APLICACIONES DE GALOIS EN CONJUNTOS ORDENADOS Y EN RETICULOS

por

FRANCISCO DE A. SALES VALLÉS

1. — ORDENACIONES EN EL CONJUNTO DE PARTES DE UN CONJUNTO ORDENADO.

Sea C un conjunto ordenado y consideremos el conjunto $\mathcal{P}(C)$ de sus partes. La relación de orden $\leq$ definida en C induce en $\mathcal{P}(C)$ la siguiente relación, que indicaremos por $\overset{s}{\leq}$:

$$A \overset{s}{\leq} B$$

$A \in \mathcal{P}(C)$, $B \in \mathcal{P}(C)$, si y solo si todo elemento $a \in A$ es $\leq$ que un elemento $b \in B$ [1].

Esta relación es un preorden y determina por tanto una relación de equivalencia que indicaremos por S:

$$A \equiv B \qquad (S) \Longleftrightarrow \begin{cases} A \overset{s}{\leq} B \\ B \overset{s}{\leq} A \end{cases}.$$

1. — Sea $A \in \mathcal{P}(C)$; el conjunto $B = \bigcup\limits_{X \overset{s}{\leq} A} X \; (X \in \mathcal{P}(C))$ es equivalente S a A.

En efecto: $A \subset B \Longrightarrow A \overset{s}{\leq} B$. Por otra parte, si $c \in B$, es $c \in X$ para algún $X \overset{s}{\leq} A$, luego existe un $a \in A$ tal que $c \leq a$, o sea $B \overset{s}{\leq} A$.

2. — La unión de los conjuntos equivalentes S a A es un conjunto equivalente S a A.

En efecto: Sea $B = \bigcup\limits_{X \equiv A} X$. Si $c \in B$ es $c \in X$ para algún $X \equiv A$ (S) por tanto existe un $a \in A$ tal que $c \leq a$, o sea $B \overset{s}{\leq} A$. Además, si

$a \in A$ existe en cualquier $X \equiv A\,(S)$ un $c \in X$ tal que $a \leq c$, o sea $A \overset{s}{\leq} X \subset B$ lo que implica $A \overset{s}{\leq} B$.

Un conjunto $A \in \mathcal{P}(C)$ diremos que es *cerrado* S ([2] pág. 14) si

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \\ y \leq x \end{array}\right\} \Longrightarrow y \in A \tag{1}$$

o lo que es equivalente

$$A = \bigcup_{X \overset{s}{\leq} A} X \tag{2}$$

La demostración de la equivalencia entre (1) y (2) es como sigue: Sea $X \overset{s}{\leq} A$; para todo $x \in X$ existe un $a \in A$ tal que $x \leq a$, por tanto si se verifica (1), es $x \in A$, o sea $X \subset A$; evidentemente si $X \subset A$ es $X \overset{s}{\leq} A$, luego la clase de los conjuntos X que verifican $X \overset{s}{\leq} A$ es la de los contenidos en A y $A = \bigcup_{X \subset A} X = \bigcup_{X \overset{s}{\leq} A} X$, con lo que queda demostrado que (1) $\Longrightarrow$ (2). Sea $A = \bigcup_{X \overset{s}{\leq} A} X$ y

$$\left.\begin{array}{l} a \in A \\ x \leq a \end{array}\right\}$$

se tiene que $\{x\} \overset{s}{\leq} A$, luego $\{x\} \subset A$, o sea $x \in A$, de donde (2) $\Longrightarrow$ (1).

3. — Si A es cerrado S se verifica $B \overset{s}{\leq} A \Longleftrightarrow B \subset A$.

En efecto: Es evidente que $B \subset A \Longrightarrow B \overset{s}{\leq} A$. Sea $B \overset{s}{\leq} A$, por ser A cerrado S es $A = \bigcup_{X \overset{s}{\leq} A} X$, luego $B \subset A$.

4. — En cada clase de equivalencia S existe un y un solo conjunto cerrado S.

En efecto: Sean A y B conjuntos cerrados S y $A \equiv B\,(S)$. Se tiene

$$A \equiv B\,(S) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A \overset{s}{\leq} B \\ B \overset{s}{\leq} A \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset A \end{array}\right. \Longrightarrow A = B.$$

Luego en cada clase de equivalencia S existe todo lo más un conjunto cerrado. S. Ahora bien, el conjunto unión de todos los conjuntos de una clase, según 2, es de la clase o sea,

$$B = \bigcup_{X \equiv A(S)} X \Longrightarrow B \equiv A(S)$$

y por tanto $B = \bigcup_{X \equiv B(S)} X$. Este conjunto B es cerrado S ya que

$$\left. \begin{array}{l} c \in B \\ x \leq c \end{array} \right\} \Longrightarrow c \in X, \qquad X \equiv B(S)$$

y

$$X \cup \{x\} \equiv X(S)$$

por tanto

$$X \cup \{x\} \equiv B(S)$$

lo que implica

$$X \cup \{x\} \subset B$$

ya que $X \cup \{x\}$ entra como sumando en $\bigcup_{X \equiv C} X$, luego $x \in B$.

Proposición 1.1 — 1.º — El conjunto $\mathcal{P}(C)/S$ es isomorfo con la clase $\mathcal{M}$ de los conjuntos cerrados S. La relación $\overset{s}{\leq}$ se transforma en la relación $\subset$.

2.º — $\mathcal{M}$ es un retículo completo distributivo, (anillo de subconjuntos de C, [2] pág. 14).

En efecto: La primera parte de la proposición es consecuencia inmediata de los resultados anteriores.

Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de conjuntos cerrados S y sea $B \overset{s}{\leq} \bigcup_{i \in I} A_i$, para todo $c \in B$ existe un A_i tal que en A_i existe un elemento a_i tal que $c \leq a_i$. Indicamos por B_i al subconjunto de B formado por aquellos elementos de B tales que en A_i existe un elemento mayor. Se tiene:

$$B = \bigcup_{i \in I} B_i, \qquad B_i \overset{s}{\leq} A_i.$$

Por ser los A_i cerrados S, es $B_i \subset A_i$, o sea, $B \subset \bigcup_{i\in I} A_i$. Como que todo conjunto $B \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ es $B \overset{s}{\leq} \bigcup_{i\in I} A_i$, se tiene que

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{X \overset{s}{\leq} \bigcup_{i\in I} A_i} X$$

o sea, $\bigcup_{i\in I} A_i$ es cerrado.

