ESTUDIO DE LAS FORMAS ARMÓNICAS SOBRE UNA VARIEDAD KÄHLERIANA COMPACTA CON CURVATURA BISECCIONAL HOLOMORFA NO NEGATIVA

por

JUAN GIRBAU (*)

En este trabajo llegaremos al siguiente resultado:

Teorema 1. — Si W es una variedad kähleriana compacta de dimensión compleja n, con curvatura biseccional holomorfa no negativa en todo punto, toda forma armónica de tipo (1,1) que se anule en un punto, es idénticamente nula. En particular, $\dim {}_CH^1(W, \Omega^1) = \dim {}_CH^{1,1} \leqslant n^2$, donde Ω^1 indica el haz de gérmenes de 1-formas holomorfas, y $H^{1,1}$ indica el espacio vectorial de las formas armónicas (globales) de tipo (1,1).

Es interesante observar que en el caso de curvatura estrictamente positiva en todos los puntos, se verifica $\dim {}_CH^{1,1} = 1$, (Bishop-Goldberg) y en este caso, Frankel conjetura, que no existen más variedades de este tipo que los espacios proyectivos complejos. Pero si tomamos como hipótesis que la curvatura sea positiva o nula, es decir, no negativa, las cosas cambian mucho. Este es el caso que nosotros tratamos.

El teorema 1 afirma que la dimensión del espacio de las formas armónicas globales de tipo (1,1) no puede exceder a la dimensión del espacio de las formas (algebraicas) de tipo (1,1) en un punto.

§ 1. PRELIMINARES

Notaciones. — Emplearemos las mismas notaciones que LICHNEROWICZ en (4). Trabajaremos siempre en una variedad kähleriana compacta W de dimensión real $2n$. Siempre que empleemos índices

(*) Este trabajo ha sido realizado con la ayuda de una beca del Plan de Formación del Personal Investigador.

latinos supondremos que varían de 1 a $2n$, mientras que cuando empleemos índices griegos supondremos que varían de 1 a n. Si i es un índice, $\bar{i}$ indicará el índice $i+n$ si $i \leqslant n$, o bien $i-n$ si $i > n$. Se verifica $\bar{\bar{i}} = i$.

Designaremos por J el operador que da la estructura compleja en W. Siempre que empleemos coordenadas reales en un entorno de un punto p, $(x^1 \ldots x^n,\ y^1 \ldots y^n)$ supondremos que verifican $J\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial y^\alpha}$, $J\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}$. Entonces designaremos por $z^\alpha = x^\alpha + i y^\alpha$, $z^{\bar{\alpha}} = x^\alpha - i y^\alpha$. Se tendrá pues $dz^\alpha = dx^\alpha + i dy^\alpha$, $dz^{\bar{\alpha}} = dx^\alpha - i dy^\alpha$, $\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} - i \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$, $\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} + i \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)$. Entonces $\left\{\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}}\right\}$ constituye una base de T_p^C (complexificado del espacio real tangente en el punto p, T_p) $\cdot$ $\{dz^\alpha, dz^{\bar{\alpha}}\}$ constituye una base de $(T_p^C)^*$.

Cuando empleemos coordenadas locales de un tensor covariante o contravariante las consideraremos siempre referidas a bases de esta forma. Si α es una forma de tipo (p, q) de componentes locales $\alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}$, sea $\alpha^{\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_p \tau \ldots \tau_q}$ el tensor contravariante de tipo (q, p) obtenido subiendo los índices por medio de la métrica. Por conjugación de este tensor obtenemos otro tensor de tipo (p, q), cuyas componentes las designaremos por $\bar{\alpha}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_r}$ Es decir $\bar{\alpha}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}$ es por definición igual a $\overline{\alpha^{\bar{\lambda}_1 \ldots \bar{\lambda}_p \tau_1 \ldots \tau_q}}$.

