SOBRE LA COMPLETITUD EN LOS ESPACIOS VECTORIALES TOPOLOGICOS LOCALMENTE CONVEXOS (*)

por

MANUEL VALDIVIA

SUMMARY

In this paper we present a characterization of the completeness of a topological vector space of Hausdorff locally convex E, in terms of a family of complete subspace wich cover E (Theorem 1).

The well know result if E is the strict inducitive limit of a sequence of complete spaces, E is complete, it is a inmediate consequence of a more general theorem proved here (Corol. to the theorem 2).

Sea E, sobre el cuerpo K de los números reales o complejos, un espacio vectorial topológico de HAUSDORFF localmente convexo.

Representamos por $\mathcal{F}$ una familia de subespacios completos de E, que recubre E.

Si M es un conjunto cualquiera de E, usamos la notación M° para el conjunto polar de M en el dual topológico E' de E.

TEOREMA 1.

Es condición necesaria y suficiente para que E sea completo, que dado un hiperplano cualquiera H de E' que corte a cada parte equicontinua A de E' en un conjunto cerrado en A para la topología inducida por $\sigma(E', E)$, exista un $F \in \mathcal{F}$ tal que $F^\circ \subset H$.

(*) Este trabajo ha sido realizado con una ayuda de la Junta para el Fomento de la Investigación en la Universidad.

DEMOSTRACIÓN:

Si E es completo, H será $\sigma(E', E)$-cerrado, por lo que habrá un elemento $x_0 \in E$ tal que $\langle u, x_0 \rangle = 0$ si, y sólo si, $u \in H$. Como $\mathcal{F}$ es un recubrimiento de E existirá un $F \in \mathcal{F}$ de manera que $\{x_0\} \subset F$ y, por lo tanto, $\{x_0\}^0 = H \supset F^\circ$.

Recíprocamente, supongamos que dado H existe un $F \in \mathcal{F}$ tal que $F^\circ \subset H$.

Tomemos un $v \in E'$, $v \notin H$, y consideremos un elemento cualquiera $\bar{u} \in F'$, dual topológico de F. Entonces, si j es la inyección canónica de F en E y ${}^t j$ es la aplicación traspuesta de la j, existirá un $u \in E'$ de manera que ${}^t j\,(u) = \bar{u}$. Expresamos u de la forma:

$$u = \alpha v + \beta w, \qquad w \in H,\ \alpha,\ \beta \in K, \tag{1}$$

por lo que

$$\bar{u} = \alpha \cdot {}^t j\,(v) + \beta \cdot {}^t j\,(w), \qquad {}^t j\,(w) \in L = {}^t j\,(H), \tag{2}$$

y como F° es el núcleo de ${}^t j$, [1, pág. 256], se tiene que

$$0 \neq {}^t j\,(v) \notin L,$$

y teniendo en cuenta (2), resulta que L es un hiperplano de F'.

Si en F' B es una parte cualquiera convexa, equilibrada, $\sigma(F', F)$-cerrada y equicontinua, vamos a demostrar que $B \cap L$ es cerrado en B para la topología inducida por $\sigma(F', F)$, y como F es completo podremos concluir que L es $o(F', F)$-cerrado.

Si B° es el conjunto polar de B en F, se tiene que B° es un entorno del origen en F, convexo, equilibrado y cerrado, por lo que existirá un entorno U del origen en E, convexo, equilibrado y cerrado, de tal forma que $U \cap F = B^\circ$.

Se tiene, [1, pág. 255]:

$$[{}^t j\,(U^\circ)]^0 = j^{-1}(U^{\circ\circ}) = j^{-1}(U) = j^{-1}(U \cap F) = B^\circ,$$

y de aquí resulta:

$$[{}^t j\,(U^\circ)]^{00} = B, \tag{3}$$

pero como U° es $\sigma(E', E)$-compacto, ${}^tj(U^\circ)$ será $\sigma(F', F)$-compacto, y, por tanto, se deduce de (3) que

$$ {}^tj(U^\circ) = B. \tag{4}$$

Veamos, ahora, que

$$ {}^tj(U^\circ \cap H) = B \cap L. \tag{5}$$

Desde luego se tiene que

$$ {}^tj(U^\circ \cap H) \subset {}^tj(U^\circ) \cap {}^tj(H) = B \cap L,$$

por lo que bastará comprobar que dado un $\bar{u}$ cualquiera de $B \cap L$ existe un u de $U^\circ \cap H$, de manera que ${}^tj(u) = \bar{u}$. En efecto, dado $\bar{u}$, se puede hallar, teniendo en cuenta (4), un $u \in U^\circ$ tal que ${}^tj(u) = \bar{u}$. Por otra parte, puesto que u se puede expresar mediante la fórmula (1), y $\bar{u} \in L$, resulta, observando la fórmula (2), $\alpha = 0$, por lo que $u \in H$. Es decir que $u \in U^\circ \cap H$, con lo que se tiene demostrada la expresión (5).

