u (\eta^v X_v) - \eta^v X_v (\xi^u X_u) = \\ &= \xi^u (X_u \eta^v) X_v - \eta^v (X_v \xi^u) X_u + \xi^u \eta^v [X_v \ X_u,] \qquad \text{(III.40)}\end{aligned}$$

Los dos primeros campos de (III.40) son básicos, ya que

$$X_a \eta^v = X_b \xi^u = 0$$

Teniendo en cuenta (II.1)

$$\begin{aligned}&[X_v, X_u] = [\partial_v - \Gamma^a_v \partial_a, \ \partial_u - \Gamma^b_u \partial_b] = \\ &= (\partial_v - \Gamma^a_v \partial_a)(\partial_u - \Gamma^b_u \partial_b) - (\partial_u - \Gamma^b_u \partial_b)(\partial_v - \Gamma^a_v \partial_a) = \\ &= \partial_u \partial_v - \partial_v (\Gamma^b_u \partial_b) - \Gamma^a_v \partial_a \partial_u + \Gamma^a_v \partial_a (\Gamma^b_u \partial_b) - \\ &- \partial_u \partial_v + \partial_u (\Gamma^a_v \partial_a) + \Gamma^b_u \partial_b \partial_v - \Gamma^b_u \partial_b (\Gamma^a_v \partial_a) = \\ &= -(\partial_v \Gamma^b_u) \partial_b - \Gamma^b_u \partial_v \partial_b - \Gamma^a_v \partial_a \partial_u + \Gamma^a_v (\partial_a \Gamma^b_u) \partial_b + \\ &+ \Gamma^a_v \Gamma^b_u \partial_a \partial_b + (\partial_u \Gamma^a_v) \partial_a + \Gamma^a_v \partial_u \partial_a + \Gamma^b_u \partial_b \partial_v - \\ &- \Gamma^b_u (\partial_b \Gamma^a_v) \partial_a - \Gamma^b_u \Gamma^a_v \partial_b \partial_a = (\Gamma^a_v \partial_a \Gamma^b_u - \partial_v \Gamma^b_u) \partial_b + \\ &+ (\partial_u \Gamma^a_v - \Gamma^b_u \partial_b \Gamma^a_v) \partial_a + \Gamma^b_u [\partial_b, \partial_v] + \Gamma^a_v [\partial_u, \partial_a] + \\ &+ \Gamma^a_v \Gamma^b_u [\partial_a \ \partial_b] = \alpha^b \partial_b + \alpha^a \partial_a \qquad \text{(III.41)}\end{aligned}$$

donde

$$\alpha^b = \Gamma^a_v \partial_a \Gamma^b_u - \partial_v \Gamma^b_u \quad \text{y} \quad \alpha^a = \partial_u \Gamma^a_v - \Gamma^b_u \partial_b \Gamma^a_v \qquad \text{(III.42)}$$

por tanto, $[X_v, X_u] \varepsilon F$, lo cual demuestra 3).

Es inmediato que F es un ideal de $B(M)$.

PROPOSICIÓN 3.5. — *Supongamos M metrizable con la métrica $ds^2 = \omega_i \omega_i$. Si existen q campos X_u básicos independientes ortonormales, entonces la métrica es casi-fibrada.*

DEMOSTRACIÓN. — Si los campos X_u son básicos y ortonormales, son transformaciones infinitesimales de foliación (Prop. 2.1) y las formas duales ω_u son invariantes (Prop. 3.1), por tanto la métrica es casi-fibrada.

Siendo ω_i una base de formas diferenciales ortonormales duales de los campos X_j, con $d\,\omega_i = \frac{1}{2} f_{jki}\, \omega_j \wedge \omega_k$, f_{avu} hemisimétrica para cada a y $[F, H] \subset H$, HERMANN (9) demostró que sobre la variedad foliada M con métrica $ds^2 = \omega_i\, \omega_i$ entonces ésta es casi-haz. La proposición siguiente nos conduce a los mismos resultados, utilizando elementos diferentes.

PROPOSICIÓN 3.6. — *Si sobre la variedad foliada M tenemos definida una métrica $ds^2 = \omega_i\, \omega_i$, si los campos de vectores X_u son básicos, si las matrices f_{uab} son hemi-simétricas para cada u y si las hojas de la foliación son conexas, entonces la métrica es casi-haz.*

DEMOSTRACIÓN. — Según la proposición (3.5) la métrica sobre M es casi-fibrada. Veamos que las hojas de la foliación son subespacios totalmente geodésicos.

Supongamos X_j campos de vectores duales de las formas ortonormales ω_i, $[X_i, X_j] = f_{ijk} X_k$ donde f_{ijk} son funciones sobre M, entonces

$$d\,\omega_k = 1/2\ f_{ijk}\, \omega_i \wedge \omega_j. \tag{III.43}$$

Siendo ω_{ij} las correspondientes 1-formas de la conexión asociada

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0 \tag{III.44}$$

$$\omega_{ij} = h_{ijk}\, \omega_k \tag{III.45}$$

Se deduce

$$h_{ijk} = 1/2\ (f_{kji} - f_{jik} + f_{ikj}). \tag{III.46}$$

Si $\sigma : [0,1] \longrightarrow L$ es una curva vertical y $X : t \longrightarrow X_{\sigma(t)}$ es un campo vectorial a lo largo de σ, se cumple

$$\omega_i (\nabla X(t)) = \frac{d}{dt}\, \omega_i (X(t)) - h_{ijk} (\sigma'(t)\, \omega_k (\sigma'(t))\, \omega_j (X(t))$$

$$\omega_u (\nabla X) = - h_{uab} (\sigma'(t))\, \omega_b (\sigma'(t))\, \omega_a (X(t))$$

$$h_{uab} = 1/2\, (f_{bau} - f_{aub} + f_{uba}) \tag{III.47}$$

$f_{bau} = 0$ por ser la distribución iuvolutiva y $f_{uba} - f_{uab} = 0$ por hipótesis. Por tanto $h_{uab} = 0$ lo cual implica $\omega_u (\nabla X) = 0$, por tanto las hojas de la foliación son subvariedades totalmente geodésicas, siendo la métrica casi-haz.

§ 4. — *Foliaciones métricas cerradas*

DEFINICIÓN 3.1 : FOLIACIÓN MÉTRICA CERRADA. — *La foliación F es una foliación métrica cerrada si la métrica es casi-fibrada y si las hojas son subvariedades cerradas.*

En una foliación métrica cerrada y completa, puesto que el límite de toda sucesión de puntos sobre una hoja L pertenece a la hoja, la distancia entre hojas se conserva globalmente.

Para cada subconjunto abierto de M/F tenemos definida una métrica inducida a partir de la casi-fibrada en M. Para tener asegurada una única métrica en M/F es necesario que la foliación sea métrica cerrada completa.