Sea $B \overset{s}{\leq} \bigcap_{i\in I} A_i$, se tiene $B \overset{s}{\leq} A_i$ para todo $i \in I$ y por ser los A_i cerrados S es $B \subset A_i$ para todo $i \in I$, por tanto $B \subset \bigcap_{i\in I} A_i$. Recíprocamente $B \subset \bigcap A_i \Longrightarrow B \overset{s}{\leq} \bigcap_{i\in I} A_i$, luego

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{X \overset{s}{\leq} \bigcap_{i\in I} A_i} X$$

o sea $\bigcap_{i\in I} A_i$ es cerrado. La distributividad se deduce inmediatamente.

Según un teorema de E. H. Moore ([2] pág. 49) los subconjuntos cerrados respecto a cualquier operación de clausura forman un retículo completo en el cual el ínfimo es la intersección de la teoría de conjuntos. La 2.ª parte de la proposición 1.1 precisa más ya que, aunque es fácil probar que la operación $A \to \bar{A}$ tal que a todo conjunto $A \in \mathcal{P}(C)$ hace corresponder el conjunto $\bar{A} = \{x \in C \mid x \leq a, a \in A\}$ es una operación de clausura y por tanto $\mathcal{M}$ retículo completo, en este caso particular el supremo de una familia de conjuntos de $\mathcal{M}$ es su unión según la teoría de conjuntos y por tanto $\mathcal{M}$ es un anillo de conjuntos y por consiguiente distributivo.

Definimos ahora en $\mathcal{P}(C)$ la siguiente relación [1]:

$$A \overset{s'}{\leq} B$$

si y solo si para todo $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que $a \leq b$. Esta relación es un preorden que induce una relación de equivalencia que indicaremos por S'

$$A \equiv B\,(S') \Longrightarrow \begin{cases} A \overset{s'}{\leq} B \\ B \overset{s'}{\leq} A \end{cases}$$

1'. — Sea $A \in \mathcal{P}(C)$. El conjunto $B = \bigcup_{A \overset{s'}{\leq} X} X$ es equivalante S' a A.

En efecto: $A \subset B \Longrightarrow B \overset{s'}{\leq} A$. Sea $c \in B$, se tiene que existe un X tal que $c \in X$, por tanto existe un $a \in A$ tal que $a \leq c$, lo que nos dice que $A \overset{s'}{\leq} B$.

2'. — La unión de los conjuntos equivalentes S' a un conjunto A es un conjunto equivalente S' a A.

Se demuestra análogamente que 2.

Llamaremos conjunto *cerrado* S' a todo conjunto $A \in \mathcal{P}(C)$ tal que

$$\left.\begin{matrix} a \in A \\ x \geq a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow x \in A \tag{1'}$$

o lo que es equivalente

$$A = \bigcup_{A \overset{s'}{\leq} X} X \tag{2'}$$

Esta equivalencia se demuestra de una manera análoga al caso de los cerrados S. También de una manera análoga se tiene:

3'. — Si A es cerrado S' se verifica $A \overset{s'}{\leq} B \Longleftrightarrow B \subset A$.

4.'. — En cada clase de equivalencia S' existe un y solo un conjunto cerrado S'.

Proposición 1'. 1. — El conjunto $\mathcal{P}(C)/S'$ es isomorfo con la clase $\mathcal{M}'$ de los conjuntos cerrados S'. La relación $\overset{s'}{\leq}$ se transforma en la relación $\supset$.

2'. — $\mathcal{M}'$ es un retículo distributivo completo.

3'. — El conjunto complementario de un conjunto de $\mathcal{M}$ es un conjunto de $\mathcal{M}'$ y reciprocamente.

En efecto: Las dos primeras partes de la proposición se demuestran análogamente que en la proposición 1.

Sea $A \in \mathcal{M}$, se tiene

$$\left.\begin{matrix} x \notin A \\ y \geq x \end{matrix}\right\} \Longrightarrow y \notin A$$

ya que si $y \in A$, por ser $A \in \mathcal{M}$, sería $x \in A$ contra la hipótesis. Esto nos dice que $A^c \in \mathcal{M}'$. Análogamente se demuestra el recíproco.

Existe una relación entre la completación de un conjunto ordenado mediante cortaduras ([2] pág. 58) y los conjuntos cerrados S y S'. En efecto: Definimos A^* como el conjunto de las cotas superiores del conjunto $A \in \mathcal{P}(C)$. Se tiene:

1.º —
$$A \overset{s}{\leq} A^*$$
$$A \overset{s'}{\leq} A^*$$

2.º — A^* es cerrado S' ya que

$$\left.\begin{array}{l} x \in A^* \\ y \geq x \end{array}\right\} \Longrightarrow y \in A^*$$

Definimos A^+ como el conjunto de las cotas inferiores de $A \in \mathcal{P}(C)$. Se tiene:

1.º —
$$A^+ \overset{s}{\leq} A$$
$$A^+ \overset{s'}{\leq} A$$

2.ª — A^+ es cerrado S ya que

$$\left.\begin{array}{l} x \in A^+ \\ y \leq x \end{array}\right\} \Longrightarrow y \in A^+.$$

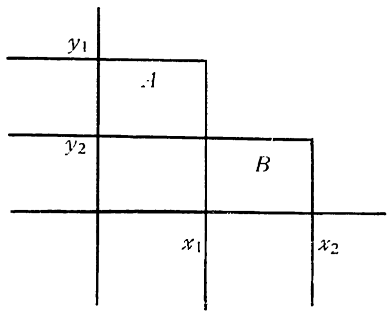
Se verifica además:

$$A \subset (A^*)^+$$

ya que para todo $a \in A$ es $a \leq a^*$ para todo $a^* \in A^*$, luego $a \in (A^*)^+$; por ser $(A^*)^+$ cerrado S es $A \overset{s}{\leq} (A^*)^+$. Dualmente se tiene $(A^+)^* \subset A$ y por ser $(A^+)^*$ cerrado S' es $(A^+)^* \overset{s'}{\leq} A$.