Por hipótesis $U^\circ \cap H$ es cerrado en U° y, por lo tanto, $\sigma(E', E)$-compacto, por lo que, teniendo en cuenta la expresión (5), $B \cap L$ será $\sigma(F', F)$-compacto, de aquí que sea cerrado en B para la topología inducida por $\sigma(F', F)$, y como F es completo, L resulta ser un hiperplano $\sigma(F', F)$-cerrado.

Finalmente:

$$ {}^tj^{-1}(L) = H + F^\circ = H,$$

por lo que H será $\sigma(E', E)$-cerrado, y, por lo tanto, el espacio E será completo, c.q.d.

Teorema 2.

«Si $\mathcal{F}$ está formada por la sucesión expansiva $\{E_n\}_1^\infty$ y si para cada sucesión $\{u_n\}_0^\infty$ de elementos de E', que verrifique:

$$u_n - u_0 \in E_n^\circ, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

se tiene que el conjunto $\{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_1, \ldots\}$ es equicontinuo, entonces el espacio E es completo».

DEMOSTRACIÓN:

Si E no fuera completo, por el teorema 1 habría un hiperplano H de E' que cortaría a cada parte equicontinua A de E' en un conjunto cerrado en A para la topología inducida por $\sigma(E', E)$, y tal que

$$E_n^\circ \not\subset H, \quad n = 1, 2, \ldots$$

lo cual vamos a ver que es un absurdo.

En efecto, sea j_n la inyección canónica de E_n en E y ${}^t j_n$ la aplicación traspuesta de la j_n. Si $v_n \in E_n^\circ$ y $v_n \notin H$, y $\overline{w}_n$ es un elemento cualquiera de E_n', dual topológico de E_n, existirá un $w_n \in E'$ tal que

$${}^t j_n(w_n) = \overline{w}_n, \quad w_n = \alpha v_n + \beta w, \ w \in H, \ \alpha, \ \beta \in K,$$

y por lo tanto:

$$\overline{w}_n = \alpha \cdot {}^t j_n(v_n) + \beta \cdot {}^t j_n(w), \quad {}^t j_n(w) \in L = {}^t j_n(H).$$

Además, como E_n° es el núcleo de j_n y $v_n \in E_n^\circ$, resulta que

$$\overline{w}_n = \beta \cdot {}^t j_n(w),$$

por lo que $L = E_n'$, de aquí que w_n se pueda tomar en H, $(w_n = \beta w)$.

Tomemos, ahora, un $u_0 \in E'$ tal que $u_0 \notin H$, y pongamos:

$${}^t j_n(u_0) = u_n.$$

Por lo que acabamos de ver se puede tomar un $u_n \in H$ tal que ${}^t j_n(u_n) = \bar{u}_n$.

Consideremos la sucesión $\{u_n\}_1^\infty$. Si $x \in E_n$ se tiene que

$$\langle u_n - u_0, x\rangle = \langle u_n - u_0, j_n(x)\rangle = \langle {}^t j_n(u_n - u_0), x\rangle = \langle \overline{u}_n - \bar{u}_n, x\rangle = 0,$$

es decir que

$$u_n - u_0 \in E_n^\circ, \quad n = 1, 2. \ldots$$

y por el enunciado del teorema, $A = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ será equicontinuo.

Dado un elemento cualquiera $z \in E$ existirá un n_0 tal que $z \in E_{n_0}$. Si $n \geq n_0$ se cumple:

$$u_n - u_0 \in E_n^\circ \subset E_{n_0}^\circ,$$

por lo que $u_n(z) - u_0(z) = 0$, para $n \geq n_0$, y de aquí:

$$\lim u_n(z) = u_0(z). \tag{6}$$

Por otra parte, $A \cap H = \{u_1, u_2, u_3, \ldots\}$, $u_0 \in A$ y $u_0 \notin H$, y teniendo en cuenta la fórmula (6), podemos concluir que $A \cap H$ no es cerrado en A para la topología inducida por $\sigma(E', E)$, lo que está en contra de la propiedad que hemos supuesto que tiene el hiperplano H con respecto a las partes equicontinuas de E'. Queda, pues, demostrado el teorema.