Sabemos que una foliación F sobre M es regular sí y sólo si existe una aplicación de descomposición global de M en otra variedad B. Puesto que la traslación de vectores horizontales a lo largo de curvas cerradas verticales es la identidad para todos los caminos, el grupo de holonomia de las foliaciones regulares es la identidad.

HERMANN (10) probó que la foliación F es regular si las hojas de la foliación son cerradas, la métrica casi-fibrada y completa y el grupo de holonomia la identidad.

COROLARIO 3.4. — *Si sobre la variedad M tenemos definida una foliación métrica cerrada y completa, si las hojas de la foliación son simplemente conexas, entonces la foliación es regular.*

DEMOSTRACIÓN. — Si las hojas son simplemente conexas cualquier camino cerrado sobre una hoja es homótopo a cero. Puesto que el grupo de holonomia de una hoja, como se sabe, se obtiene mediante una representación del primer grupo de homotopia, se sigue que $G(L)$ es la identidad. Como las hojas son cerradas y la métrica casi-fibrada podemos aplicar el teorema de HERMANN (10) y la foliación por tanto es regular.

CAPÍTULO IV

FORMAS CASI-BASE

§ 1. — *Relación entre operadores diferenciales*

Para una (s, Q)-forma $\alpha = \alpha_{u_1 \dots u_s} \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s}$ se tiene

$$d\alpha = d\alpha_{u_1 \dots u_s} \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} = \alpha_{u_1 \dots u_s, a}\, dx^a \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} +$$

$$+ \alpha_{u_1 \dots u_s, v}\, \theta^v \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} = \alpha_{u_1 \dots u_s, a}\, \theta^a - \Gamma^a_v \theta^v) \wedge \theta^{u_1} \wedge$$

$$\wedge \dots \wedge \theta^{u_s} + \alpha_{u_1 \dots u_s, v}\, \theta^v \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} =$$

$$= \theta^a \alpha_{u_1 \dots u_s, a} \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} - \Gamma^a_v \theta^v \alpha_{u_1 \dots u_s, a} \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} +$$

$$+ \theta^u \alpha_{u_1 \dots u_s, u} \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} = (\partial - \partial' + \partial'')\,\alpha \qquad \text{(IV.1)}$$

donde

$$\partial\alpha = \theta^a \wedge \alpha_{u_1 \dots u_s, a} \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} \qquad \text{(IV.2)}$$

$$-\partial'\alpha = -\Gamma^a_v \theta^v \wedge \alpha_{u_1 \dots u_s, a} \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} \qquad \text{(IV.3)}$$

$$\partial''\alpha = \theta^v \wedge \alpha_{u_1 \dots u_s, v} \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} \qquad \text{(IV.4)}$$

Por otra parte de (II.20) observamos que son nulos los términos del tipo $(r + 2,\ s - 1)$ y $(r - 1,\ s + 2)$ ya que en una variedad foliada $\theta^u = dy^u$. Por tanto, resulta

$$d\alpha = \alpha_{u_1 \dots u_s, a} \theta^a \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} +$$

$$+ (\alpha_{u_1 \dots u_s, v} - \Gamma^a_v \alpha_{u_1 \dots u_s, a})\, \theta^v \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} = d'\alpha + d''\alpha. \qquad \text{(IV.5)}$$

donde

$$d'\alpha = \alpha_{u_1 \dots u_s, a} \theta^a \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} \qquad \text{(IV.6)}$$

$$d''\alpha = (\alpha_{u_1 \dots u_s, v} - \Gamma^a_v \alpha_{u_1 \dots u_s, a})\, \theta^v \wedge \theta^{u_1} \wedge \dots \wedge \theta^{u_s} \qquad \text{(IV.7)}$$

De (II.23) se sigue

$$\pi_{1,0}\, d = d' \quad \text{y} \quad \pi_{0,1}\, d = d'' \qquad \text{(IV.8)}$$

Comparando (IV.1) y (IV.5) se deduce

$$d' = \partial \quad \text{y} \quad d'' = \partial'' - \partial' \qquad \text{(IV.9)}$$

§ 2. — *Hojas holonómicas*

Para una variedad foliada M, la referencia llana del espacio cotangente es tal que

$$\theta^{i_r} = dy^{i_r}$$

y por tanto:

$$d\,\theta^{i_r} = d\,dy^{i_r} = 0$$

Consideremos la forma diferencial general α de grado $t = r + s$.

$$\alpha = \alpha_{a_1 \dots a_r,\, u_1 \dots u_s} \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_r} \wedge dy^{u_1} \wedge \dots \wedge dy^{u_s}$$

En la expresión de $d\,\alpha$ sólo aparecen términos de los tipos $(r + 1,\ s)$, $(r,\ s + 1)$ y $(r - 1,\ s + 2)$, ya que los del tipo $(r + 2,\ s - 1)$ son nulos.

De (II.20) obtenemos

$$\begin{aligned} d\,\alpha = {} & \alpha_{a_1 \dots a_r,\, u_1 \dots u_s,\, a}\, dx^a \wedge \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_r} \wedge dy^{u_1} \wedge \dots \wedge dy^{u_s} + \\ & + \alpha_{a_1 \dots u_s,\, u}\, dy^u \wedge \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge dy^{u_s} + \alpha_{a_1 \dots u_s} \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge d\,\theta^{a_b} \wedge \dots \wedge \\ & \wedge \theta^{a_r} \wedge dy^{u_1} \wedge \dots \wedge dy^{u_s}. \end{aligned}$$

Sustituyendo dx^a y $d\,\theta^{a_b}$ por sus expresiones y agrupando términos se encuentra finalmente

$$\begin{aligned} d\,\alpha = {} & \partial\, \alpha_{a_1 \dots a_r u_1 \dots u_s} \wedge \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_r} \wedge dy^{u_1} \wedge \dots \wedge dy^{u_s} + \\ & + (\P\, \alpha_{a_1 \dots u_s} - \sum_{b=1}^{r} \alpha_{a_1 \dots a \dots a_r,\, u_1 \dots u_s} \theta^a_{a_b}) \wedge \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \theta^{a_r} \wedge \\ & \wedge dy^{u_1} \wedge \dots \wedge dy^{u_s} + \sum_{v=1}^{s} (-1)^{v-1} \alpha_{a_1 \dots a \dots a_r,\, u_1 \dots u_s} \theta^{a_1} \wedge \dots \wedge \\ & \wedge \P\, \Gamma^a \wedge \dots \wedge \theta^{a_r} \wedge dy^{u_1} \wedge \dots \wedge dy^{u_s}. \end{aligned} \tag{IV.10}$$

donde

$$\P = d - \partial = \partial'' - \partial' \tag{IV.11}$$

$\P\, \Gamma^a = \Omega^a$ es una $(2, Q)$-forma, puesto que Γ^a es una $(1, Q)$-forma y $\partial'' - \partial'$ es del tipo $(r,\ s + 1)$.