Dadas dos formas de tipo (p, q) α y β, designaremos por

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{p!\ q!}\, \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q} \bar{\beta}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}$$

y designaremos por $< \alpha, \beta > = \int_W (\alpha, \beta)\, \eta$, siendo η el elemento de volumen. Designaremos por d la diferencial exterior, que se descompone en $d' + d''$. δ, δ' y δ'' indicarán los operadores traspuestos de d, d' y d'' respectivamente mediante el producto escalar de formas $< \ , \ >$. Designaremos por $\triangle$ la laplaciana de de Rham, es decir:

$$\triangle = d\delta + \delta d = 2(d'\delta' + \delta' d') = 2(d''\delta'' + \delta'' d'')$$

Expresiones de la laplaciana. — Se verifica:

$$(\triangle\,\alpha)_{i_1\dots i_r} = -\nabla^k\nabla_k\,\alpha^{i_1\dots i_r} + \sum_s R_{i_s}{}^k\,\alpha_{i_1\dots(k)_s\dots i_r} -$$
$$-\sum_{s\neq l} R_{i_s}{}^k{}_{i_l}{}^j\,\alpha_{i_1\dots(k)_s\dots(j)_l\dots i_r}$$

donde $(k)_s$ indica que el índice k está situado en el lugar s. $R_{i_s}{}^k{}_{i_l}{}^j$ indica el tensor de curvatura y $R_{i_s}{}^k$ el tensor de Ricci.

Si α es una forma de tipo $(p,\,q)$, empleando índices griegos tendremos:

$$(\triangle\,\alpha)_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q} = -\nabla^k\nabla_k\,\alpha_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q} + \sum_i R_{\lambda_i}{}^{\varrho}\,\alpha_{\lambda_1\dots(\varrho)_i\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q} +$$
$$+\sum_j R_{\bar\tau_j}{}^{\bar\varrho}\,\alpha_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots(\bar\varrho)_j\dots\bar\tau_r} - 2\sum_{i,j} R_{\lambda_i}{}^{\varrho}{}_{\bar\tau_j}{}^{\bar\sigma}\,\alpha_{\lambda_1\dots(\varrho)_i\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots(\bar\sigma)_j\dots\bar\tau_q}$$

Observemos que los términos de la forma $\sum\limits_{i,j} R_{\lambda_i}{}^{\varrho}{}_{\lambda_j}{}^{\sigma}\,\alpha_{\lambda_1\dots(\varrho)_i\dots(\sigma)_j\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}$ son nulos a causa de la antisimetría de α en ϱ, σ, y la simetría de R en los mismos índices. Análogamente son nulos los términos de la forma $\sum R_{\bar\tau_i}{}^{\bar\varrho}{}_{\bar\tau_j}{}^{\bar\sigma}\,\alpha_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots(\bar\varrho)_i\dots(\bar\sigma)_j\dots\bar\tau_q}$.

Para abreviar llamaremos $Q\,(\alpha)_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}$, $Q'\,(\alpha)_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}$, y $K\,(\alpha)_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}$ al segundo, tercero y cuarto término, respectivamente, del desarrollo anterior de la laplaciana. Con estas notaciones tendremos pues:

$$\triangle\,\alpha = -\nabla^k\nabla_k\,\alpha + Q\,(\alpha) + Q'\,(\alpha) + K\,(\alpha)$$

Mediante un simple cálculo se obtienen las siguientes expresiones de Q, Q' y K:

$$Q\,(\alpha)_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q} = \frac{1}{(p-1)!}\,\varepsilon^{\lambda\nu_2\dots\nu_p}_{\lambda_1\dots\lambda_p}\,R_{\lambda}{}^{\varrho}\,\alpha_{\varrho\nu_2\dots\nu_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}$$

$$Q'\,(\alpha)_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_q} = \frac{1}{(q-1)!}\,\varepsilon^{\bar\lambda\bar\nu_2\dots\bar\nu_q}_{\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\,R_{\bar\lambda}{}^{\bar\varrho}\,\alpha_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\varrho\bar\nu_2\dots\bar\nu_q}$$

$$K\,(\alpha)_{\lambda_1\dots\lambda_p\bar\tau_1\dots\bar\tau_r} = \frac{2}{(p-1)!\,(q-1)!}\,\varepsilon^{\varrho\varrho_2\dots\varrho_p}_{\lambda_1\dots\lambda_p}\,\varepsilon^{\bar\sigma\bar\sigma_2\dots\bar\sigma_q}_{\bar\tau_1\dots\bar\tau_q}\,R^{\lambda}{}_{\varrho\bar\sigma}{}^{\bar\mu}\,\alpha_{\lambda\varrho_2\dots\varrho_p\bar\mu\bar\sigma_2\dots\bar\sigma_q}$$