COROLARIO

«Sea $\{E_n\}_1^\infty$ una sucesión expansiva de subespacios completos de E, tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = E$, y sea $\mathcal{T}_n$ la topología inducida sobre E_n por $\sigma(E, E')$. Si $\mathcal{T}$ es la topología sobre E tal que $E(\mathcal{T})$ es el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n(\mathcal{T}_n)\}_1^\infty$, y si la topología inicial de E es más fina que $\mathcal{T}$, entonces el espacio E es completo».

DEMOSTRACIÓN:

Por el teorema 2 basta ver que dada una sucesión cualquiera $\{u_n\}_0^\infty$ de elementos de E', de manera que

$$u_n - u_0 \in E_n^\circ, n = 1, 2, \ldots,$$

se tenga que $A = \{u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots\}$ sea equicontinuo.

En efecto, sea j_n la inyección canónica de E_n en E y ${}^t j_n$ la aplicación traspuesta de la j_n. Si ponemos:

$$\bar{u}_p = {}^t j_n(u_p), \qquad p = 0, 1, 2, \ldots,$$

resulta:

$$u_p - u_0 \in E_p^\circ \subset E_n^\circ, \quad \text{para} \quad p \geq n,$$

por lo que $\bar{u}_p = \bar{u}_0$, si $p \geq n$, de aquí que

$$B = \{\bar{u}_0, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{n-1}\} = {}^t j_n(A).$$

Si B° es el conjunto polar de B en E_n, se tiene que

$$B^\circ = [{}^t j_n(A)]^0 = j_n^{-1}(A^\circ) = j_n^{-1}(A^\circ \cap E_n) = A^\circ \cap E_n,$$

pero como B es un conjunto finito, B° será un entorno del origen en $E_n(\mathcal{T}_n)$. Resulta, pues, que A° es un conjunto convexo que corta a E_n, $n = 1, 2, \ldots$, en un entorno del origen en $E_n(\mathcal{T}_n)$, y, por lo tanto, será un entorno del origen en $E(\mathcal{T})$, y como la topología de E es más fina que $\mathcal{T}$, A será equicontinuo con respecto a E, de donde aplicando el teorema 2, se concluye que E es completo.

NOTA 1

Obsérvese que el conocido resultado que afirma que si E es el límite inductivo estricto de una sucesión de espacios completos, se tiene que E es completo, es una consecuencia inmediata de nuestro corolario, pues si E es el límite inductivo estricto de la sucesión expansiva $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ de espacios completos, cada uno de éstos será un subespacio de E, y la topología $\mathcal{T}$ que hemos introducido en dicho corolario es, evidentemente, menos fina que la topología de E.

A continuación vamos a dar un ejemplo de un espacio E, unión de los subespacios completos de la sucesión expansiva $\{E_n\}_1^\infty$, de manera que la topología de E es más fina que la topología $\mathcal{T}$, verificándose, además, que E no es el límite inductivo estricto de dicha sucesión, por lo que su completitud se deduce de nuestro corolario, y no se obtiene del conocido teorema citado sobre límites inductivos estrictos.

EJEMPLO

Sea G un espacio de HILBERT y $\{E_n\}_1^\infty$ una sucesión expansiva de subespacios cerrados de G, tales que la codimensión de E_n en E_{n+1}, $n = 1, 2, 3, \ldots$, sea infinita. (Esto sucede, por ejemplo, si G es el espacio L^2 y si E_n es el subespacio que se construye a partir de las funciones de cuadrado sumable que son nulas casi por todas partes fuera del intervalo cerrado $[-n, n]$).

Sea $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$ e introduzcamos en E las siguientes topologías:

1.º) La topología $\mathcal{T}_1$ inducida por la de G.

2.º) Si E'_n es el dual topológico de E_n, sea $\mathcal{T}_2$ la topología que hace que $E(\mathcal{T}_2)$ sea el límite inductivo estricto de la sucesión

$$\{E_n(\sigma(E_n, E'_n))\}_1^\infty$$

3.º) La topología $\mathcal{T}_3$ tal que $E(\mathcal{T}_3)$ es el límite inductivo estricto de la sucesión $\{E_n\}_1^\infty$.

4.º) La topología localmente convexa mínima $\mathcal{T}_4$ más fina que $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$.

Evidentemente $\mathcal{T}_4$ es menos fina que $\mathcal{T}_3$ y más fina que $\mathcal{T}_1$ por lo que E_n, $n = 1, 2, \ldots$, son subespacios topológicos completos de $E(\mathcal{T}_4)$. Por otra parte al ser $\mathcal{T}_4$ más fina que $\mathcal{T}_2$ resulta, aplicando nuestro corolario, que $E(\mathcal{T}_4)$ es completo.

Veamos, ahora, que $\mathcal{T}_3 \neq \mathcal{T}_4$ con lo que $E(\mathcal{T}_4)$ no será el límite inductivo estricto de la sucesión de espacios completos $\{E_n\}_1^\infty$.