En la base de las $(2, Q)$-formas Ω^a se puede expresar

$$\Omega^a = 1/2\, R^v_{vu}\, \theta^v \wedge \theta^u \tag{IV.12}$$

donde

$$R^a_{vu} = \partial_v \Gamma^a_u - \partial_u \Gamma^a_v + (\partial_b \Gamma^a_v) \Gamma^b_u - (\partial_b \Gamma^a_u) \Gamma^b_v \qquad \text{(IV.13)}$$

DEFINICIÓN 4.1 : HOJAS HOLONÓMICAS. — *Las hojas de una variedad foliada M son holonómicas sí y sólo si la distribución H es completamente integrable.*

PROPOSICIÓN 4.1. — *Las hojas de una variedad foliada M son holonómicas sí y sólo si $\Omega^a = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. —

$$\Omega^a = \P\, \Gamma^a = d\,\Gamma^a - \partial\,\Gamma^a = d\,\theta^a - \theta^b \wedge (\partial_b \Gamma^a_u)\, \theta^u =$$

$$= d\,\theta^a - \theta^b \wedge \theta^a_b \Longrightarrow d\,\theta^a = \theta^b \wedge \theta^a_b + \Omega^a \qquad \text{(IV.14)}$$

siendo θ^a_b una $(1, Q)$-forma.

$$\text{Si} \quad \Omega^a = 0 \iff (d - \partial)\, \Gamma^a = 0 \iff d\,\Gamma^a = \partial\,\Gamma^a \qquad \text{(IV.15)}$$

En términos de los coeficientes, la condición necesaria y suficiente para que las hojas sean holonómicas es, pues, $R^a_{vu} = 0$.

Como $d'' = d - \partial$, las hojas son holonómicas sí y sólo si

$$d''\, \Gamma^a = 0 \qquad \text{(IV.16)}$$

§ 3. — *Formas casi-base. Propiedades*

DEFINICIÓN 4.2 : FORMA CASI-BASE. — *Una (s, Q)-forma diferencial*

$$\alpha = \alpha_{u_1 \dots u_s}\, dy^{u_1} \wedge \dots \wedge dy^{u_s}$$

se dice forma casi-base si, localmente

$$\alpha_{u_1 \dots u_s, a} = 0 \qquad \text{(IV.17)}$$

COROLARIO 4.1. — *Una (s, Q)-forma α es casi-base sí y sólo si $d'\alpha = 0$.*

La demostración es inmediata.

COROLARIO 4.2. — *Si una (s, Q)-forma α es casi-base sobre una variedad foliada M, entonces α es localmente invariante sobre las hojas de la foliación.*

DEMOSTRACIÓN. — Si α es casi-base, tiene la representación local

$$\alpha = \alpha_{u_1 \dots u_s}(y)\, dy^{u_1} \wedge \dots \wedge dy^{u_s}$$

puesto que las hojas son las subvariedades integrales que satisfacen

$$y^1 = c^1\,; \quad y^2 = c^2\,; \dots ; \; y^q = c^q$$

(c^u constantes), su valor es constante sobre cada placa. El recíproco puede no ser cierto.

Definamos un operador laplaciana que aplique las formas casi-base en sí mismas. Supongamos sobre M métrica casi-fibrada, resultando así bien definidos los operadores, puesto que el factor de transformación de componentes contravariantes a covariantes es también un coeficiente de una forma casi-base, a saber $g_{uv}(y)$.

La transformación adjunta de una forma casi-base está dada por

$$*''\,\alpha_{u_1 \dots u_{q-s}} = \sum_{v_1 < \dots < v_s} \delta^{1 \dots q}_{v_1 \dots v_s u_1 \dots u_{q-s}} \cdot \\ \cdot (Det\,(g_{uv}))^{1/2} g^{v_1 w_1} \dots g^{v_s w_s} \alpha_{w_1 \dots w_s} \tag{IV.18}$$

donde δ es el tensor de KRONECKER.

De la misma forma que $d : T_k(M) \longrightarrow T_{k+1}(M)$ y d restringida a las formas casi-base es d'',

$$\delta : T_{k+1}(M) \longrightarrow T_k(M)$$

es el operador que restringido a las formas casi-base define el operador δ'' dual de d'', tal que

$$\delta''\,\alpha = (-1)^{qs+q+1} *''\, d''\, *''\, \alpha \tag{IV.19}$$

Sobre las variedades foliadas admitiendo métrica casi-fibrada está bien definido un operador Δ'' que aplica las formas casi-base en sí mismas tal que

$$\Delta'' = d''\,\delta'' + \delta''\,d''$$

§ 4. — *Orientabilidad. Propiedades*

DEFINICIÓN 4.3 : VARIEDAD ORIENTABTE. — *Una variedad diferenciabte M se dice orientable si existe un atlas $(U_i,\ \phi_i)$ tal que todas* *las transformaciones* $\phi_j \cdot \phi_i^{-1}$ *tengan el jacobiano de signo constante en los correspondientes abiertos* $U_i \cap U_j$. *En caso contrario se dice variedad no orientable.*

Puesto que sobre una variedad diferenciable M en la que está definida una foliación F, los cambios de coordenadas en los correspondientes entornos llanos son de la forma:

$$x^a = x^a(x'^b, y'^v) \,; \qquad y^u = y^u(y'^v)$$

por tanto, la definición (4.3) es equivalente a que el jacobiano

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^a}{\partial x'^b} & \dfrac{\partial x^a}{\partial y'^v} \\ \\ \dfrac{\partial y^u}{\partial x'^b} & \dfrac{\partial y^u}{\partial y'^v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^a}{\partial x'^b} & \dfrac{\partial x^a}{\partial y'^v} \\ \\ 0 & \dfrac{\partial y^u}{\partial y'^v} \end{vmatrix} \tag{IV.20}$$

tenga signo constante en las transformaciones de coordenadas.

Sea M la variedad foliada por hojas L. En el punto x, consideremos las orientaciones θ_x de L_x en un entorno distinguido U de x. Mediante la aplicación distinguida $\phi : U \longrightarrow R^q$, las orientaciones θ_x son las inducidas.

Sea el conjunto $E = U\,(x, \theta_x)$, donde θ_x, como hemos dicho, son las orientaciones de L_x. La aplicación $\pi : E \longrightarrow M$ es tal que $\pi\,(x, \theta_x) \longrightarrow x$, por tanto

$$\pi^{-1}(x) = (x, -\theta_x) \quad \text{ó} \quad \pi^{-1}(x) = (x, \theta_x) \tag{IV.21}$$

El grupo $Z_2 = \{e, \tau\}$ opera sobre E de la siguiente manera:

$$\tau\,(x, \theta_x) = (x, -\theta_x) \tag{IV.22}$$

y localmente E es un revestimiento de M formado por dos hojas.

Si U es un abierto distinguido conexo, ϕ una aplicación distinguida, definimos θ_ϕ de la manera siguiente:

Sea la sección $\sigma : U \longrightarrow E_U$; $\sigma(x) = (x, \theta_{\phi,x})$.