Proposición 1. — Se verifica: $\triangle\,\alpha = -2\nabla^{\bar\lambda}\nabla_{\bar\lambda}\,\alpha + 2Q'\,(\alpha) + K\,(\alpha)$

En efecto:

$$-\nabla^k\nabla_k = -\nabla^{\bar\lambda}\nabla_{\bar\lambda} - \nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda} = -2\nabla^{\bar\lambda}\nabla_{\bar\lambda} + \nabla^{\bar\lambda}\nabla_{\bar\lambda} - \nabla^{\lambda}\nabla_{\lambda}$$

La proposición es entonces consecuencia de la identidad de RICCI, pues se tiene fácilmente:

$$\nabla^{\bar{\lambda}} \nabla_{\bar{\lambda}} - \nabla^{\lambda} \nabla_{\lambda} = Q' - Q$$

Proposición 1'. — Se verifica: $\triangle \alpha = -2 \nabla^{\lambda} \nabla_{\lambda} \alpha + 2 Q(\alpha) + K(\alpha)$

Demostración análoga a la proposición 1.

Proposición 2. — Si designamos por

$$a(\alpha)_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\mu} \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q} = \nabla_{\bar{\mu}} \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}$$

se verifica:

$$< \triangle \alpha - 2 Q'(\alpha) - K(\alpha), \alpha > = 2(q+1) < a(\alpha), a(\alpha) >$$

En efecto, se tiene:

$$(\triangle \alpha - 2 Q'(\alpha) - K(\alpha), \alpha) = -\frac{2}{p!\, q!} (\nabla^{\bar{\lambda}} \nabla_{\bar{\lambda}} \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}) \bar{\alpha}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}$$

Sea

$$\xi_{\mu} = \frac{1}{p!\, q!} (\nabla_{\bar{\mu}} \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}) \bar{\alpha}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}$$

$$\delta'' \xi = -\nabla^{\bar{\mu}} \xi_{\bar{\mu}} = -\nabla^{\bar{\mu}} \left(\frac{1}{p!\, q!} (\nabla_{\bar{\mu}} \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}) \bar{\alpha}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q} \right) =$$

$$= -\frac{1}{p!\, q!} (\nabla^{\bar{\mu}} \nabla_{\bar{\mu}} \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}) \bar{\alpha}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q} -$$

$$- \frac{1}{p!\, q!} (\nabla_{\bar{\mu}} \alpha_{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}) (\nabla^{\bar{\mu}} \bar{\alpha}^{\lambda_1 \ldots \lambda_p \bar{\tau}_1 \ldots \bar{\tau}_q}) =$$

$$= \frac{1}{2} (\triangle \alpha - 2 Q'(\alpha) - K(\alpha), \alpha) - (q+1)(a(\alpha), a(\alpha))$$

Por consiguiente:

$$(\triangle \alpha - 2 Q'(\alpha) - K(\alpha), \alpha) = 2 \delta'' \xi + 2(q+1)(a(\alpha), a(\alpha))$$

e integrando:

$$< \triangle \alpha - 2 Q'(\alpha) - K(\alpha), \alpha > = 2(q+1) < a(\alpha), a(\alpha) >$$

como se quería demostrar.

Proposición 2'. — Si designamos por

$$b(\alpha)_{\mu\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} = \nabla_\mu \alpha_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q}$$

se verifica:

$$< \triangle\alpha - 2Q(\alpha) - K(\alpha),\ \alpha > = 2(p+1) < b(\alpha),\ b(\alpha) >$$

Demostración análoga a la proposición 2.

Definición. — Diremos que el operador $2Q' + K$ es definido no negativo, y escribiremos $2Q' + K \geqslant 0$, si en todo punto de la variedad se verifica $((2Q' + K)\alpha,\ \alpha) \geqslant 0$, cualquiera que sea α. Diremos análogamente que el operador $2Q + K \geqslant 0$, cuando en todo punto de la variedad sea $((2Q + K)\alpha,\ \alpha) \geqslant 0$, cualquiera que sea α.