Indicamos por $\mathcal{N}$ a la clase de los conjuntos de $\mathcal{P}(C)$ que son $(A^*)^+$; por ser todos los $(A^*)^+$ cerrados S es $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. En general no es $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ como lo prueba el siguiente ejemplo: Sea C la recta real con su orden usual, el conjunto $A = (-\infty, x)$ es cerrado S, luego $A \in \mathcal{M}$ pero $A \notin \mathcal{N}$ ya que en este caso sería $A = (B^*)^+$, $B \in \mathcal{P}(C)$, pero es fácil comprobar que $(B^*)^+ = (-\infty, y]$.

Por ser $(A^*)^+$ una operación de clausura los conjuntos de $\mathcal{N}$ forman un retículo completo, en general no distributivo. $\mathcal{N}$ no es un subretículo del retículo $\mathcal{M}$ ya que aunque la intersección en $\mathcal{N}$ es la intersección de la teoría de conjuntos, como en $\mathcal{M}$, la unión no lo es; la unión en $\mathcal{N}$ de $A \in \mathcal{N}$, $B \in \mathcal{N}$ es el mínimo conjunto de $\mathcal{N}$ que contiene a A y a B, así por ejemplo en el plano R^2, $A = \{(-\infty, x_1] \times (-\infty, y_1]\}$, $B = \{(-\infty, x_2] \times (-\infty, y_2]\}$, $A \in \mathcal{N}$, pero aunque $A \cup B \in \mathcal{M}$ es $A \cup B \notin \mathcal{N}$. La unión en $\mathcal{N}$ de A y B es $D = \{(-\infty, x_2] \times (-\infty, y_1]\}$



2. — El espectro del retículo $\mathcal{M}$ de conjuntos cerrados S.

1. — La clase de los conjuntos de $\mathcal{M}$ que no contienen a un elemento dado $a \in C$ es un ideal primo de $\mathcal{M}$.

En efecto: Sea

$$I_a = \{A \in \mathcal{M} \mid a \notin A\}, \ a \in C$$

Se tiene:

$$\left.\begin{matrix} A \in I_a \\ B \in I_a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A \cup B \in I_a$$

$$\left.\begin{matrix} A \in I_a \\ B \in \mathcal{M} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A \cap B \in I_a,$$

luego I_a es un ideal de $\mathcal{M}$.

Además

$$\left.\begin{matrix} A \cap B \in I_a \\ B \notin I_a \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A \in I_a$$

ya que $B \notin I_a \Longrightarrow a \in B$ y por ser $A \cap B \in I_a$ es $a \notin A \cap B$ luego $a \notin A$.

2. — Si $x < y$, $x \in C$, $y \in C$ *es* $I_x \underset{\neq}{\subset} I_y$.

En efecto: Como que los conjuntos de $\mathcal{M}$ son cerrados S si un conjunto no contiene a x tampoco contiene a y, luego $A \in I_x \Longrightarrow A \in I_y$.

Sea $B \in I_y$, consideremos el conjunto $B \cup (x]$ ($(x]$ es el conjunto de los elementos de C menores o iguales a x). Se tiene

$$B \cup (x] \in \mathcal{M}, \qquad B \cup (x] \in I_y, \qquad B \cup (x] \notin I_x$$

luego

$$I_x \neq I_y.$$

3. — Si $x \,||\, y$ (x, y no comparables) es $I_x \,||\, I_y$.

En efecto: Supongamos $x \,||\, y$, $I_x \subset I_y$. Esto implica que si $A \in \mathcal{M}$ y no contiene a x, tampoco contiene a y, luego un conjunto $B \in \mathcal{M}$ que contiene a y también contiene a x. Sea $B = (y]$; se tiene $B \in \mathcal{M}$, $y \in B$, luego $x \in B$ o sea $x \leq y$ contra la hipótesis.

Proposición 2. 1. — La correspondencia

$$x \to I_x \tag{1}$$

es una aplicación inyectiva de C en el espectro (conjunto de ideales primos) de $\mathcal{M}$ que conserva el orden (morfismo de orden), o sea

$$x \leq y \Longrightarrow I_x \subset I_y$$
$$I_x \subset I_y \Longrightarrow x \leq y.$$

2. — Si C es finito la aplicación (1) es biyectiva y por tanto isomorfismo de orden.

En efecto: La 1.ª parte de la proposición es consecuencia inmediata de los resultados anteriores.

Si C es finito es $\mathcal{M}$ finito. Si I es un ideal primo de $\mathcal{M}$ existirá un conjunto $A \in \mathcal{M}$, $A \notin I$. En A existe por lo menos un elemento x no perteneciente a ningún $B \in I$, ya que si todos los elementos de A pertenecen a algún $B \in I$ sería $A \subset \bigcup_{B \in I} B \in I$ o sea $A \in I$, contra lo supuesto. Si x es un elemento de A que no pertenece a ningún B se tiene, según 2.1, $I \subset I_x$.

Sean

$$x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n \tag{2}$$

los elementos de A no pertenecientes a ningún $B \in I$; se verifica

$$I \subset I_{x_1}, \quad I \subset I_{x_2}, \ldots, I \subset I_{x_n}.$$

Supongamos que en (2) existe un elemento x_1 menor que todos los demás y supongamos $I \neq I_{x_1}$; por ser $I \subset I_{x_1}$ existirá un conjunto $D \in \mathcal{M}$ tal que $D \in I_{x_1}$, $D \notin I$, luego D no contiene a x_1, por lo que tampoco contiene a ningún elemento de (2). Tenemos que $A \cap D$ es un conjunto de $\mathcal{M}$ tal que todos sus elementos pertenecen a algún $B \in I$, luego $A \cap D \in I$, pero $A \notin I$, $D \notin I$, lo que nos dice que I no es primo, contra lo supuesto. Por tanto si en (2) existe un elemento x_1 menor que todos los demás es

$$I = I_{x_1}.$$

Si en (2) no existe un elemento menor que todos los demás, habrá por lo menos dos elementos incomparables. Sean x_1, x_2 incomparables. Tenemos $I \subset I_{x_1}$, $I \subset I_{x_2}$. Sea D un conjunto de I tal que contenga todos los elementos menores que x_1 y todos los menores que x_2 (existe, puesto que todo elemento menor que x_1 pertenece por lo menos a un $B \in I$ y análogamente todo elemento menor que x_2). Tenemos:

$$\begin{matrix} D \cup \{x_1\} \in I_{x_2} \\ D \cup \{x_2\} \in I_{x_1} \end{matrix} \Longrightarrow [D \cup \{x_1\}] \cap [D \cap \{x_2\}] = D \in I$$

pero $D \cup \{x_1\} \notin I$, $D \cup \{x_2\} \notin I$, luego I no es primo, contra lo supuesto. Se tiene pues que en (2) existe un elemento x_1 menor que todos los demás y en este caso se ha visto ya que $I = I_{x_1}$. Resumiendo, dado un ideal primo I cualquiera de $\mathcal{M}$, existe un elemento $x \in C$ tal que $I = I_x$.