Puesto que $E(\mathcal{T}_1)$ es un espacio normado representamos la norma de un elemento cualquiera x de él por $\|x\|$.

Un sistema fundamental de entornos del origen en $E(\mathcal{T}_1)$ estará formado por

$$U_n = \left\{x/x \in E(\mathcal{T}_1),\ \|x\| \leq \frac{1}{n}\right\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Sea, en $E(\mathcal{T}_2)$, V_i, $i \in I$, un sistema fundamental de entornos del origen, cerrados, convexos y equilibrados.

Entonces, un sistema fundamental de entornos del origen en $E(\mathcal{T}_4)$ será:

$$W_{n,i} = U_n \cap V_i, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad i \in I.$$

Sea $B_n = \left\{x/x \in E_n,\ \|x\| \leq \frac{1}{n}\right\}$ y sea B la envolvente convexa de $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Puesto que $B_n \subset B \cap E_n$, $n = 1, 2, \ldots$, B será un entorno del origen en $E(\mathcal{T}_3)$. Veamos, ahora, que B no es un entorno del origen en $E(\mathcal{T}_4)$. En efecto, dado un $W_{n,i}$ cualquiera sea V_i° el conjunto polar de V_i en $E'(\mathcal{T}_4)$, dual topológico de $E(\mathcal{T}_4)$. Si j es la aplicación canónica de E_{n+1} en $E(\mathcal{T}_4)$ y ${}^t j$ la aplicación traspuesta sea ${}^t j(V_i^\circ) = M$. Entonces, si M° es el conjunto polar de M en E_{n+1}, se tendrá:

$$M^\circ = [{}^t j(V_i^\circ)]^\circ = j^{-1}(V_i) = V_i \cap E_{n+1},$$

es decir que M° es un entorno del origen en E_{n+1}, para la topología $\sigma(E_{n+1}, E'_{n+1})$, por lo que en M sólo habrá un número finito de elementos linealmente independientes. El espacio F engendrado por M será, pues, de dimensión finita.

Como E_{n+1} es un espacio de HILBERT representamos por (x/y), $x, y \in E_{n+1}$, el producto escalar en E_{n+1}. Por el teorema de RIESZ-FRECHET sabemos que existe una aplicación lineal de E'_{n+1} en E_{n+1} tal que si x' es un elemento cualquiera de E'_{n+1} se tiene que

$$\langle x', x\rangle = (\varphi(x')|x), \qquad \forall x \in E_{n+1}.$$

Si $N = \varphi(F)$, el espacio $E_n + N$ será cerrado en E_{n+1}, por ser E_n completo y ser la dimensión de N finita. Además, como la codimensión de E_n en E_{n+1} es infinita resulta que el complemento ortogonal L de $E_n + N$ en E_{n+1} será no vacío. Si $z \in L$ y $\|z\| = \frac{1}{n}$, resulta para todo $x' \in M \subset F$, $\langle x', z\rangle = \langle\varphi(x'), z\rangle = 0$, por lo que $z \in M^\circ \subset V_i$. También $z \in U_n$, luego $z \in W_{i,n}$. Veamos, ahora, que $z \notin B$ con lo que $W_{n,i} \not\subset B$ para todo n natural y todo $i \in I$, es decir que B no será un entorno del origen en $E(\mathcal{T}_4)$. Si z estuviera en B se tendría que

$$z = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p x_p, \quad x_p \in B_p \subset E_p, \quad \alpha_p \geq 0, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p = 1,$$

y salvo un número finito los α_p son nulos. Por lo tanto:

$$\frac{1}{n^2}(z|z) = \|z\|^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p (x_p|z) = \sum_{p=n+1}^{\infty} \alpha_p (x_p|z) \leq$$

$$\leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \alpha_p |(x_p|z)| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \alpha_p \|x_p\| \cdot \|z\| \leq \sum_{p=n+1}^{\infty} \alpha_p \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{n} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)n} \sum_{p=n+1}^{\infty} \alpha_p \leq \frac{1}{(n+1)n},$$

luego
$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n+1)n},$$

lo cual es un absurdo. Se tiene, por lo tanto, que $z \notin B$, c.q.d.

NOTA 2

Obsérvese que $E(\mathcal{T}_4)$ es compatible con la dualidad entre $E(\mathcal{T}_3)$ y $E'(\mathcal{T}_3)$, por lo que $E(\mathcal{T}_4)$ es un espacio completo que no es de MACKEY.

BIBLIOGRAFIA

(1) HORVÁTH J. — *Topological Vector Spaces and Distribution*. Addison Wesley, 1966.