L'UNIVERSO DI DE SITTER E LA MECCANICA

DI

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

1 — MECCANICA E COSMOLOGIA

L'idea di perfezionare la relatività ristretta in modo da renderla adatta allo studio dei fenomeni su scala cosmica, é stata suggerita per primo da MILNE nel 1948, e con la sua «relatività cinematica» ci ha mostrato quale via si poteva seguire per una siffatta generalizzazione. La teoria di MILNE é infatti ottenuta partendo da alcune ipotesi di carattere generale, e cioé il principio cosmologico e la legge di fuga con velocità radiale e proporzionale alla distanza. Si ottiene così un Universo formato da galassie in espansione, e cioé il «substrato», il quale risponde, nello spazio euclideo privato di ogni osservatore, agli scopi per i quali EINSTEIN introdusse il suo spazio sferico.

Il substrato ha infatti un volume finito, secondo le misure di ogni osservatore, ma si comporta come se fosse uno spazio infinito, perché i suoi confini esterni risultano inaccessibili, ed il suo contenuto é di una infinità di galassie. Non occorre quindi introdurre una curvatura dello spazio in cosmologia, perché ogni osservatore può scegliere un suo spazio euclideo privato in cui descrivere i fenomeni, e quando concede un diritto analogo ad ogni altro osservatore, ed impone la condizione che ogni osservatore si trovi nello stesso rapporto con tutto l'universo, egli é inevitabilmente condotto ad un simile modello di substrato.

Ma la relatività di MILNE, pur risultando assai suggestiva perché potrebbe farci superare il dilemma tra teorie evoluzionarie e stazionarie, mediante la doppia scala dei tempi, si presenta alquanto artificiosa e complessa. Essa infatti vuol perfezionare la relatività ristretta, ma si basa ancora sul gruppo di POINCARÉ, e l'espansione dell'Universo non é una conseguenza del gruppo, ma una ipotesi imposta a priori. Per questo ed altri motivi non ha avuto alcun seguito, pur essendo considerata di grande interesse in cosmologia, per le nuove ed ardite idee che introduce.

Nel 1952 il FANTAPPIÉ, con la sua «teoria degli Universi fisici» faceva vedere che se «Universo» é un sistema retto da «leggi» valide per tutti gli osservatori, questo implica l'esistenza di un gruppo per il quale tali leggi presentano invarianza. Ne segue che una teoria dei possibili modelli di Universo (e cioé delle possibili cosmologie) deve essere essenzialmente basata sui gruppi, il cui significato più profondo é quello di definire la «uguaglianza» tra due enti o fenomeni fisici.

Partendo quindi da ipotesi di carattere generale otteniamo non più un solo modello di Universo, cosa inaccettabile perché precluderebbe ogni ulteriore progresso della fisica, ma tutta una serie di modelli di Universo (basati sui gruppi delle rotazioni di S_n) ognuno dei quali contiene i precedenti ed é contenuto nei successivi.

Se allora rimaniamo con un gruppo a 10 parametri, si trova che il gruppo di POINCARÉ é perfezionabile in modo unico nel gruppo di FANTAPPIÉ che rappresenta i movimenti in sé del cronotopo di DE SITTER a curvatura costante positiva. La nuova «relatività proiettiva» che così si ottiene é stata da me sviluppata a partire dal 1955, servendomi della rappresentazione geodetica del cronotopo di DE SITTER, e cioé delle coordinate proiettive. Uno studio sistematico delle trasformazioni finite del gruppo di FANTAPPIÉ ci fa vedere che adesso vale una legge di addizione delle durate simile a quella di addizione delle velocità, e si possono cosí superare alcune difficoltà in cui si imbattono le varie teorie cosmologiche. Si ritrovano così in modo rigoroso alcuni risultati della teoria di MILNE, e l'espansione dell'universo non é più un postulato della teoria, ma una conseguenza del gruppo.

Nel 1962 F. GÜRSEY ha fatto uno studio del cronotopo di DE SITTER servendosi della sua rappresentazione stereografica e cioé delle coordinate conformi, senza però giustificare fisicamente l'uso di tali coordinate, né scrivere le trasformazioni finite del gruppo.