Proposición 3. — La condición necesaria y suficiente para que el retículo $\mathcal{M}$ de los conjuntos cerrados S de $\mathcal{P}(C)$ sea álgebra de Boole es que en C todos los elementos sean incomparables entre si (conjunto totalmente desordenado).

En efecto: Si C es totalmente desordenado $\mathcal{M} = \mathcal{P}(C)$, pues cualquier parte de C es cerrada S; $\mathcal{P}(C)$ es álgebra de Boole.

Recíprocamente, si $\mathcal{M}$ es álgebra de Boole, lo únicos ideales primos son los maximales ([3] pág. 168, [5] pág. 198), luego, según 1 de la proposición 2, no puede haber dos elementos de C que sean comparables.

Corolario. — La condición necesaria y suficiente para que $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ es que C sea totalmente desordenado.

En efecto: $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$ implica que $\mathcal{M}$ además de distributivo sea complementado, por tanto álgebra de BOOLE, lo que implica que C sea totalmente desordenado.

Recíprocamente, si C es totalmente desordenado, $\mathcal{M}$ es álgebra de BOOLE luego contiene el complemento de todo conjunto de $\mathcal{M}$ o sea $\mathcal{M} = \mathcal{M}'$.

PROPOSICIÓN 4. — Si C es cadena, $\mathcal{M}$ lo es también y recíprocamente.

En efecto: Sean A, $B \in \mathcal{M}$; por ser C cadena, todos los elementos de A son comparables con todos los de B. Si todo elemento de A es menor que algún elemento de B es $A \overset{s}{\leq} B$, lo que implica $A \subset B$; si no es así existe en A algún elemento no menor, y por tanto mayor o igual, que un elemento de B, luego todo elemento de B es menor que algún elemento de A o sea $B \overset{s}{\leq} A$, lo que implica $B \subset A$, por tanto, todos los conjuntos de $\mathcal{M}$ son comparables.

Si $\mathcal{M}$ es cadena, el conjunto de ideales primos de $\mathcal{M}$ lo es también y esto implica que C sea cadena.

La topología determinada en C por la clase $\mathcal{M}$ de conjuntos cerrados S hace de C un espacio T_0 pero no T_1 ya que si $p \in C$ no es en general $p = \bar{p}$ ($\bar{p}$ es el conjunto cerrado S formado por todos los elementos de C menores o iguales a p, o sea $\bar{p} = (p])$, solo lo es si p es un elemento minimal de C. También se tiene que puede ocurrir que siendo p, $q \in C$ y $p \neq q$ no exista ningún conjunto cerrado S que contenga a q y no contenga a p. En efecto: si $p < q$, todo conjunto cerrado S que contiene a q contiene a p. La topología en C determinada por $\mathcal{M}$ no es, por tanto, de HAUSSDORFF.

Si C es totalmente desordenado es espacio T_1 y de HAUSDORFF con la topología determinada por $\mathcal{M}$; esta es precisamente la topología discreta.

3. — APLICACIONES DE GALOIS EN CONJUNTOS ORDENADOS.

Sea C un conjunto ordenado. Diremos que τ es una *aplicacion de Galois* si es una aplicación definida en C con valores en C tal que

1.º — $a \leq b, \ a, \ b \in C \Longrightarrow \tau b \leq \tau a$

2.º — $a \leq \tau^2 a$

Propiedades:

1.ª — $x \leq \tau z \Longrightarrow z \leq \tau x$

En efecto: $x \leq \tau z \Longrightarrow \tau^2 z \leq \tau x \Longrightarrow z \leq \tau x$

Corolario. — $x = \text{máx } \{z \in C \mid x \leq \tau z\}$

En efecto: $x \leq \tau^2 x$, luego $\tau x \in \{z \in C \mid x \leq \tau z\}$ y todo z tal que $x \leq \tau z$ verifica $z \leq \tau x$

2.ª — $\tau x = \tau^3 x$

En efecto: $x \leq \tau^2 x \Longrightarrow \tau x \geq \tau^3 x$. Por otra parte $\tau x \leq \tau^2 (\tau x)$

3.ª — Es condición necesaria y suficiente para que $x \in \tau(C)$ que $x = \tau^2 x$.

En efecto: Evidentemente la condición es suficiente. Sea $x \in \tau(C)$, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x = \tau y \\ y \in C \end{array}\right\} \Longrightarrow \tau x = \tau^2 y \Longrightarrow \tau^2 x = \tau^3 y = \tau y = x$$

La aplicación τ restringida a $\tau(C)$ es biyectiva y cambia el orden.

Diremos que $b \in C$ es *contradictorio* con $a \in C$ si $b \leq \tau a$ ([4] página 11). La relación de contradicción es simétrica (se deduce inmediatamente de la 1.ª propiedad).

4.ª — El conjunto de elementos contradictorios con a es $(\tau a]$.

5.ª — El conjunto $A = \{x \in C \mid a = \tau x\}$, de los elementos de C que tienen por imagen según τ a a verifica $A \subset (\tau a]$.

6.ª — Si a es contradictorio consigo mismo, es decir si $a \leq \tau a$, todo elemento $b \leq a$ es contradictorio consigo mismo.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} a \leq \tau a \\ b \leq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \tau b \geq \tau a \geq a \geq b.$$

Consideramos la relación de equivalencia definida por

$$x \equiv y\,(\tau) \Longleftrightarrow \tau x = \tau y.$$

Indicamos por C_x a la clase de equivalencia que contiene a x. Como que $\tau x = \tau^3 x$, se tiene

$$x \equiv \tau^2 x\,(\tau)$$

y por ser $\tau^2 x \in \tau(C)$, se tiene que en cada clase existe un elemento de $\tau(C)$. Vamos a ver que solo existe uno. En efecto: Si $y \in \tau(C)$ y además $y \equiv x(\tau)$ se tiene que $\tau x = \tau y$ y por tanto $\tau^2 x = \tau^2 y = y$.