§ 2. Teoremas concernientes al carácter no negativo de los operadores $2Q + K$, $2Q' + K$.

Supondremos en este apartado que se verifica

$$2Q + K \geqslant 0,\quad 2Q' + K \geqslant 0.$$

Designaremos por $H^{p,q}$ el espacio vectorial complejo de las formas armónicas globales de tipo $(p,\ q)$. Se sabe que $H^{p,q} \cong H^q(W,\ \Omega^p)$, siendo Ω^p el haz de gérmenes de las p-formas holomorfas.

Nos proponemos demostrar el resultado siguiente:

Teorema 2. — Si $2Q + K \geqslant 0$ y $2Q' + K \geqslant 0$, se verifica:

(a) Toda forma $\beta \in H^{p,q}$ que se anule en un punto, es idénticamente nula.

(b) En particular $\dim {}_C H^{p,q} \leqslant \binom{n}{p} \cdot \binom{n}{q}$.

Para la demostración de este teorema necesitaremos el siguiente lema:

Lema 1. — Designemos por $T^{p,q}$ el conjunto de los tensores contravariantes antisimétricos que verifican la condición:

$$\nabla_{\bar{\mu}} X^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar{\tau}_1\ldots\bar{\tau}_q} = 0$$

Si $X \in T^{p,q}$ y $\beta \in H^{p,q}$, entonces $i(X)\beta$ es una constante. $i(X)\beta$ indica la contracción interior de β con X.

Demostración del lema. Basta demostrar que $i(X)\beta$ es un escalar holomorfo sobre toda la variedad y para ello basta que probemos que $\nabla_{\bar\mu}[i(X)\beta] = 0$. Se tendrá:

$$\nabla_{\bar\mu}[i(X)\beta] = \frac{1}{p!\,q!}\nabla_{\bar\mu}(X^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\beta_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}) =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!}(\nabla_{\bar\mu}X^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q})\beta_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} + \frac{1}{p!\,q!}X^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}\nabla_{\bar\mu}\beta_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$$

El primer término es nulo por ser $X \in T^{p,q}$. Mostremos que el segundo término es nulo. Para ello basta ver que $\nabla_{\bar\mu}\beta_{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} = 0$ es decir, siguiendo nuestra notación, que $a(\beta) = 0$. Por ser $\beta \in H^{p,q}$ se verifica $\Delta\beta = 0$, y en virtud de la proposición 2 se tiene:

$$- < (2Q' + K)\beta,\ \beta > = 2(q+1) < a(\beta),\ a(\beta) >$$

Pero por ser $2Q' + K \geqslant 0$, el primer término es negativo, mientras que el segundo es positivo. De aquí se deduce que $a(\beta) = 0$, que es lo que queríamos demostrar.

Demostración del teorema. — Sea $\beta \in H^{p,q}$. Sea

$$X^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} = \bar\beta^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q}$$

Probemos que $X \in T^{p,q}$. Tenemos que ver que $\nabla_{\bar\mu}X^{\lambda_1\ldots\lambda_p\bar\tau_1\ldots\bar\tau_q} = 0$ lo cual es equivalente a probar que $\nabla_{\mu}\beta_{\varrho_1\ldots\varrho_p\bar\nu_1\ldots\bar\nu_q} = 0$ es decir, siguiendo nuestra notación, que $b(\beta) = 0$. Esto se deduce análogamente a como hemos hecho anteriormente, de la proposición 2', y del hecho de haber supuesto $2Q + K \geqslant 0$. Entonces, por ser $X \in T^{p,q}$, $i(X)\beta$ es una constante a causa del lema, pero como β se anula en un punto $i(X)\beta$ debe ser idénticamente nula. Entonces se tiene $(\beta,\ \beta) = i(X)\beta \equiv 0$ lo cual implica $\beta \equiv 0$. Ello prueba el apartado (a) del teorema. (b) es un simple corolario de (a) y se demuestra así:

Supongamos $\dim {}_CH^{p,q} > \binom{n}{p}\cdot\binom{n}{q}$. Entonces existiría una base $\beta_1 \ldots \beta_k$ de $H^{p,q}$ con $k > \binom{n}{p}\cdot\binom{n}{q}$. En todo punto x se verifica $\dim(\wedge^p T \otimes \wedge^q \bar T) = \binom{n}{p}\cdot\binom{n}{q}$, por consiguiente para un x fijo cualquiera $(\beta_1)_x \dots (\beta_k)_x$ son linealmente dependientes, por tanto existe una combinación lineal $\sum k_i (\beta_i)_x = 0$. Sea $\beta = \sum k_i \beta_i$. β es nula en el punto x, por consiguiente $\beta \equiv 0$, así pues se tiene una combinación lineal no trivial de $\beta_1 \dots \beta_k$ en contra de la hipótesis de que constituyan una base.

§ 3. Estudio del carácter no negativo de los operadores $2Q + K$, $2Q' + K$.

Nos proponemos en este apartado, encontrar condiciones de tipo geométrico para que se verifique $2Q + K \geqslant 0$, $2Q' + K \geqslant 0$.

Llegaremos al siguiente resultado:

Teorema 3. — Si la curvatura biseccional holomorfa es no negativa en todo punto, para las formas de tipo (1,1), los operadores $2Q + K$ y $2Q' + K$ son no negativos.

Para la demostración de este teorema necesitamos el siguiente lema de Bishop-Goldberg (1):

Lema 2. — Si ξ es una forma de tipo (1,1), existe en cada carta local una base $\{Y_1 \dots Y_n, \overline{Y}_1 \dots \overline{Y}_n\}$ tal que $\xi(Y_\alpha, \overline{Y}_\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$, y tal que $g_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$.

Demostración del lema. — Se verifica la equivalencia siguiente:

$$\xi \text{ es del tipo } (1,1) \Longleftrightarrow \begin{cases} \xi(X, Y) = \xi(JX, JY) \text{ cualesquiera que} \\ \text{sean } X, Y. \end{cases}$$

Sea entonces $T(X, Y) = T(X, JY)$. T es simétrico puesto que $T(X, Y) = \xi(X, JY) = -\xi(JY, X) = \xi(JY, J^2X) = \xi(Y, JX) = T(Y, X)$. Además se verifica que $T(X, Y) = T(JX, JY)$. Así pues T es una forma simétrica invariante por J. Sea X_1 un vector propio de T, entonces JX_1 también es vector propio. De esta manera podemos elegir inductivamente una base ortonormal $X_1 \dots X_n$, $JX_1 \dots JX_n$ de modo que T quede diagonalizado en esta base. Entonces tomamos:

$$Y_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\alpha - iJX_\alpha)$$

$$\overline{Y}_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\alpha + iJX_\alpha)$$

Un simple cálculo muestra que $\xi(Y_\alpha, \overline{Y}_\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$. Además en esta base $g_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\beta}$.

Necesitaremos también el siguiente lema:

Lema 3. — Con las mismas notaciones que el lema precedente, se tiene:

$$R(\overline{Y}_\mu, Y_\sigma, Y_\mu, \overline{Y}_\sigma) = R(X_\mu, JX_\mu, X_\sigma, JX_\sigma)$$

Demostración del lema

$$R(\overline{Y}_\mu, Y_\sigma, Y_\mu, \overline{Y}_\sigma) = R\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X_\mu + iJX_\mu), \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\sigma - iJX_\sigma),\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{2}}(X_\mu - iJX_\mu), \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\sigma + iJX_\sigma)\right) =$$

$$= \frac{1}{4} R(X_\mu, X_\sigma, X_\mu, X_\sigma) + \frac{i}{4} R(X_\mu, X_\sigma, X_\mu, JX_\sigma) -$$

$$- \frac{i}{4} R(X_\mu, X_\sigma, JX_\mu, X_\sigma) - \frac{i}{4} R(X_\mu, JX_\sigma, X_\mu, X_\sigma) +$$

$$+ \frac{i}{4} R(JX_\mu, X_\sigma, X_\mu, X_\sigma) + \frac{1}{4} R(JX_\mu, JX_\sigma, X_\mu, X_\sigma) +$$

$$+ \frac{1}{4} R(JX_\mu, X_\sigma, JX_\mu, X_\sigma) - \frac{1}{4} R(JX_\mu, X_\sigma, X_\mu, JX_\sigma) -$$