In questa memoria mi propongo di stabilire le equazioni meccaniche valide nella relatività proiettiva e di confrontare tali equazioni con quelle trovate sia dal MILNE che dal GÜRSEY.

2 — La Meccanica di Milne

Nella sua «relatività cinematica» [1] il Milne introduce una doppia scala dei tempi, e cioé il tempo cinematico (t) ed il tempo dinamico (τ), legati dalla relazione

$$\tau = t_0 + t_0 \log t/t_0 \tag{2,1}$$

dove t é il tempo misurato a partire dalla origine dei tempi e t_0 l'epoca alla quale si ha la coincidenza delle due scale (per $t = t_0$ si ha $\tau = t_0$).

Limitandoci per semplicità al caso bidimensionale (x, t), l'equazione della meccanica di Milne, per la particella libera, é la seguente

$$\boxed{\left(t^2 - \frac{x^2}{c^2}\right)\frac{dV}{dt} = -(x - Vt)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)} \tag{2,2}$$

e si può verificare che in virtù di tale equazione, la massa M così definita

$$M = m \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{(1 - V^2/c^2)(t^2 - x^2/c^2)}} \tag{2,3}$$

dove m é la massa propria, risulta é una costante del moto, cioé si mantiene costante lungo la traiettoria di una particella libera.

Dalla (3) segue poi che

$$E = mc^2 + \frac{1}{2} m \left(v - \frac{x}{t}\right)^2 + \ldots \tag{2,4}$$

e cioé che l'energia cinetica é associata all'eccesso di velocità V rispetto alla velocità x/t del substrato, nelle vicinanze della particella. Ne segue che si può introdurre un «momento relativo» dato da

$$P_r = \frac{M}{\sqrt{1 - \beta^2}}\left(V - \frac{1 - \beta^2}{t - Vx/c^2} \cdot x\right) \tag{2,5}$$

In particolare, per c tendente all'infinito la (2) si scrive così

$$\frac{d}{dt}\left(V - \frac{x}{t}\right) = 0 \tag{2,6}$$

la quale, se ci poniamo nella scala del tempo τ (o newtoniano) e teniamo presente che

$$dt = \frac{t}{t_0} d\tau ; \qquad x = \frac{t}{t_0} \Pi$$

diventa così, nella equivalenza stazionaria

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{d\Pi}{d\tau}\right) = 0 \tag{2,7}$$

che coincide con la equazione del moto della particella libera, valida nella fisica classica newtoniana.

Applicando la sua nuova meccanica al problema del moto di un insieme di particelle nelle vicinanze di un corpo di grande massa, e tenendo presente che la costante gravitazionale é espressa da $g = c^3 t/M_0$ (dove M_0 é la massa apparente dell'universo) e quindi aumenta al passare del tempo, il MILNE trova che le traiettorie delle particelle sono a spirale. Si può per questa via spiegare la struttura spiraliforme delle galassie lontane, la quale deriverebbe dalla non costanza nel tempo della costante gravitazionale, e quindi avrebbe una natura cosmologica. Si ottiene così una profonda connessione tra la forma spirale delle galassie e la loro fuga da noi. Secondo il MILNE, il carattere spirale delle galassie ci dice che la costante gravitazionale non é in effetti una costante, mentre lo spostamento verso il rosso delle righe spettrali ci dice che vi é una espansione e quindi una origine naturale del tempo.

3 — INTEGRAZIONE DELLA EQUAZIONE DI MILNE

Il MILNE ha risolto la sua equazione (2,2) nel caso più generale, con un metodo assai complicato, ottenendo così le traiettorie delle particelle libere [2]. Se invece ci limitiamo al caso bidimensionale (x, t), l'equazione di MILNE può essere integrata per via elementare, come adessò farò vedere.