7.ª — El elemento C_x perteneciente a $\tau(C)$ es máximo de su clase.

En efecto: Este elemento es $\tau^2 x$. Sea $y \equiv x(\tau)$, se tiene $\tau^2 y = \tau^2 x$ y por tanto $y \leq \tau^2 y = \tau^2 x$.

De todas estas propiedades se deduce la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 5. — Existe una aplicación biyectiva entre el conjunto C/τ y el conjunto $\tau(C)$. La restricción de la relación de orden $\leq$ en $\tau(C)$ induce una relación de órden en C/τ.

4. — APLICACIONES τ EN $\mathcal{P}(C)$.

Sea C un conjunto ordenado y sea τ una aplicación de GALOIS definida en C. Definimos en $\mathcal{P}(C)$ la aplicación τ de la forma siguiente:

$$A \in \mathcal{P}(C), \quad A = \{a_i\}_{i \in I} \Longrightarrow \tau A = \{\tau a_i\}_{i \in I}$$

1. — Se tiene

$$A \equiv B(S) \Longrightarrow \tau A \equiv \tau B(S')$$
$$A \equiv B(S') \Longrightarrow \tau A \equiv \tau B(S).$$

En efecto:

$$A \equiv B(S) \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \forall a \in A, & \exists b \in B & \text{tal que } a \leq b \\ \forall b \in B, & \exists a' \in A & \text{tal que } b \leq a' \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{c} \tau a \geq \tau b \\ \tau b \geq \tau a' \end{array}\right\} \Longrightarrow \tau A \equiv \tau B(S')$$
$$A \equiv B(S') \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lll} \forall a \in A, & \exists b \in B & \text{tal que } b \leq a \\ \forall b \in B, & \exists a' \in A & \text{tal que } a' \leq b \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{c} \tau b \geq \tau a \\ \tau a' \geq \tau b \end{array}\right\} \Longrightarrow \tau A \equiv \tau B(S).$$

Corolario. —

$$A \equiv B(S) \Longrightarrow \tau^2 A \equiv \tau^2 B(S)$$
$$A \equiv B(S') \Longrightarrow \tau^2 A \equiv \tau^2 B(S')$$

La aplicación τ en $\mathcal{P}(C)$ transforma clases de equivalencia S en clases de equivalencia S' y recíprocamente.

2. — Se verifica:

$$A \overset{s}{\leq} \tau^2 A$$

$$A \overset{s'}{\leq} \tau^2 A$$

En efecto: Para todo $x \epsilon A$ existe $x \leq \tau^2 x \epsilon \tau^2 A$. Para todo $\tau^2 a \epsilon \tau^2 A$ existe un $a \epsilon A$ tal que $a \leq \tau^2 a$.

3. —

$$A \equiv B(S) \Longrightarrow \begin{cases} B \overset{s}{\leq} \tau^2 A \\ A \overset{s'}{\leq} \tau^2 B \end{cases}; \qquad A \equiv B(S') \Longrightarrow \begin{cases} B \overset{s}{\leq} \tau^2 A \\ A \overset{s'}{\leq} \tau^2 B \end{cases}.$$

En efecto: Para todo $b \epsilon B$ existe un $a \epsilon A$ tal que $b \leq a$, luego $\tau^2 b \leq \tau^2 a$, lo que implica $b \leq \tau^2 a$, o sea $B \overset{s}{\leq} \tau^2 A$ y análogamente para la otra fórmula y el caso $A \equiv B(S')$.

Esta propiedad puede enunciarse así:

$$S_A \overset{s}{\leq} S_{\tau^2 A}; \qquad S'_A \overset{s'}{\leq} S'_{\tau^2 A},$$

indicando por S_A y S'_A respectivamente las clases de equivalencia S y S' definidas por A.

Proposición 6. — Una aplicación de Galois τ definida en un conjunto ordenado C define dos aplicaciones: τ_s, $\tau_{s'}$ que aplican respectivamente el conjunto de clases de equivalencia S en el conjunto de clases de equivalencia S' y el conjunto de clases de equivalencia S' en el conjunto de clases de equivalencia S. Estas dos aplicaciones están en correspondencia de Galois ([2] pág. 56. [3] ¬ág. 70).

En efecto: Se tiene

$$S_A \xrightarrow{\tau_s} S'_{\tau A}$$

$$S'_A \xrightarrow{\tau_{s'}} S_{\tau A}.$$

Si $S_A \leq S_B$ es $A \overset{s}{\leq} B$, por tanto $\tau A \overset{s'}{\geq} \tau B$, o sea $S'_{\tau A} \geq S'_{\tau B}$.
Si $S'_A \leq S'_B$ es $A \overset{s'}{\leq} B$, por tanto $\tau A \overset{s}{\geq} B$, o sea $S_{\tau A} \geq S_{\tau B}$.
Además, $\tau_{s'} \tau_s$ aplica las clases S en clases S, verificándose:

$$\tau'_{s'} \tau_s S_A = \tau_{s'} S'_{\tau A} = S_{\tau^2 A},$$

pero $A \leq \tau^2 A$, luego $S_A \leq \tau_{s'} \tau_s S_A$ y $\tau_s \tau_{s'}$ aplica las clases S' en clases S', verificándose $\tau_s \tau_{s'} S'_A = \tau_s S_{\tau A} = S'_{\tau^2 A}$, pero $A \underset{s'}{\leq} \tau^2 A$, luego $S'_A \underset{s'}{\leq} S'_{\tau^2 A}$.

4. — Sea C un conjunto ordenado con una aplicación de GALOIS τ tal que $\tau(C) = C$. Si $A \in \mathcal{M}$ es $\tau A \in \mathcal{M}'$, si $A \in \mathcal{M}'$ es $\tau A \in \mathcal{M}$.

En efecto:

$$A \in \mathcal{M} \Longrightarrow \left\{ \begin{matrix} a \in A \\ x \leq a \end{matrix} \right\} \Longrightarrow x \in A.$$

Sea $y \geq \tau a$, se tiene $\tau y \leq \tau^2 a = a$, por tanto $\tau y \in A$, o sea $y = \tau^2 y \in \tau A$, lo que nos dice que $\tau A \in \mathcal{M}'$.

