CAMPOS DE TRANSFORMACION INFINITESIMAL DE FOLIACION

por

F. J. ECHARTE

1. — CAMPOS DE TRANSFORMACIÓN INFINITESIMAL DE FOLIACIÓN

Sea M una variedad diferenciable real de dimensión m, existiendo en ella definida una foliación F, cuyos campos tangentes componen una distribución involutiva que designaremos por $V(M)$. En cada punto $x \in M$, representaremos por $V_x(M)$ el espacio tangente en x a la hoja de F que pasa por dicho punto. A los campos $X \in V(M)$ los llamaremos *verticales*.

DEFINICIÓN 1-1

Un campo $Z \in T(M)$, ($T(M)$ fibrado tangente en M), se dice que es de *transformación infinitesimal* de foliación F, si para todo campo $X \in V(M)$, se verifica en el dominio de definición de ambos que $[X, Z] \in V(M)$. Representaremos a estos campos por $Z(M)$. Evidentemente $Z(M) \supset V(M)$.

La interpretación geométrica de este hecho es la siguiente: Sea un campo $Z \in Z(M)$, y φ_t ($|t| < \varepsilon$) el grupo unipararamétrico local engendrado por él, y sea X un campo vertical. Se tiene:

$$[X, Z] = \lim_{t \to 0} (\varphi_t X - X) \in V(M),$$

lo que exige que $\varphi_t X$ sea vertical, por tanto los elementos del grupo φ_t, transforman campos verticales en campos verticales, una hoja de F en otra infinitamente próxima, (en la misma si $Z \in V(M)$), y conservando por tanto invariante a la foliación F.

TEOREMA 1-1

Los campos de transformación infinitesimal constituyen una transformación involutiva, es decir; si Z_1, $Z_2 \in Z(M)$, $[Z_1, Z_2] \in Z(M)$, dentro del dominio de definición común a Z_1, y Z_2.

Para demostrarlo basta considerar un campo vertical X definido en dicho dominio, y aplicar la identidad de Jacobi a X, Z_1, Z_2.

La distribución involutiva $V(M)$ es un ideal de la distribución involutiva $Z(M)$, como se sigue inmediatamente de la definición 1-1.

La distribución $Z(M)$ tiene la misma dimensión que $T(M)$ y constituye una subalgebra de la $T(M)$. (vid Mogi [1]).

Localmente en un abierto de coordenadas, el sistema definidor de F lo podemos escribir así:

$$dx_{n+1} = 0, \dots dx_m = 0, \ (n = \dim\ F\,;\ m = \dim\ M)$$

La base de campos tangentes la denotaremos por;

$$X_1, \dots, X_n \ Y_{n+1}, \dots Y_m$$

siendo $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ campos tangentes a las hojas $(i \leqslant n)$,

$$Y_j = \frac{\partial}{\partial x_j} - \Gamma^h_j \frac{\partial}{\partial x_h}$$

se verifica que $[X_i, Y_j] \in V(M)$, y los campos de transformación infinitesimal se escriben localmente de la forma siguiente:

$$Z = \Sigma\, \alpha_i X_i + \beta_j Y_j$$

siendo las α_i funciones reales definidas sobre M, y las β_j funciones reales definidas sobre M y *constantes* sobre las hojas.

Por tanto se verifica siempre que $Z(M) \subset T(M)$, y la foliación definida por los $V(M)$ es un ideal de $Z(M)$.

TEOREMA 1-2

El algebra de LIE de una variedad diferenciable real M, no puede tener ideales propios I ni siquiera locales.

Demostración: Si existiera un ideal propio I de $T(M)$, localmente definido en un abierto $U \subset M$, I definiría una foliación de la que todos los campos tangentes serían de transformación infinitesimal, lo que equivaldría a afirmar que todas las funciones definidas sobre U eran constantes sobre las hojas, lo que solo es posible si dichas hojas se reducen cada una a un punto, y en este caso I es el ideal nulo. Por tanto el álgebra de los campos de transformación infinitesimal de foliación, no puede ser el álgebra de LIE de una variedad diferenciable.

2. — CASO DE UNA FOLIACIÓN REGULAR.

Sea F una foliación regular, teniendo por tanto el espacio cociente M/F la estructura de variedad diferenciable, (vease Palais (1)). Sea π la aplicación natural $\pi: M \to M/F$. Sea $d\pi$ la aplicación subordinada entre los campos tangentes. Se dice que $Z \in T(M)$ es proyectable con proyección $Z' \in T(M/F)$, si para todo par de puntos x, y pertenecientes a la misma hoja ($\pi(x) = \pi(y)$) se tiene que

$$d\pi(Z_x) = d\pi(Z_y) = Z'_{\pi(x)}$$

Sea Z un campo proyectable y transformación infinitesimal de foliación a la vez, siendo Z' su proyección sobre M/F, $\gamma' \in M/F$ una trayectoria de Z', y $\gamma \in M$ una trayectoria de Z tal que $\pi(\gamma) = \gamma'$. Sea $x \in \gamma$, y $\varphi_t x \in \gamma$ el transformado de x por un elemento del grupo φ_t engendrado por Z, sea $\pi(x) = x'$; $\pi(\varphi_t x) = (\varphi_t x)' = \varphi'_t x'$.