Sea ψ otra aplicación distinguida del mismo abierto definiendo θ_ψ y una sección σ' tal que $\sigma'(x) = (x, \theta_{\psi,x})$.

Siendo U conexo, existen dos posibilidades de relacionar θ_ϕ y θ_ψ.

$$\theta_\phi = \theta_\psi \Longleftrightarrow \sigma' = \sigma \quad \text{ó} \quad \theta_\phi = -\theta_\psi \Longleftrightarrow \sigma' = \tau\sigma \tag{IV.23}$$

Una base de abiertos de una topología de E está formada por los conjuntos $\sigma_\phi(U)$, siendo E con esta topología un revestimiento de M, ya que cada $x \varepsilon M$ posee un entorno U tal que la imagen recíproca mediante π está formada por dos conjuntos $\sigma_\phi(U)$ y $\tau\sigma_\phi(U)$, ambos disjuntos y abiertos, siendo la restricción de la proyección un homeomofismo. Este revestimiento se dice de orientación u orientabilidad para la foliación.

DEFINICIÓN 4.4: FOLIACIÓN ORIENTABLE. — *Una foliación F se dice orientable si el revestimiento E es trivial.*

La estructura foliada F se levanta a E de una manera natural y la nueva variedad foliada es siempre orientable.

En efecto, si construimos el revestimiento E' de E sus puntos son de la forma $((x, \theta_x), \theta'_x)$ y es siempre posible definir una sección global

$$\sigma' : E \longrightarrow E' \quad \text{con} \quad \sigma'(x, \theta_x) = ((x, \theta_x), \theta_x) \qquad \text{(IV.24)}$$

lo cual implica que E' es un espacio fibrado trivial.

PROPOSICIÓN 4.2. — *Sea M una variedad diferenciable con una estructura casi-producto (P, Q) integrable; entonces*

1). — *Si las foliaciones P y Q son orientables, entonces la variedad M es orientable.*

2). — *Si la variedad M y la foliación F, (Q) son orientables, entonces la foliación Q, (P), es orientable.*

DEMOSTRACIÓN. — En el caso 1) para probar que el revestimiento de orientabilidad para la variedad M es trivial, basta tomar en cada punto como orientación del espacio tangente a la variedad el producto de las orientaciones de las foliaciones P y Q.

2). — Es inmediato.

COROLARIO 4.3. — *Una variedad M se dice orientable si el revestimiento de orientabilidad E de su espacio tangente es un espacio fibrado trivial.*

El corolario se sigue de manera inmediata de la definición 4.4.

Se prueba, (29), que los grupos de cohomología respecto a d'' de las formas casi-base sobre una variedad foliada orientable con métrica casi-fibrada son finitos y que Dim $H''^s =$ Dim H''^{q-s}, siendo H''^s el s-avo grupo de cohomología de la variedad.

Capítulo V

HOLONOMIA DE LAS FOLIACIONES CON METRICA CASI-FIBRADA

§ 1. — *Holonomía de una variedad de* Riemann *fibrada*

Definición 5.1: Variedad de Riemann fibrada. — *Una* $(p+q)$*-variedad de* Riemann M *se dice de* Riemann *fibrada si:*

1). *M tiene estructura de espacio fibrado con base B, fibra L y grupo G, siendo B y L variedades p y q dimensionales respectivamente.*

2). *Existe un campo de p-planos H ortogonal al espacio tangente a la fibra L en cada punto.*

3). *Sea α^* una curva arbitraria diferenciable uniendo y e y'; y, $y' \varepsilon B$; entonces α^* es la proyección de una curva integral de H, uniendo $z \varepsilon L_y$ con $z' \varepsilon L_{y'}$ siendo z un punto arbitrario de $L_{y'}$* (*).

Proposición 5.1. — *El grupo de holonomia de un espacio de* Riemann *fibrado es la identidad sí y sólo si las fibras son holonómicas.*

Demostración. — Si las hojas son holonómicas, el grupo de holonomía es la identidad, véase Muto (19).

Si el grupo de holonomía de cada fibra es la identidad, todos los levantamientos de curvas cerradas contenidas en el espacio base son asimismo curvas cerradas. Definamos en M un sistema de coordenadas $(x^1, ..., x^p, y^1, ..., y^q)$, tal que tengan iguales coordenadas $(y^1, ..., y^q)$ en las fibras todos aquellos puntos que puedan unirse mediante una curva ortogonal arbitraria contenida en un abierto U de M. Para todo $z \varepsilon U$ las subvariedades de U dadas por $y^1 = c^1, ..., y^q = c^q$ son las placas de una foliación. Por tanto H es completamente integrable.

(*) La definición 5.1 cumple todas las condiciones precisas que se necesitan para nuestro estudio.

§ 2. — *Holonomía. Construcción y propiedades*

Sea L una hoja de la foliación F y $\pi_1(L, z)$ el grupo de Poincaré de L con punto base $z \varepsilon L$. La holonomia de L es una representación

$$\phi : \pi_1(L, z) \longrightarrow G \tag{V.1}$$

donde G es el grupo de gérmenes de difeomorfismos locales de R^q, dejando el origen fijo. Esta representación está definida salvo un automorfismo interior y la imagen mediante ϕ es el grupo de holonomia de la hoja L. Una construcción del grupo de holonomía de una hoja, siguiendo a Haefliger y Sackstedder es la siguiente:

Sea la hoja L una subvariedad embebida en M mediante la aplicación j. Construyamos sobre L un espacio fibrado con fibra R^q y sea W un entorno de la cero-sección $\gamma : L \longrightarrow E$. Si la inmersión $\iota : W \longrightarrow M$ verifica $\iota \cdot \gamma = j$, mediante la misma, las imágenes de las fibras de E cortan a las hojas transversalmente. Sean x e y puntos de L, H_x, H_y las fibras sobre x e y respectivamente. Sea $g : [0,1] \longrightarrow L$ una curva tal que $g(0) = x$, $g(1) = y$. Construyamos un difeomorfismo de un entorno del origen en H_x sobre un entorno del origen en H_y. Para ello identifiquemos la cero-sección γ en E con L. La curva g la podemos levantar en una curva $g^* : [0,1] \longrightarrow E$ con $g^*(0) = x^* \varepsilon H_x$ y $g^*(1) = y^* \varepsilon H_y$. La correspondencia entre fibras es el difeomorfismo deseado para puntos suficientemente próximos al origen sobre las fibras. Así el conjunto de gérmenes de aplicaciones obtenidas de esta forma es $G(x, y)$. Si $x \equiv y$, $G(x, x) = G(x)$ coincide con la representación del primer grupo fundamental con punto base en x, siendo el grupo de holonomia de la hoja L.