Análogamente se demuestra el segundo caso.

5. — Si $\tau(C) = C$, las aplicaciones τ_m y $\tau_{m'}$ que aplican respectivamente $\mathcal{M}$ en $\mathcal{M}'$ y $\mathcal{M}'$ en $\mathcal{M}$ están en correspondencia de GALOIS.

La demostración es análoga a la de la proposición 6.

5. EJEMPLOS.

1.º. — Sea R la recta real con la ordenación usual. La clase $\mathcal{M}$ de los conjuntos cerrados S es la clase de las semirectas $(-\infty, x)$ y $(-\infty, x]$. A cada $x \in R$ corresponde el ideal I_x formado por toda las semirectas de origen $-\infty$ que no contienen x, o sea el ideal principal engendrado por $(-\infty, x)$. Como que $\mathcal{M}$ es una cadena, todo ideal es primo ([2] pág. 42) por tanto además de los ideales primos I_x existen los ideales principales engendrados por $(-\infty, x]$. Indicaremos por J_x al ideal engendrado por $(-\infty, x]$. Estos ideales no corresponden a ningún número real x en el sentido de la aplicación $x \to I_x$, pero a cada x corresponde un J_x y solo uno, verificándose además $x \leq y \Longrightarrow J_x \subset J_y$. Obsérvese que $I_x \underset{\neq}{\subset} J_x$ y entre I_x y J_x no existe ningún ideal primo.

Si consideramos la recta racional Q, si $x \in Q$ existen los ideales primos I_x y J_x, pero además existe otro tipo de ideal primo que no es correspondiente ni en el sentido I ni en el sentido J a ningún x de Q. Por ejemplo: sea $x^2 \in Q$, el conjunto de semi-rectas $(-\infty, y)$, $(-\infty, y]$ con $y^2 \leq x^2$ es un ideal primo que no es ni un I_x ni un J_x.

La aplicación $\tau x = -x$ es una aplicación de GALOIS y es $\tau R = R$ ya que evidentemente $x = \tau^2 x$. El conjunto de elementos contradictorios consigo mismo es el de los números reales no positivos.

2.º — Sea C el conjunto de números complejos con la siguiente ordenación: $u \leq v$ si y solo si $u = v$ o $|u| < |v|$. El conjunto $\mathcal{M}$ de los conjuntos de C cerrados S es el de los círculos de centro 0 abiertos, cerrados y semi-cerrados por algunos puntos de su frontera. La clase $\mathcal{M}'$ de los conjuntos cerrados S' es el de las partes exteriores de los conjuntos de $\mathcal{M}$. La aplicación $\tau u = u^{-1}$ es una aplicación de Galois en la que $\tau^2 u = u$ o sea $C = \tau C$, si ampliamos el conjunto C con el punto ∞. Los elementos contradictorios consigo mismo verifican $a \leq \tau a$ o sea $a \leq a^{-1}$ lo que implica $a = a^{-1}$ y por tanto $a^2 = 1$, o $|a| < |a^{-1}| \Longrightarrow |a^2| < 1$, luego el conjunto de los elementos contradictorios consigo mismo es el círculo unidad abierto más los puntos -1 y $+1$.

6. — Aplicaciones de Galois en retículos.

Supongamos ahora que $C = \mathcal{R}$ retículo con elemento mínimo 0 y elemento universal u. Sea τ una aplicación de Galois en $\mathcal{R}$. Además de las propiedades del número 3 se verifican: ([2] pág. 148).

1. — $$\tau(a \vee b) = \tau a \wedge \tau b \qquad (1)$$

$$\tau(a \wedge b) \geq \tau a \vee \tau b \qquad (2)$$

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} a \leq a \vee b \\ b \leq a \vee b \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \tau a \geq \tau(a \vee b) \\ \tau b \geq \tau(a \vee b) \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \tau a \wedge \tau b \geq \tau(a \vee b) & (\alpha) \\ \tau a \vee \tau b \geq \tau(a \vee b) & (\beta) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \wedge b \leq a \\ a \wedge b \leq b \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \tau(a \wedge b) \geq \tau a \\ \tau(a \wedge b) \geq \tau b \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{ll} \tau(a \wedge b) \geq \tau a \vee \tau b & (\gamma) \\ \tau(a \wedge b) \geq \tau a \wedge \tau b & (\delta) \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} a \leq \tau^2 a \\ b \leq \tau^2 b \end{array}\right\} \Longrightarrow a \vee b \leq \tau^2 a \vee \tau^2 b$$

y por (γ) se tiene

$$a \vee b \leq \tau(\tau a \wedge \tau b) \Longrightarrow \tau(a \vee b) \geq \tau^2(\tau a \wedge \tau b) \geq \tau a \wedge \tau b \qquad (\varepsilon)$$

De (α) y (ε) se deduce (1); de (β) y (γ) se deduce (2).

2. — $\tau(0)$ es el máximo de $\tau(\mathcal{R})$ y $\tau(u)$ es el mínimo de $\tau(\mathcal{R})$.

De las propiedades 1 y 2 se deduce:

2a. — Si $\mathcal{R} \neq \{0\}$ es $\tau(0) \neq 0$.

En efecto:

$$\tau 0 = 0 \Longrightarrow \tau a \leq \tau 0 = 0 \Longrightarrow \tau a = 0 ; \quad a \leq \tau^2 a = \tau 0 = 0 \Longrightarrow a = 0.$$

2b. — $\tau 0 = u$.

En efecto:

$$u \leq \tau^2 u \Longrightarrow u = \tau^2 u \Longrightarrow u \in \tau(\mathcal{R}) \Longrightarrow u = \text{máx } \tau(\mathcal{R}) = \tau 0.$$

2c. — $\tau(\mathcal{R})$ es cerrado respecto a la intersección.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} a \in \tau(\mathcal{R}) \\ b \in \tau(\mathcal{R}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} a = \tau x \\ b = \tau y \end{array}\right\} \Longrightarrow a \wedge b = \tau x \wedge \tau y = \tau(x \vee y).$$

2d. — Todos los elementos de $\mathcal{R}$ son contradictorios con el 0, es decir, $x \in \mathcal{R} \Longrightarrow x \leq \tau 0 = u$.