A tale scopo cominciamo con l'osservare che per c tendente all'infinito essa si riduce alla (2,6), la quale, con una prima integrazione ci dà l'equazione omogenea

$$dx/dt = x/t + v_1 \tag{3,1}$$

dove v_1 é la costante di integrazione. Se allora si fa il cambiamento di variabile $u = x/t$, da cui $dx = u\,dt + t\,du$ essa diventa $t\,du = v_1\,dt$, la quale si integra subito e dà

$$u = v_1 \log t - v_1 \log t_1$$

La soluzione generale delle equazione di MILNE (2,6) é quindi data da

$$\boxed{x = v_1 t \log t/t_1} \tag{3,2}$$

Fatta questa premessa, vediamo come si integra la (2,2): essa si può scrivere nel seguente modo

$$\left(1 - \frac{x^2}{c^2 t^2}\right) dV = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) d\left(\frac{x}{t}\right)$$

che é a variabili separabili, e che integrata ci dà l'equazione

$$\frac{1}{2} \log \frac{1 + V/c}{1 - V/c} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + x/ct}{1 - x/ct} + \log k$$

dove k é la costante di integrazione. Risolvendo tale equazione rispetto alla variabile $V = dx/dt$ e ponendo $v_1 = (k^2 - 1)/(k^2 + 1)$ otteniamo la seguente equazione differenziale omogenea

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v + x/t}{1 + v_1\,x/c^2 t}$$

la quale, con il cambiamento di variabile $u = x/t$ diventa

$$v_1 \frac{dt}{t} = \frac{du}{1 - u^2/c^2} + \frac{v_1}{c^2} \frac{u\,du}{1 - u^2/c^2}$$

Indicando con t_1 la nuova costante di integrazione, otteniamo così l'integrale generale della equazione di MILNE

$$\boxed{\frac{c}{2} \log \frac{1 + x/ct}{1 - x/ct} = v_1 \left[\log t/t_1 + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{x^2}{c^2 t^2}\right)\right]} \tag{3,3}$$

Si osservi che per $c \to \infty$, il primo membro si riduce ad x/t e riotteniamo la soluzione (2).

La (3) si può anche scrivere così

$$(3,4) \qquad \left(1 + \frac{x}{ct}\right)^{c/v_1 - 1} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{ct}\right)^{c/v_1 + 1}$$

e si vede che essa ci dà una curva algebrica se $c/v_1 = m/n$ dove m ed n sono due numeri interi.

In particolare, per $v_1 \to \infty$ si ottiene un *moto iperbolico* nel quale la velocità aumenta e tende asintoticamente alla velocità c della luce:

$$(3,5) \qquad x^2 - c^2 t^2 = - c^2 t_1^2$$

mentre per $v_1 = c$ otteniamo dei moti uniformi con velocità c

$$(3,6) \qquad x - ct = \pm ct_1$$

Si verifica facilmente che l'equazione (2,2) di MILNE ammette come soluzioni particolari i moti uniformi $x = Vt$ con V costante. La stessa equazione ci dice poi che una particella libera ha una accelerazione diretta verso il centro apparente del substrato, e se si muove con la velocità di fuga $V = x/t$, cioé se appartiene al substrato, la sua accelerazione si annulla: ne segue che le particelle fondamentali del substrato possono considerarsi delle particelle libere.

4 — La meccanica di Gürsey

Nel 1962 F. GÜRSEY ha stabilito le equazioni del moto di una particella libera nello spazio di DE SITTER, adoperando le coordinate conformi, e cioé la rappresentazione stereografica del cronotopo a curvatura costante su di un suo iperpiano tangente [3].

Limitandoci al caso della curvatura positiva $+ 1/r^2$, la metrica assume la forma

$$(4,1) \qquad ds^2 = - \phi^2 \, dx_a \, dx_a = \phi^2 c^2 \, d\tau^2 \qquad (a = 1 \dots 4)$$

dove si é posto

$$(4,2) \qquad \phi^{-1}(\sigma^2) = 1 + \sigma^2/4r^2 \quad \text{con} \quad \sigma^2 = x_a x_a$$