TEOREMA 2-1.

Las transformaciones φ'_t son los elementos del grupo uniparamétrico local definido por $Z' \in T(M/F)$. En efecto: sea φ_s otro elemento del grupo φ, sea $x \in M$, $\varphi_s(\varphi_t x) = \varphi_{s+t} x$. Por proyección

$$\begin{aligned}
&\pi(\varphi_t x) = \varphi'_t x' \\
&\pi(\varphi_s(\varphi_t x)) = \varphi'_s(\pi(\varphi_t(x))) = \varphi'_s \varphi'_t x' \\
&\pi(\varphi_s(\varphi_t x)) = \pi(\varphi_{s+t}(x)) = \varphi'_{s+t} x'
\end{aligned}$$

de donde

$$\varphi'_s \cdot \varphi'_t \cdot x' = \varphi'_{s+t} x' \Longrightarrow \varphi'_s \cdot \varphi'_t = \varphi'_{s+t}$$

3. — Caso de ser la variedad un espacio fibrado principal.

Pasemos a considerar un caso particular de foliaciones regulares; los espacios fibrados principales. Sea M uno de estos espacios con base B paracompacta, y grupo estructural G actuando por la derecha.

Definamos sobre este espacio una conexión, lo que es posible debido a la paracompacidad de B. Sea $H(M)$ un espacio horizontal definido por la conexión, tal que en cada punto $x \in M$ se verifica, $T_x(M) = V_x(M) \oplus H_x(M)$, espacio que suponemos definido en un dominio $D \subset M$ por q campos independientes $Y_1, \ldots, Y_q$ ($q = \dim B$), elevaciones de otros $Y'_1, \ldots, Y'_q$ de la base B, siendo $X_1 \ldots, Y_p$ los campos fundamentales. El espacio H es invariante por G, es decir $H_x g = H_{xg}$. Decimos que un campo Y es horizontal, si en todo punto $x \in D$, $Y_x \in H_x(M)$. El producto $[X_j, Y_i]$ de un campo vertical por un horizontal es un campo horizontal (véase Pham Mau Qham (1)).

Teorema 3-1.

Un campo horizontal es de transformación infinitesimal de foliación, si y solo si su producto por cualquier campo vertical es 0.

Demostración. — Sea Y un campo horizontal y X_i uno vertical, si Y es de transformación infinitesimal es necesario que $[X_i, Y] \in V(M)$, pero por otra parte $[X_i, Y]$ es horizontal por la propiedad anteriormente citada, lo que solo puede simultáneamente verificarse si $[X_i, Y] = 0$. Es fácil ver que los campos de transformación infinitesimal Z serán de la forma $Z = X + Y$, siendo $X \in V(M)$, $Y \in H(M)$, verificándose que $[X_i, Y] = 0$.

Teorema 3-2.

Los campos que tienen la propiedad de que su producto por un vertical es cero, constituyen una distribución involutiva si el centro de la álgebra de Lie de G es el ideal nulo.

Demostración. — Sea X un campo vertical cualquiera, Y_1, Y_2 dos campos tales que el producto $[X, Y_1] = [X, Y_2] = 0$, entonces $[X, [Y_1, Y_2]] = 0$ basta aplicar para ello la identidad de Jacobi. Si además el centro de la álgebra de Lie de G es $\{0\}$, $[Y_1, Y_2]$ es también horizontal, con lo que los campos horizontales con dicha propiedad definen una distribución involutiva.

Veamos que de hecho existen campos horizontales que cumplen esta propiedad. Cualquier campo horizontal definido en D, puede expresarse así:

$Y = \Sigma f_i Y_j$ debiéndose verificar que $[X_i, Y] = 0$, de donde

$$[X_i, Y] = [X_i, \Sigma f_j Y_j] = \sum_j f_j [X_i, Y_j] + \sum_j X_i (f_j) Y_j = 0$$

lo que exige que

$$\sum_{j=1}^{q} f_j c_{ij}^h + X_i (f_h) = 0$$

Si el campo Y es a la vez proyectable, las funciones f_j deben de ser constantes sobre las fibras, y por tanto $X_i (f_j) = 0$. Las ecuaciones anteriores se transforman en

$$\Sigma f_j c_{ij}^h = 0$$

sistema que en general no tiene solución.

BIBLIOGRAFIA

KOBAYASHI-NOMIZU. — *Foundations of Differential Geometry* — Vol I-Inters Publi-London — 1963.

MARTINEZ NAVEIRA. — *Variedades foliadas con métrica casi-fibrada,* — Tesis doctoral — Collectanea Mathematica — 1970.

MOGI. — *Γ — bundle ánd Geometry of foliated manifold-Sci Rep T. K. D.* Sec A - 1961 - Vol 7 - n.º 173.

PALAIS. — *A global formulation of the Lie theory of transportation groups-Memoirs of the American Mathematical Society.* — Providence - 1957.

PHAM MAU QUAM. — *Introduction a la Geometrie des Varietes Differentiables* — Duod - Paris - 1969.