2e. — Si $x \leq \tau u$, x es contradictorio con todos los elementos de $\mathcal{R}$ y recíprocamente, si x es contradictorio con todos los elementos de $\mathcal{R}$ es $x \leq \tau u$.

En efecto: Sea $x \leq \tau u$, $y \in \mathcal{R}$. Se tiene $\tau u \leq \tau y$ y por tanto $x \leq \tau y$. La recíproca es inmediata ya que si x es contradictorio con todos los elementos de $\mathcal{R}$ es contradictorio con u y por tanto $x \leq \tau u$.

3. — Si $\mathcal{R}$ es un retículo completo, $\tau(R)$ también es retículo completo y en él el infimo es la misma intersección $\wedge$ que en $\mathcal{R}$.

En efecto: Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ un subconjunto cualquiera de $\tau(\mathcal{R})$; se tiene:

$$\bigwedge_{i \in I} x_i \leq x_j \quad \text{para todo} \quad j \in I$$

por tanto

$$\tau^2 \bigwedge_{i \in I} x_i \leq \tau^2 x_j = x_j \quad \text{para todo} \quad j \in I$$

de donde

$$\tau^2 \bigwedge_{i \in I} x_i \leq \bigwedge_{i \in I} x_j$$

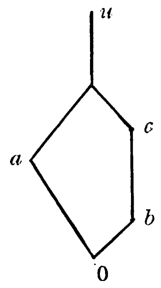
lo que nos dice que

$$\bigwedge_{i \in I} x_i = \tau^2 \bigwedge_{i \in I} x_j$$

y por tanto

$$\bigwedge x_i \in \tau(\mathcal{R}).$$

Ahora bien, todo conjunto ordenado con elemento máximo tal que todo subconjunto no vacío tiene infimo es un retículo completo ([2] pág. 49). El supremo en $\tau(R)$ de dos elementos $a,\ b \in \tau(\mathcal{R})$ no es en general $a \vee b$, como lo demuestra el siguiente ejemplo:



$$\tau 0 = u, \quad \tau a = c, \quad \tau b = a, \quad \tau c = a, \quad \tau d = 0, \quad \tau u = 0.$$

Se tiene $\tau(\mathcal{R}) = \{0, a, c, u\}$; $a \vee c = d$ pero $d \notin \tau(\mathcal{R})$. El supremo en $\tau(\mathcal{R})$ de $a,\ b \in \tau(\mathcal{R})$ es $\tau^2(a \vee b)$. En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} a \leq a \vee b \\ b \leq a \vee b \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a = \tau^2 a \leq \tau^2(a \vee b) \\ b = \tau^2 b \leq \tau^2(a \vee b), \end{array}$$

luego $\tau^2(a \vee b)$ es cota superior de a y de b. Sea $x \geq a,\ x \geq b$, se tiene:

$$x \geq a \vee b \Longrightarrow \tau^2 x \geq \tau^2(a \vee b)$$

y si $x \in \tau(\mathcal{R})$ es $x \geq \tau^2(a \vee b)$.

4. — El conjunto de los elementos de $\mathcal{R}$ contradictorios con todos los elementos de $\mathcal{R}$ es un ideal E que coincide con el conjunto de elementos cuya imagen por τ es u.

En efecto: por 2e, es inmediato que E es el ideal principal engendrado por τu, o sea $E = (\tau u]$. Sea $x \in E$, se tiene $x \leq \tau u \Longrightarrow \Longrightarrow \tau x \geq \tau^2 u = u \Longrightarrow \tau x = u$. Recíprocamente, $\tau x = u \Longrightarrow \tau u = \tau^2 x \geq x$.

5. — La relación $x \equiv y\,(\tau)$ es estable respecto a la unión.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} x \ \equiv y\ (\tau) \\ x' \equiv y'\,(\tau) \end{array}\right\} \Longrightarrow x \vee x' \equiv y \vee y'\,(\tau)$$

ya que

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv y\ (\tau) \\ x' \equiv y'\ (\tau) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} \tau x = \tau y \\ \tau x' = \tau y' \end{array}\right\} \Longrightarrow \tau x \wedge \tau x' = \tau y \wedge \tau y' \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \tau (x \vee x') = \tau (y \vee y') \Longrightarrow x \vee x' \equiv y \vee y'\ (\tau).$$

6. — Si $\mathcal{R} = \tau(\mathcal{R})$, el único elemento contradictorio con todos los de $\mathcal{R}$ es el 0.

En efecto: $x \in E \Longrightarrow \tau x = u$. Por ser $\mathcal{R} = \tau(\mathcal{R})$, es aplicación biyectiva de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}$ y como $\tau 0 = u$ es $x = 0$.

7. — Si $\mathcal{R} = \tau(\mathcal{R})$ se verifica $\tau(a \wedge b) = \tau a \vee \tau b$.

En efecto: si $\mathcal{R} = \tau(\mathcal{R})$ se verifica que para todo $x \in \mathcal{R}$ es $x = \tau^2 x$, por tanto $\tau(a \wedge b) = \tau(\tau^2 a \wedge \tau^2 b) = \tau^2(\tau a \vee \tau b) = \tau a \vee \tau b$.

Sea $\mathcal{R}$ un retículo distributivo y τ una aplicación de GALOIS definida en $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{R} = \tau(\mathcal{R})$ (retículo de MORGAN). Definimos:

$$a + b = (a \wedge \tau a) \vee (b \wedge \tau b) \vee (a \wedge \tau b) \vee (b \wedge \tau a),$$

se verifica:

a). — $a + a \in D$ (D es el conjunto de elementos de $\mathcal{R}$ contradictorios consigo mismo).

En efecto:

$$a + a = a \wedge \tau a \Longrightarrow \tau(a + a) = \tau(a \wedge \tau a) = \tau a \vee a,$$

pero como que $a \wedge \tau a \leq a \vee \tau a$, se tiene:

$$a + a = a \wedge \tau a \leq a \vee \tau a = \tau(a + a).$$

b. — Si $a \in D$ es $a = a + a$.

En efecto: $a + a = a \wedge \tau a$ y por ser $a \in D$ es $a \wedge \tau a = a$.

c. — $a + b = \tau a + \tau b$.