Enunciamos sin demostración, por ser ésta bien conocida, el siguiente

Lema 5.1. — *A cada clase de homotopia en $\pi_1(L, z)$ se asocia el mismo y único germen de difeomorfismos locales.*

Así, pues, a cada difeomorfismo $f : R^q \longrightarrow R^q$ podemos hacer corresponder un automorfismo $f_* : R^q \longrightarrow R^q$ obtenido diferenciando la aplicación f.

Elijamos un sistema de coordenadas sobre M. El automorfismo f_* se expresa mediante una $q \times q$ matriz, estando definido el grupo de holonomia diferenciando el grupo de las matrices correspondientes a los difeomorfismos de R^q para todos los caminos de $\pi_1(L, z)$.

Representemos por $A(z)$ el grupo de matrices obtenido de esta forma. La correspondencia entre clases de homotopia de curvas con punto base y los elementos de $A(z)$ está unívocamente definida de la manera siguiente:

Si H'_x, H'_y y $G'(x)$ son los correspondientes a H_x, H_y y $G(x)$, existen difeomorfismos locales $f: H_x \longrightarrow H'_x$ y $g: H'_y \longrightarrow H_y$ de forma que para $h \varepsilon G(x)$, $h' \varepsilon G'(x)$ es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} H_x \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & H_y \\ H'_x \arrow[r, "h'"] & H'_y \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} \tag{V.2}$$

donde $g = f^{-1}$ si $x \equiv y$.

Diferenciando los difeomorfismos f, g, h, h' obtenemos las $q \times q$ matrices $f_* = S$, $g_* = T$, $h_* = M$, $h'_* = M'$. Así de (V.2) se sigue $M = SM'T$. Si $x \equiv y$ entonces $M = SM'S^{-1}$. (V.3)

El grupo $A(z)$ define así una conexión sobre el haz transversal al embebimiento j.

§ 3. — *Primer grupo de cohomología singular de un espacio M con coeficientes en un grupo G discreto — no necesariamente abeliano — y de su revestimiento universal*

Sea G un grupo no necesariamente abeliano con la topología discreta. Es posible construir el primer grupo de cohomología de un espacio M con coeficientes en G, $(H^1(M, G))$, cumpliendo:

$$H^1(M, G) \equiv \overline{\text{Hom}}\,(\pi_1(M, y_0), G) \tag{V.4}$$

donde $\pi_1(M, y_0)$, como se sabe, es el primer grupo de homotopía de M con punto base y_0 y $\overline{\text{Hom}}\,(\pi_1(M, y_0), G)$ es el conjunto de clases de equivalencia de homomorfismos de $\pi_1(\pi, y_0)$ en G salvo un automorfismo interior. Omitimos la construcción de $H^1(M, G)$ ya que es semejante al caso en que G es abeliano así como la demostración de (V.4).

PROPOSICIÓN 5.2. — *Sea M una variedad diferenciable, E un revestimiento A-principal de M conexo por arcos, A grupo finito. Si $H^1(M, R) \neq 0$ también $H^1(E, R) \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. — Sea E el revestimiento A-principal de M. Está definida así una sucesión exacta de grupos en general no abelianos

$$e \longrightarrow \pi_1(E, z_0) \longrightarrow \pi_1(M, y_0) \longrightarrow A \longrightarrow e \qquad (V.5)$$

Un camino de $\pi_1(M, y_0)$ da lugar a un levantamiento con origen z_0 y extremo $z'_0 = z_0 \cdot g$, $g \varepsilon A$.

Consideremos las cohomologías singulares de grado uno de E y A; $H^1(M, G) = \overline{\mathrm{Hom}}(\pi_1(M, y_0), G) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M, y_0), G)$ si G es abeliano, pues sólo posee un automorfismo interior: la identidad.

Mediante el functor Hom obtenemos a partir de la sucesión exacta (V.5) la sucesión semi-exacta

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(E, z_0), G) \longleftarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M, y_0), G) \longleftarrow H^1(A, G) \longleftarrow 0 \qquad (V.6)$$

Si identificamos G y R en (V.6), obtenemos

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(E, z_0), R) \longleftarrow \mathrm{Hom}(\pi_1(M, y_0), R), \longleftarrow H^1(A, R) \longleftarrow 0 \qquad (V.7)$$

ó equivalentemente

$$H^1(E, R) \longleftarrow H^1(M, R) \longleftarrow H^1(A, R) \longleftarrow 0 \qquad (V.8)$$

Siendo A finito, los homomorfismos $\phi : A \longrightarrow R$ forman un subgrupo finito de R. No existiendo ninguno distinto de $\{0\}$ se sigue $H^1(A, R) = 0$, así

$$H^1(E, R) \longleftarrow H^1(M, R) \longleftarrow 0 \qquad (V.9)$$

es decir

$$H^1(E, R) \supset H^1(M, R) \quad \text{y si} \quad H^1(M, R) \neq 0,$$

entonces $$H^1(E, R) \neq 0$$

Si la variedad M es no orientada, el revestimiento A-principal E formado por dos hojas es variedad orientada, $A = Z_2$ y en este caso el primer grupo de cohomología singular del revestimiento contiene al de la variedad.

Si $\phi \in H^1(M, G)$ a cada cociclo corresponde unívocamente una clase de homomorfismos α.

$$\text{Si} \quad H(\phi) = \operatorname{Im} \alpha : (\pi_1(M, y_0) \longrightarrow G), \quad H(\phi) \subset G \qquad \text{(V.10)}$$

es un grupo y está definido salvo un automorfismo interior. $H(\phi)$ se llama el grupo de holonomía de la clase ϕ.

Si $\quad \phi \neq 0 \quad$ entonces $\quad H(\phi) \neq 0$ y asimismo $\quad \phi = 0$ implica $\quad H(\phi) = 0.$

§ 4. — *Holonomia de las foliaciones métricas cerradas*

PROPOSICIÓN 5.3. — *Sea F una foliación métrica cerrada de codimensión q sobre M, entonces el grupo de holonomía $G(L)$ de cada hoja L es finito.*

Para la demostración, véase (30).

PROPOSICIÓN 5.4. — *Sea F una foliación de codimensión uno sobre la variedad M admitiendo métrica casi-fibrada. Los grupos de holonomía de las hojas son finitos y a lo sumo de orden dos si:*

1). — *Las hojas de la foliación son cerradas.*

2). — *La variedad M es compacta.*

LEMA 5.2. — *Sea G el grupo de gérmenes de difeomorfismos en el origen de R en R. Todo subgrupo $H \subset G$, finito, está formado o por el elemento unidad, o por el unidad y el simétrico.*

La demostración es bien conocida.

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN. — El apartado 1) se sigue de la proposición 5.3 de forma inmediata.

2). — En este caso la esfera de isometrías locales consta a lo sumo de dos elementos, por tanto $G(L)$ es a lo sumo de orden dos.