Il cronotopo di DE SITTER V_4 può essere immerso in uno spazio S_5 piatto con le coordinate ξ_A $(A = 1, 2 \dots 5)$ tali che

$$\xi_A \xi_A = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2 = r^2 \tag{4,3}$$

da cui segue il legame tra le cinque coordinate ξ_A e le quattro coordinate conformi x_s, dato da

$$\xi_a = \phi(\sigma^2)\, x_a\,; \qquad \xi_5 = r\,\phi(\sigma^2)\,(1 - \sigma^2/4r^2) \tag{4,4}$$

e le loro formule inverse

$$x_a = \frac{2\,\xi_a}{1 + \xi_5/r}\,; \qquad \frac{\sigma^2}{4r^2} = \frac{1 - \xi_5/r}{1 + \xi_5/r} \tag{4,5}$$

Il GÜRSEY introduce poi il momento angolare di S_5

$$\lambda_{AB} = m\left(\xi_A \frac{d\,\xi_B}{d\,\tau} - \xi_B \frac{d\,\xi_A}{d\,\tau}\right) \tag{4,6}$$

con $ds = \phi\, c\, d\tau$, definisce il momento p_a nel seguente modo

$$p_a = m\,\phi \frac{d x_a}{d\tau} \quad \text{da cui} \quad p_a p_a = -\, m^2 c^2\, \phi^2 \tag{4,7}$$

ed esprime λ_{AB} in termini di x_a e p_a, utilizzando le (4) :

$$\boxed{\lambda_{ab} = x_a p_b - x_b p_a\,; \qquad \pi_a = \lambda_{5a}/r = \phi^{-1} p_a + \frac{1}{2r^2}\, x_s\, \lambda_{as}} \tag{4,8}$$

L'equazione della meccanica della particella libera $d\,\lambda_{AB}/d\,\tau = 0$, si scinde allora nelle due equazioni

$$\frac{d\,\lambda_{ab}}{d\,\tau} = 0\,; \qquad \frac{d\,\pi_a}{d\,\tau} = 0 \tag{4,9}$$

Da queste due equazioni, tenendo conto delle (8) si può ricavare l'equazione della meccanica in coordinate conformi. Si ha infatti

$$\frac{d\,\pi_a}{d\,\tau} = \phi^{-1} \frac{d p_a}{d\,\tau} + p_a \frac{x_s v_s}{2r^2} + \frac{v_s}{2r^2}\lambda_{as} + \frac{x_s}{2r^2}\frac{d\,\lambda_{as}}{d\,\tau} = 0$$

l'ultimo termine a destra é nullo per la prima delle (9), e quindi avremo l'equazione

$$\phi^{-1}\frac{d p_a}{d\tau}+p_a\frac{x_s v_s}{2r^2}+\frac{v_s}{2r^2}(x_a p_s - x_s p_a)=0$$

la quale si semplifica ricordando che $v_a v_a = -c^2$ e che $p_a = m\phi v_a$. Otteniamo così l'equazione di GÜRSEY

$$\boxed{\frac{d p_a}{d\tau}=\frac{m c^2}{2r^2}x_a\phi^2} \tag{4,10}$$

e cioé l'equazione del moto di una particella libera nell'universo di DE SITTER, scritta in coordinate conformi.

5 — STUDIO DELLA EQUAZIONE DI GÜRSEY

Per studiare l'equazione di GÜRSEY e confrontarla con quella di MILNE, poniamoci nel caso bidimensionale (x, t), e scriviamo tale equazione in forma esplicita

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dx}{dt}\right)=\frac{c^2}{2r^2}x\phi^2\sqrt{1-\beta^2} \tag{5,1}$$

eseguendo le derivazioni indicate e semplificando avremo

$$\frac{\phi}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)\frac{dV}{dt}-\frac{c^2}{2r^2}\frac{\phi^2}{\sqrt{1-\beta^2}}(\beta^2 x + x - Vt - \beta^2 x)=0$$

da cui segue facilmente la seguente equazione

$$\boxed{\left(1+\frac{x^2-c^2t^2}{4r^2}\right)\frac{dV}{dt}=\frac{c^2}{2r^2}(x-Vt)(1-V^2/c^2)} \tag{5,2}$$

la quale é molto simile a quella (2,2) di MILNE, ma adesso non é più integrabile per via elementare.