En efecto: $a + b$ puede escribirse así:

$$a + b = (a \vee b) \wedge (\tau a \vee \tau b)$$

(por ser $\mathcal{R}$ distributivo), de donde

$$\tau a + \tau b = (\tau a \vee \tau b) \wedge (\tau^2 a \vee \tau^2 b) = (\tau a \vee \tau b) \wedge (a \vee b) = a + b.$$

d. — Si $a \in D$ es $\tau a + \tau a = a$.

7. — ORTOCOMPLEMENTACIÓN.

Una aplicación de GALOIS τ de $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ retículo con elemento mínimo 0 y elemento universal u) tal que verifica

$$x \wedge \tau x = 0$$

para todo $x \in \mathcal{R}$, diremos que es una *ortocomplementacion* en $\mathcal{R}$ y diremos que τx es un ortocomplemento de x ([2] pág. 123, [4] pág. 20).

Todo retículo $\mathcal{R}$, con 0 y u, admite la siguiente ortocomplementación que denominaremos trivial:

$$x \neq 0 \Longrightarrow \tau x = 0, \; \tau 0 = u.$$

En un retículo $\mathcal{R}$, con elemento 0 y u, tal que todo elemento x tiene pseudo-complemento ([2] pág. 147) es decir, para todo $x \in \mathcal{R}$ existe máximo x^* del conjunto C_x de elementos $y \in R$ tales que $x \wedge y = 0$, la aplicación $x \rightarrow x^*$ es una ortocomplementación.

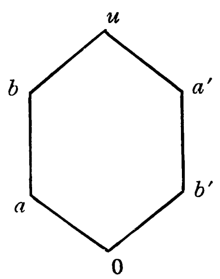
En efecto:

$$z \leq x \Longrightarrow y \wedge z \leq y \wedge x,$$

luego $C_x \subset C_z$ y por tanto $x^* \leq z^*$. Además, por ser

$$(x^*)^* = \text{máx } (z \subset C_{x^*}) \quad \text{y} \quad x \wedge x^* = 0 \quad \text{es} \quad x \leq (x^*)^*.$$

La recíproca no es cierta. Ejemplo



La ortocomplementación

$$\tau 0 = u, \quad \tau a = a', \quad \tau b = b', \quad \tau a' = a, \quad \tau b' = a, \quad \tau u = 0$$

no es una pseudo-complementación.

1. — Si τ es una ortocomplementación en $\mathcal{R}$ se tiene que:

$$\tau^2 (x \vee \tau x) = u$$

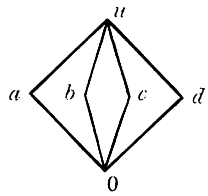
En efecto:

$$\tau^2 (x \vee \tau x) = \tau (\tau (x \vee \tau x) = \tau (\tau x \wedge \tau^2 x) = \tau 0 = u.$$

Corolario. — Si $x \vee \tau x \in \tau (\mathcal{R})$ es $x \vee \tau x = u$.

Un retículo $\mathcal{R}$ con una ortocomplementación τ diremos que es τ-ortocomplementado si $\mathcal{R} = \tau (\mathcal{R})$.

Existen retículos que son ortocomplementados respecto a varias ortocomplementaciones, así por ejemplo



admite la ortocomplementación $\tau 0 = u$, $\tau a = b$, $\tau b = a$, $\tau c = d$, $\tau d = c$, $\tau u = 0$ y la ortocomplementación $\tau 0 = u$, $\tau a = d$, $\tau b = c$, $\tau c = b$, $\tau d = a$, $\tau u = 0$ y el retículo es ortocomplementado respecto a cada una de estas ortocomplementaciones.

2. — En un retículo $\mathcal{R}$, τ-ortocomplementado, se verifica:

$$x \wedge \tau x = 0, \; x \vee \tau x = u,$$

es decir, el ortocomplemento de cada elemento es complemento.

En efecto: es resultado inmediato del corolario de 1.

3. — En un retículo $\mathcal{R}$, τ-ortocomplementado, se verifica que el único elemento contradictorio consigo mismo es el 0.

En efecto:

$$\left.\begin{array}{l} x \leq \tau x \\ x \vee \tau x = u \end{array}\right\} \Longrightarrow x \vee \tau x = \tau x = u \Longrightarrow x = 0.$$

4. — En un retículo ortocomplementado la contradicción ($x \leq \tau y$) implica la incompatibilidad ($x \wedge y = 0$).

En efecto:

$$x \leq \tau y \Longrightarrow x \vee \tau x \leqq \tau x \vee \tau y \Longrightarrow u \leq \tau (x \wedge y) \Longrightarrow x \wedge y = 0.$$

La recíproca no es cierta pues en general la incompatibilidad no implica contradicción.

5. — Si $\mathcal{R}$ es retículo distributivo y τ-ortocomplementado la incompatibilidad implica contradicción.

En efecto:

$$(y \wedge x) \vee (y \wedge \tau x) = ((y \wedge x) \vee y) \wedge ((y \wedge x) \vee \tau x) =$$
$$= y \wedge ((y \vee \tau x) \wedge (x \vee \tau x)) = y \wedge (y \vee \tau x) = y,$$

por tanto si $y \wedge x = 0$ es $y \wedge \tau x = y$ o sea $y \leq \tau x$.

Proposición 7. — Un retículo distributivo τ-ortocomplementado es unívocamente complementado (álgebra de Boole).

En efecto: Si $\mathcal{R}$ es τ-ortocomplementado $x \wedge \tau x = 0$, $x \vee \tau x = u$. Supongamos que y es complemento de x, o sea

$$x \vee y = u, \quad x \wedge y = 0.$$

Se tiene $x \vee y = x \vee \tau x$, $x \wedge y = x \wedge \tau x$, lo que, por ser $\mathcal{R}$ distributivo nos dice que $y = \tau x$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Froda-Schechter, Micheline. — *Préordres et equivalences dans l'ensemble des familles d'un ensemble.* — Archivum Mathematicum. — Tom 1 1965. Brno. Checoeslovaquia.

[2] Birkhoff, G. — *Lattice Theory.* — American Math. Soc. — 1948.

[3] Szasz, G. — *Introduction to lattice theory.* — Academic Press. New York 1963.

[4] Bodiou, G. — *Theorie dialectique des probabilités.* — Gauthier-Villars. Paris. — 1964.

[5] Dubreil, P. — Dubreil-Jacotin, M. L. — *Leçons d'algebre moderne.* Dunod. París. — 1961.