COROLARIO 5.1. — *Siendo la foliación F sobre la variedad M de codimensión uno, la métrica casi-fibrada y las hojas de la foliación compactas, entonces el grupo de holonomía de cada hoja es a lo sumo de orden dos.*

Capítulo VI

GENERALIZACION A LAS VARIEDADES FOLIADAS DE ALGUNAS PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS DE RIEMANN FIBRADOS

§ 1. — *Correspondencia entre hojas*

Sea $z \varepsilon M$, $z = (x, y)$. El elemento de longitud de la variedad foliada M, como sabemos, está dado por

$$ds^2 = g_{ab}(x, y)\, dx^a\, dx^b + 2 g_{au}(x, y)\, dx^a\, dy^u + g_{uv}(x, y)\, dy^u\, dy^v$$

el cual es reducible a la forma (II.8). Suponemos $|g_{ab}| \neq 0$, puesto que así está bien determinado el elemento de longitud sobre la hoja L. La hoja pasando por el punto z la representaremos por $L(z)$.

La métrica dada en M induce una correspondencia entre hojas próximas, es decir, al punto (x^a, y^u) en la hoja $L(z)$ corresponde el punto $(x^a + dx^a, y^u + dy^u)$ en la hoja $L(z + dz)$ cuando el vector de componentes (dx^a, dy^u) es ortogonal a $L(z)$ en el punto z. Esto es (*)

$$g_{ub}\, dy^u dx'^b + g_{ab}\, dx^a\, dx'^b + g_{av}\, dx^a\, dy'^v + g_{uv}\, dy^u\, dy'^v = 0$$

Como $dy^u = dy'^v = 0$, obtenemos

$$dx^a (g_{ab}\, dx'^b + g_{av}\, dy'^v) = 0$$

así, por tanto

$$g_{ab}\, dx'^b + g_{av}\, dy'^v = 0$$

ó equivalentemente

$$dx'^b + \Gamma^b_u\, dy'^u = 0 \qquad \text{(VI.1)}$$

(*) La correspondencia entre hojas dentro de un abierto distinguido U ha de ser considerada entre placas dentro del mismo abierto.

§ 2. — *Hojas paralelas*

DEFINICIÓN 6.1 : HOJAS PARALELAS. — *Las hojas de una variedad de* RIEMANN *foliada M con métrica* (II.8) *se dice que son paralelas sí y sólo si* $G_{uv,a} = 0$.

PROPOSICIÓN 6.1. — *Las hojas L de la variedad foliada M son paralelas sí y sólo si*

$$g_{uv,c} + g_{bu,c}\,\Gamma^b_v + g_{bu}\,\Gamma^b_{v,c} = 0 \qquad \text{(VI.2)}$$

DEMOSTRACIÓN. —

$$G_{uv} = g_{uv} + g_{ab}\,\Gamma^a_u\,\Gamma^b_v = g_{uv} + g_{bu}\,\Gamma^b_v$$

$$G_{uv,c} = g_{uv,c} + g_{bu,c}\,\Gamma^b_v + g_{bu}\,\Gamma^b_{v,c}$$

Por tanto

$$g_{uv,c} + g_{bu,c}\,\Gamma^b_v + g_{bu}\,\Gamma^b_{v,c} = 0$$

sí y sólo si $G_{uv,c} = 0$.

Como la distancia entre un par de puntos correspondientes entre las hojas $L(z)$ y $L(z + dz)$ viene dada por la expresión $ds^2 = G_{uv}\,dy^u\,dy^v$, ésta es independiente de los puntos escogidos sobre las mismas si las hojas son paralelas.

§ 3. — *Hojas isométricas*

PROPOSICIÓN 6.2. — *Las hojas de una foliación métrica son subvariedades totalmente geodésicas sí y sólo si son isométricas.*

DEMOSTRACIÓN. — Sea $\sigma : [0,1] \longrightarrow L$ una curva vertical y $X : t \longrightarrow X(t) \in M_{\sigma(t)}$ un campo vectorial a lo largo de σ. Utilizando (III.22), cuya fórmula nos da la derivada covariante de un campo vectorial en función de los coeficientes de la conexión asociada a la métrica de RIEMANN, podemos escribir:

$$\omega^i(\nabla X(t)) = \frac{d}{dt}\,\omega^i(X(t)) - \Gamma^i_{jk}(\sigma'(t))\,\omega^k(\sigma'(t))\,\omega^j(X(t)) \qquad \text{(VI.3)}$$

donde $\sigma'(t)$ es un campo vectorial tangente a L, ω^i una base del espacio cotangente.

Si X también es vertical a lo largo de σ, entonces

$$\omega^u (X(t)) = \omega^w (\sigma'(t)) = 0 \qquad \text{(VI.4)}$$

Las hojas de la foliación son subespacios geodésicos sí y sólo si $\omega^u (\nabla X(t)) = 0$, pero

$$\omega^u (\nabla X(t)) = \frac{d}{dt}\, \omega^u (X(t)) - \Gamma^u_{ab} (\sigma'(t))\, \omega^b (\sigma'(t))\, \omega^a (X(t)) -$$

$$- \Gamma^u_{av} (\sigma'(t))\, \omega^a (\sigma'(t))\, \omega^v (X(t)) - \Gamma^u_{vw} (\sigma'(t))\, \omega^w (\sigma'(t))\, \omega^v (X(t)) \qquad \text{(VI.5)}$$

Probemos que $\Gamma^u_{ab} = 0$ sí y sólo si las hojas son isométricas.

$$\Gamma^u_{ab} = 1/2\,(g_{ac,b} + g_{bc,a} - g_{ab,c})\, g^{uc} + 1/2\,(g_{av,b} + g_{bv,a} - g_{ab,v})\, g^{uv} =$$

$$= 1/2\,(g_{ac,b} + g_{bc,a} - g_{ab,c})\,(g^{uc} + g^{uv}\, \Gamma^c_v) \qquad \text{(VI.6)}$$

donde g^{ij} son las componentes contravariantes del tensor métrico g^{ij}; como

$$g^{au} g_{ab} + g^{uv} g_{vb} = \delta^u_b = 0$$

se sigue

$$(g^{au} + g^{uv}\, \Gamma^a_v)\, g_{ab} = 0$$

Puesto que $|g_{ab}| \neq 0$, se verificará

$$g^{au} + g^{uv}\, \Gamma^a_v = 0 \qquad \text{(VI.7)}$$

por tanto, sustituyendo (VI.7) en (VI.6), deducimos $\Gamma^u_{ab} = 0$, que juntamente con (VI.4) implica $\omega^u (\nabla X(t)) = 0$.