$$- \frac{1}{4} R(X_\mu, JX_\sigma, JX_\mu, X_\sigma) + \frac{1}{4} R(X_\mu, JX_\sigma, X_\mu, JX_\sigma) +$$

$$+ \frac{1}{4} R(X_\mu, X_\sigma, JX_\mu, JX_\sigma) - \frac{i}{4} R(X_\mu, JX_\sigma, JX_\mu, JX_\sigma) +$$

$$+ \frac{i}{4} R(JX_\mu, X_\sigma, JX_\mu, JX_\sigma) + \frac{i}{4} R(JX_\mu, JX_\sigma, X_\mu, JX_\sigma) -$$

$$- \frac{i}{4} R(JX_\mu, JX_\sigma, JX_\mu, X_\sigma) + \frac{i}{4} R(JX_\mu, JX_\sigma, JX_\mu, JX_\sigma).$$

Entre estos 16 términos se verifican las identidades siguientes:

1.$^{\text{er}}$ término = 6º = 11º = 16º · 4.º término = 5º = 12º = 13º.
2.º término = 3º = 14º = 15º · 7.º término = 8º = 9º = 10º.

Tenemos pues: $R(\overline{Y}_\mu, Y_\sigma, Y_\mu, \overline{Y}_\sigma) = R(X_\mu, X_\sigma, X_\mu, X_\sigma) + iR(X_\mu, X_\sigma, X_\mu, JX_\sigma) + iR(JX_\mu, X_\sigma, X_\mu, X_\sigma) + R(X_\mu, JX_\sigma, X_\mu, JX_\sigma)$. Es inmediato que los términos en i son iguales y de signo contrario, luego se destruyen. Tenemos finalmente:

$$R(\overline{Y}_\mu, Y_\sigma, Y_\mu, \overline{Y}_\sigma) = R(X_\mu, X_\sigma, X_\mu, X_\sigma) + \\ + R(X_\mu, JX_\sigma, X_\mu, JX_\sigma) = R(X_\mu, JX_\mu, X_\sigma, JX_\sigma).$$

Demostración del teorema 3. — Primeramente calculemos:

$$((2Q' + K)\alpha, \alpha) = 2R_{\bar\lambda}{}^{\bar\varrho}\alpha_{\nu\bar\varrho}\bar\alpha^{\nu\bar\lambda} + 2R^{\lambda}{}_{\varrho\bar\sigma}{}^{\bar\mu}\alpha_{\lambda\bar\mu}\bar\alpha^{\varrho\bar\sigma}$$

Tomemos una base según el lema 2. En esta base tendremos:

$$((2Q' + K)\alpha, \alpha) = R_{\bar\mu\sigma\mu\bar\sigma}\left(\alpha^{\bar\mu\mu}, \overline{\alpha^{\bar\mu\mu}} + \alpha^{\bar\sigma\sigma}\overline{\alpha^{\bar\sigma\sigma}} - 2\alpha^{\bar\mu\mu}\overline{\alpha^{\bar\sigma\sigma}}\right) = \\ = R_{\bar\mu\sigma\mu\bar\sigma}\|\alpha^{\bar\mu\mu} - \alpha^{\bar\sigma\sigma}\|^2$$

Por la hipótesis del teorema y por el lema 3 las $R_{\bar\mu\sigma\mu\bar\sigma} \geqslant 0$, de donde $2Q' + K \geqslant 0$. Análogamente se demuestra $2Q + K \geqslant 0$.

El teorema 1 es ahora una consecuencia inmediata de los teoremas 2 y 3.

BIBLIOGRAFIA

(1) Bishop-Goldberg. — *On the second cohomology group of a Kaehler manifold of positive curvature.* Proc. Amer. Math. Soc. 16 (1965)

(2) Goldgerg-Kobayashi. — *Holomorphic bisectional curvature.* J. Diff. Geom. 1 (1967)

(3) Kodaira. — *On a differential geometric method in the theory of staks.* Proc. N. A. S. USA 39 (1953).

(4) Lichnerowicz. — *Variétés kähleriennes et première classe de Chern.* J. Diff. Geom. 1 (1967).