Se però ricordiamo che nella rappresentazione stereografica della superficie sferica su di un suo piano tangente, le geodetiche (e cioé i cerchi massimi) passanti per il punto di tangenza sono rappresentate dalle rette uscenti dalla origine, mentre le altre geodetiche sono rappresentate da opportune circonferenze, possiamo facilmente scrivere l'integrale generale della equazione (2) di GÜRSEY. Intanto si verifica subito che le rette uscenti dalla origine $x = Vt$, con V costante, soddisfano la (2), e rappresentano moti radiali uniformi.

La soluzione generale della (2) é data dalla funzione

$$\boxed{\varphi(x, t) = x^2 - c^2 t^2 - 2(x x_1 - c^2 t t_1) - 4 r^2 = 0} \tag{5,3}$$

dove x_1 e t_1 sono due costanti arbitrarie. Si ha infatti

$$V = \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} : \frac{\partial \varphi}{\partial x} = c^2 \frac{t - t_1}{x - x_1}$$

da cui

$$\frac{dV}{dt} = c^2 \frac{(x - x_1)^2 - c^2 (t - t_1)^2}{(x - x_1)^3}$$

Sostituendo tali valori nella (2), si ottiene, dopo alcune semplificazioni, la identità

$$c^2 \frac{(x - x_1)^2 - c^2 (t - t_1)^2}{(x - x_1)^3} =$$

$$= 2 c^2 \frac{(x - x_1)^2 - c^2 (t - t_1)^2}{(x - x_1)^3} \cdot \frac{x^2 - x x_1 - c^2 t^2 + c^2 t t_1}{4 r^2 + x^2 - c^2 t^2}$$

la quale é vera, perché, in virtù della (3), il secondo fattore a secondo membro vale 1/2. Ecco quindi dimostrato che la (3) é l'integrale generale della equazione di GÜRSEY. Si osservi poi che l'integrale $x = Vt$ si ottiene quando x_1 e t_1 si fanno tendere ad infinito, mentre per $x_1 = t_1 = 0$ si ottiene il moto iperbolico

$$x^2 - c^2 t^2 = 4 r^2 \tag{5,4}$$

In base alla definizione (4,7) del momento lineare possiamo dedurre che nella teoria di GÜRSEY la massa M di un corpo varia non soltanto con la velocità, ma anche con la distanza spazio-temporale dall'osservatore secondo la legge

$$M = \frac{m}{\left(1 + \frac{x^2 - c^2 t^2}{4 r^2}\right) \sqrt{1 - \beta^2}} \tag{5,5}$$

la quale per r tendente all'infinito si riduce a quella relativistica.

Nel caso in cui $t = 0$, sviluppando la (5) in serie si ricava

$$M \sim m + \frac{E}{c^2} - \frac{I}{4 r^2} + \ldots \tag{5,6}$$

dove I é il momento di inerzia polare ($m x^2$) rispetto alla origine. Ne segue che anche nella teoria di GÜRSEY vale una equivalenza massa-energia-momento di inerzia (polare) come nella relatività proiettiva basata sul gruppo di FANTAPPIÉ [4].

6 — IL CRONOTOPO PROIETTIVO DI CASTELNUOVO

Nei precedenti lavori abbiamo visto che per sviluppare la «relatività proiettiva» con gli stessi metodi gruppali della relatività ristretta occorre servirsi della rappresentazione geodetica piana del cronotopo V_4 di DE SITTER a curvatura costante positiva $+ 1/r^2$ e cioé adoperare il cronotopo proiettivo A_4 (che ho chiamato di CASTELNUOVO). L'Universo V_4 di DE SITTER viene così rappresentato nello spazio euclideo A_4, in modo che le geodetiche di V_4 hanno per immagini le rette di A_4. Ai punti di V_4 corrispondono allora i *punti esterni* alla quadrica *assoluto* di CAYLEY-KLEIN. L'osservatore 0 si trova quindi al centro della quadrica assoluto e le tangenti condotte da 0 alla quadrica assoluto formano il *cono-luce* [4].