COROLARIO 6.1. — *Si las hojas de una foliación métrica son isométricas y paralelas, entonces la métrica es casi-haz.*

CAPÍTULO VII

EJEMPLOS DE FOLIACIONES QUE ADMITEN METRICA CASI-FIBRADA Y FOLIACIONES DE LIE

§ 1. — *Espacios fibrados*

PROPOSICIÓN 7.1. — *Todo espacio fibrado paracompacto admite métrica casi-fibrada.*

DEMOSTRACIÓN. — Sea E un espacio fibrado con base M paracompacta y proyección π. $\{V_u\}$ una cubierta de abiertos de M de trivialidad local. Sea L la fibra tipo. Las formas casi-base sobre E son las inducidas mediante π de las formas de M, con

$$U_u \times L = U_v U_u \times V_v \tag{VII.1}$$

donde V_v es un entorno coordenado en L.

Si en U_u tomamos la métrica

$$d s_U^2 = g_{uv}(y)\, dy^u\, dy^v$$

y suponemos L metrizable con métrica

$$d s_L^2 = g_{ab}(x)\, dx^a\, dx^b$$

en el abierto $U_u \times V_v$ está bien definida de la forma

$$d s^2 = g_{ab}(x)\, \theta^a \theta^b + g_{uv}(y)\, dy^u\, dy^v \tag{VII.2}$$

Mediante una partición de la unidad en M obtenemos una métrica casi-fibrada sobre todo E.

§ 2. — *Grupo de isometrías actuando sobre una variedad de* RIEMANN

Sea M una variedad de RIEMANN sobre la que actúa un grupo de isometrías H, de forma que las órbitas son todas de la misma dimensión; estando definida así una foliación sobre M. $h \varepsilon H$, h suficientemente próximo a e, aplica cada curva ortogonal en otra también ortogonal con igual proyección y longitud, por tanto, la métrica es casi-fibrada (Prop. 3.1).

CASO PARTICULAR. — Sea G un grupo de LIE y consideremos las clases G/H, siendo H un subgrupo analítico de G. Está así definida una foliación sobre G. Todas las hojas son difeomorfas y están relacionadas mediante la acción de un elemento del grupo. H actúa entonces como un grupo de isometrías sobre G. Tomando una métrica invariante a la derecha sobre G obtenemos una métrica casi-fibrada, pudiendo no ser G un espacio fibrado sobre G/H (H abierto, en cuyo caso sobre G está definida una foliación).

El ejemplo más simple se obtiene tomando como G el 2-toro y como H el subgrupo de un parámetro determinado por una recta pasando por el origen y de pendiente irracional.

Otros ejemplos de variedades foliadas admitiendo métrica casi-fibrada pueden verse en (15) y (35).

§ 3. — *Foliaciones de* LIE

Sea G un grupo de LIE conexo de dimensión $n - p$. Sean $\pi_{p+1}, \ldots, \pi_n$ una base de 1-formas invariantes sobre G y supongamos $d\pi_u = 1/2\, c_{vwu}\, \pi_v \wedge \pi_w$, donde c_{vwu} son las constantes de estructura del álgebra de LIE de G.

PROPOSICIÓN 7.2. — *Sea M una variedad simplemente conexa con 1-formas diferenciales ω_u tales que $d\,\omega_u = 1/2\, c'_{vwu}\, \omega_u \wedge \omega_w$. Entonces existe una aplicación $\phi : M \longrightarrow G$ con $\phi^*(\pi_u) = \omega_u$. Esta aplicación es única salvo la multiplicación a la izquierda por un elemento de G.*

La demostración puede verse en (10).

DEFINICIÓN 7.1 : FOLIACIÓN PRIMITIVA DE LIE. — *Una foliación F de dimensión p sobre M se llama foliación primitiva de* LIE *con grupo de estructura G si existe una base de formas invariantes ω_u con $d\,\omega_u = 1/2\; c'_{vwu}\, \omega_v \wedge \omega_w$.*

Como consecuencia de la proposición 7.2, en las foliaciones primitivas de LIE existe una aplicación $\phi : M \longrightarrow G$, que es una aplicación de descomposición global, por tanto, toda foliación de LIE es regular.

Teniendo en cuenta que todo grupo de LIE es HAUSDORFF, probemos la siguiente

PROPOSICIÓN 7.3. — *Sea M una variedad diferenciable, conexa, compacta y* HAUSDORFF, *F una foliación de* LIE *sobre M con grupo de* LIE *G. Sea $\phi : M \longrightarrow G$ la aplicación de descomposición. Si M/F es compacta, si $\phi^{-1}(g)$ conexa para todo $g \varepsilon G$, entonces:*

1). — *G es localmente difeomorfo a M/F.*

2). — *ϕ es sobre.*

DEMOSTRACIÓN.

1). — Siendo el rango de ϕ constante en un abierto U, (M, N, ϕ) son localmente semejantes a sus espacios tangentes y a la aplicación inducida en los puntos correspondientes.

Si sobre la variedad M tenemos definida una foliación regular F, entonces M/F es variedad diferenciable, lo cual es equivalente a dar una aplicación de descomposición global de M en otra variedad B. Si H es la subvariedad de B sobre la cual se aplica M mediante ϕ, entonces

$$(M, H, x, y, \phi) \Xi (M_x, H_y, x, y, \phi_*)$$

y

$$(M, M/F, x, y', \pi) \Xi (M_x, (M/F)_{y'}, x, y', \pi_*)$$

donde $y = \phi(x)$. Como dos espacios vectoriales de igual dimensión son siempre isomorfos, se sigue que

$$(M_x, H_y, x, y, \phi_*) \Xi (M_x, (M/F)_{y'}, x, y', \pi_*)$$

Por tanto

$$(M, H, x, y, \phi) \Xi (M, M/F, x, y', \pi)$$

Puesto que una variedad diferenciable localmente es siempre difeomorfa a su espacio tangente, entre H y M/F, existe, pues, un difeomorfismo local.

2). — Puesto que F es foliación de LIE, M es simplemente conexa (10) y G es HAUSDORFF, entonces M/F es un revestimiento de G, por tanto $h : M/F \longrightarrow G$ es sobre. $\pi : M \longrightarrow M/F$ es siempre sobre y $\phi = h\pi : M \longrightarrow G$ es sobre, como queríamos probar.

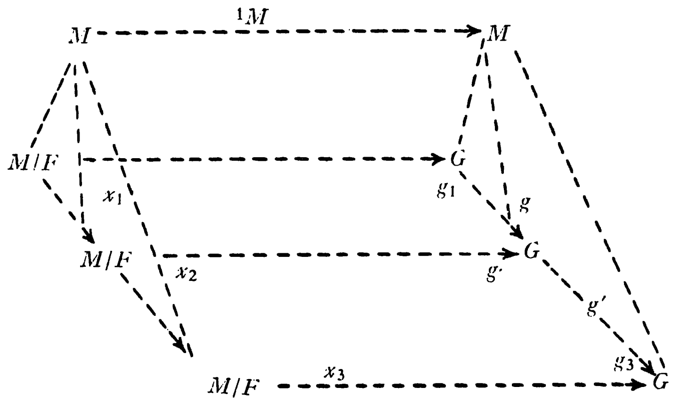
PROPOSICIÓN 7.4. — *Sea F una foliación regular sobre M, si M/F es localmente difeomorfo a G, G un grupo de* LIE *y $\phi : M \longrightarrow G$ sobre, entonces G es un grupo de transformaciones de* LIE *sobre M/F.*

DEMOSTRACIÓN:

1). — Para todo par g_1, g_2 ambos pertenecientes a G, existe $g \varepsilon G$ tal que $g_2 = g_1 g$. Si en el difeomorfismo local h a g_1 corresponde x_1 y a g_2, x_2, entonces G induce una transformación en M/F de la forma $x_2 = x_1 g$.