Nel caso bidimensionale (x, t) l'assoluto ha per equazione

$$1 + \alpha^2 - \gamma^2 = 0 \tag{6,1}$$

con $\alpha = x/r$ e $\gamma = ct/r = t/t_0$. Abbiamo visto che nel cronotopo di CASTELNUOVO il DALAMBERTIANO é dato dalla equazione mista di TRICOMI

$$(1 + \alpha^2) \varphi_{xx} + 2 \alpha \gamma \varphi_{xt} - \frac{1}{c^2} (1 - \gamma^2) \varphi_{tt} + 2 \alpha \varphi_x + 2 \gamma \varphi_t = 0 \tag{6,2}$$

e che le caratteristiche uscenti da un punto $P(\alpha_0, \gamma_0)$ sono una coppia di rette di coefficiente angolare

$$k = \frac{-\alpha_0 \gamma_0 \pm \sqrt{1 + \alpha_0^2 - \gamma_0^2}}{1 - \gamma_0^2} \tag{6,3}$$

E' facile dimostrare che *le due caratteristiche uscenti da un punto* $P(\alpha_0, \gamma_0)$ *non sono altro che le due tangenti all'assoluto* (1) *condotte dal punto* P.

Infatti, perché la retta $\alpha - \alpha_0 = k(\gamma - \gamma_0)$ sia tangente all'assoluto, occorre che k soddisfi alla equazione

$$(1 - \gamma_0^2) k^2 + 2\alpha_0 \gamma_0 k - (1 + \alpha_0^2) = 0$$

la quale ha per soluzioni proprio le (3).

Ne segue che le caratteristiche sono reali e distinte nei punti esterni all'assoluto *(equazione iperbolica)*, coincidenti nei punti dell'assoluto *(equazione parabolica)* ed immaginarie coniugate nei punti interni all'assoluto *(equazione ellittica)*.

Fatta questa premessa, vediamo con quale tecnica si passa dalla formulazione proiettiva pentadimensionale (con le cinque coordinate omogenee $\bar{x}_A$) a quella quadridimensionale (con le quattro coordinate non omogenee x_k) A questo scopo, basta imporre alle coordinate omogenee la condizione di normalizzazione di WEIERSTRASS

$$\boxed{\bar{x}_A \bar{x}_A = r^2} \qquad (A = 1, 2 \ldots 5) \tag{6,4}$$

e ricordare che

$$x_i = r\bar{x}_i/\bar{x}_5 \qquad \text{cioé} \qquad r\bar{x}_i = x_i \bar{x}_5 \tag{6,5}$$

avremo allora

$$\boxed{\bar{x}_5 = \frac{r}{\sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2}} \quad \text{da cui} \quad \frac{d\bar{x}_5}{dt} = r \frac{\gamma - \vec{\alpha} \times \vec{\beta}}{(1 + \alpha^2 - \gamma^2)^{3/2}}} \tag{6,6}$$

con $\vec{\beta} = \vec{V}/c$. E' possibile in tal modo eliminare nella formulazione delle leggi fisiche le coordinate omogenee, e passare alla formulazione quadridimensionale non proiettiva.

Come é noto [5], nelle coordinate di WEIERSTRASS, la distanza tra due punti $P(\bar{x}_A)$ e $Q(\bar{y}_A)$ é data dalla formula

$$\cos h\sigma = \bar{x}_A \bar{y}_A \tag{6,7}$$

Se le ξ_A sono le coordinate di WEIERSTRASS della retta, e fissiamo il fattore di proporzionalità in modo che si abbia $\xi_A \xi_A = r^2$, l'equazione di una linea geodetica é

$$\xi_A \bar{x}_A = 0 \tag{6,8}$$

mentre per l'angolo di due rette ξ_A ed η_A si ottiene la formula

$$\cos \theta = \xi_A \eta_A \tag{6,9}$$

Ne segue che se tali rette sono perpendicolari in senso non euclideo si ha $\xi_A \eta_A = 0$, e cioé esse sono coniugate rispetto all'assoluto.