2). — La transformación inducida anteriormente es diferenciable, pues si h y h' son los difeomorfismos locales, $h(x_1) = g_1$; $h'(x_2) = g_2$ implican $h'^{-1} h$ diferenciable.

3). — Es asociativa dicha transformación como se deduce de forma inmediata del siguiente diagrama.



DEPARTAMENTO DE GEOMETRÍA Y TOPOLOGÍA
UNIVERSIDAD DE SANTIAGO

BIBLIOGRAFIA

(1) W. L. BAILY, JR. — *The decomposition theorem for V-manifolds*, Amer. J. Math. 78, 862-888; (1956).

(2) N. BOURBAKI. — Théorie des ensembles, *Fasc. de resultats*, *4.ª Ed. Act. Scient. et Ind.* 1141, Hermann, París.

(3) C. J. EARLE, J. EELLS, JR. — *Foliations and fibrations*, Journal of differential geometry, Vol. 1, N.º 1, 33-41; (1967).

(4) C. EHRESMANN. — *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles, 29-55; (1950).

(5) M. P. GAFFNEY. — *Hilbert spaces methods in the theory of harmonic integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. 78. 426-444; (1955).

(6) V. K. A. M. GUGGENHEIM, D. C. SPENCER. — *Chain homotopy and the de Rham theory*, Proc. Amer. Math. Soc. 7, 144-157; (1956).

(7) A. HAEFLIGER. — *Structures feuilletées et cohomologie à valeur dans un faisceau de groupoides*, Com. Math. Helv. 32, 248-329; (1958).

(8) A. HAEFLIGER. — *Variétés feuilletées*, Ann. Sc. Norm. Sup. 3 (XVI), 367-397. Pisa; (1962).

(9) R. HERMANN. — *A sufficient condition that a mapping of Riemannian manifolds be a fibre bundle*, Proc. Amer. Math. Soc. 11, 236-242; (1960).

(10) R. HERMANN. — *On the differential geometry of foliations*, Ann. Math. 72, 445-457; (1960).

(11) R. HERMANN. — *The differential geometry of foliations*, J. Math. Mech. 11, 303-315; (1962).

(12) S. ISHIHARA. — *Fibred riemannian spaces with isometric parallel fibres*, Tôhoku Math. J. (2), 6, 243-252; (1954).

(13) S. ISHIHARA. — *Correction: Fibred riemannian spaces with isometric parallel fibres*, Tôhoku Math. J. (2), 8, 333; (1956).

(14) J. L. KOSZUL. — Sur certaines groupes de transformation de LIE, *Coll. Geom. Diff. Strasbourg, C. Nat. Rech. Sc.* París; (1953).

(15) G. I. KRUCHKOVICH. — *On semi-reducible Riemannian spaces (Russian)*, Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R. 115, 862-865; (1957).

(16) I. MOGI. — *Γ-bundle and geometry of foliated manifold*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, S. A. 7, 46-92; (1961).

(17) Y. MUTO, K. YANO. — *On the connections in X_n associated with the points of Y_m*, Proc. of Physico-Math. Soc. Japan, 17, 379-390; (1935).

(18) Y. MUTO, K. YANO. — *On the connections in X_n associated with the points of Y_m*, Proc. of Physico-Math. Soc. Japan, 18, 1-9; (1935).

(19) Y. MUTO. — *On some properties of a fibred Riemannian manifold*, Sc. Rep. Yokohama Nat. Univ. S. I, 1-14; (1952).

(20) T. NAGANO. — *On fibred* RIEMANN *manifolds*, Sc. Pap. of Coll. Gen. Ed. Univ. of Tokyo 10, 17-27; (1960).

(21) H. K. NICKERSON, D. C. SPENCER. — Differentiable manifolds and sheaves (notes), *Princeton University;* (1955).

(22) B. O'NEILL. — *The fundamental equations of a submersion*, Michigan Math. J. 13, 459-469; (1966).

(23) B. O'NEILL. — *Submersions and geodesics*, Duke Math. Jour. 34, 2, 363-374; (1967).

(24) R. S. PALAIS. — *A definition of the exterior derivative in terme of* LIE *derivatives*, Proc. Amer. Math. Soc. 5, 902-908; (1954).

(25) R. S. PALAIS. — A global formulation of the LIE theory of transformation groups, *Mem. Amer. Math. Soc.* 22; (1957).

(26) G. REEB. — Sur certaines propiétés topologiques des variétés feuilletées, *Act. Sc. et Ind. Hermann*, París; (1952).

(27) B. L. REINHART. — *Harmonic integrals on almost product manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 88, 243-276, (thesis); (1958).

(28) B. L. REINHART. — *Foliated manifolds with bundle-like metrics*, Ann. of Math. 69, 119-131; (1959).

(29) B. L. REINHART. — *Harmonic integrals on foliated manifolds*, Amer. J. Math. 81, 529-536; (1959).

(30) B. L. REINHART. — *Closed metric foliations*, Michigan Math. J. 8,7-9; (1961).

(31) G. DE RHAM. — *Sur la réductibilité d'un espace de* RIEMANN, Comm. Math. Helv. 26, 328-344; (1952).

(32) R. SACKSTEDER. — *Some properties of foliations*, Ann. Inst. Fourier, 14, 31-35. Grenoble; (1964).

(33) R. SACKSTEDER. — *Foliations and pseudogroups*, Amer. J. Math. 87, 79-102; (1965).

(34) S. SASAKI. — *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds*, Tôhoku Math, J. (2), 10, 338-354; (1958).

(35) I. SATAKE. — *On generalization of the notion of manifolds*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 42, 359-363; (1956).

(36) E. VIDAL. — *Mesures définies sur les espaces des feuilles d'un feuilletage* Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser. II, XV, 247-256; (1966).

(37) E. VIDAL. — *On regular foliations*, Ann. Inst. Fourier. XVII, 1, 129-133; (1967).

(38) A. G. WALKER. — *Canonical form for a riemannian space with a parallel field of null planes*, Quart. J. Math. Oxford (2), 1, 69-79; (1950).

(39) A. G. WALKER. — *The fibring of riemannian manifolds*, Proc. London Math, Soc. (3), 3, 1-19; (1953).

(40) T. J. WILLMORE. — *Parallel distributions on manifolds*, Proc. London Math. Soc. (3), 6, 191-204; (1956).