Infine, la distanza non euclidea di un punto $P(\bar{x}_A)$ da una retta ξ_A, si trova con la formula

$$\operatorname{sen} h\delta = \xi_A \bar{x}_A \tag{6,10}$$

Nella relatività proiettiva il ds^2 é dato dalla

$$ds^2 = d\bar{x}_A d\bar{x}_A = d\bar{x}_1^2 + d\bar{x}_2^2 + d\bar{x}_3^2 - d\bar{x}_4^2 + d\bar{x}_5^2 \tag{6,11}$$

Per scriverlo in coordinate non omogenee, differenziamo la $r\bar{x}_i = x_i \bar{x}_5$ ed avremo

$$r d\bar{x}_i = x_i d\bar{x}_5 + \bar{x}_5 dx_i \tag{6,12}$$

mentre dalla prima delle (6) segue che

$$d\bar{x}_5 = \frac{\partial \bar{x}_5}{\partial x_s} dx_s = \frac{x_s dx_s}{r(1 + \alpha^2 - \gamma^2)^{3/2}} \tag{6,13}$$

Sostituendo la (12) nella (11) e semplificando avremo

$$r^2 ds^2 = \bar{x}_5^2 (dx_i dx_i) + (r^2 + x_i x_i) d\bar{x}_5^2 + 2\bar{x}_5 d\bar{x}_5 (x_i dx_i)$$

e tenendo conto delle (6) e (13) otteniamo il ds^2 in coordinate non omogenee

$$\boxed{(1+\alpha^2-\gamma^2)^2\,ds^2=(1+\alpha^2-\gamma^2)\,(dx_i\,dx_i)\;-\;(x_i\,dx_i)^2/r^2} \tag{6,14}$$

e cioé la metrica di BELTRAMI, che ci dà la rappresentazione geodetica del cronotopo di DE SITTER. Ne segue che tale metrica, in coordinate proiettive di WEIERSTRASS, assume la forma pseudopitagorica (11).

7 -- IL MOMENTO LINEARE ED ANGOLARE L_{AB}

Vediamo adesso come si generalizza il «tempo proprio» della relatività ristretta. Nella relatività proiettiva, il tempo proprio sarà dato da

$$c^2\,d\tau^2=d\bar{x}_4^2-d\bar{x}_1^2-d\bar{x}_2^2-d\bar{x}_3^2-d\bar{x}_5^2=-\,d\bar{x}_A\,d\bar{x}_A \tag{7,1}$$

Per scrivere tale formula in coordinate non omogenee, teniamo conto della (6,14) ed avremo

$$d\tau^2=dt^2\,\frac{(1-\beta^2)\,(1+\alpha^2-\gamma^2)+(\gamma-\vec{\alpha}\times\vec{\beta})^2}{(1+\alpha^2-\gamma^2)^2} \tag{7,2}$$

Se ora utilizziamo la identità di LAGRANGE

$$(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})^2+(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})^2=\alpha^2\cdot\beta^2$$

otteniamo la espressione che generalizza il tempo proprio della relatività ristretta:

$$\boxed{d\tau=dt\,\frac{\sqrt{1-\beta^2+(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\gamma)^2-(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta})^2}}{1+\alpha^2-\gamma^2}} \tag{7,3}$$

essa estende al caso tridimensionale, l'espressione che avevo ottenuta in un precedente lavoro a partire dal gruppo di FANTAPPIÉ [4].

Se teniamo poi presente che la velocità proiettiva é così definita $\bar{v}_A = d\bar{x}_A/d\tau$ e che $c^2 d\tau^2 = -d\bar{x}_A d\bar{x}_A$, ne segue la importante identità

$$\boxed{\bar{v}_A \bar{v}_A = -c^2} \tag{7,4}$$

che generalizza quella valida in relatività ristretta.

Da questa identità e dalla condizione di normalizzazione $\bar{x}_A \bar{x}_A = r^2$, derivando rispetto alla variabile τ ed introducendo l'accelerazione proiettiva $\bar{a}_A = d\bar{v}_A/d\tau$, si ricavano le due identità

$$\boxed{\bar{x}_A \bar{v}_A = 0; \quad \bar{v}_A \bar{a}_A = 0} \tag{7,5}$$

dalla prima delle quali segue che $\bar{v}_5 = -x_s \bar{v}_s$. Infine, la derivata rispetto al tempo proprio si può scrivere così

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{d\bar{x}_A}{d\tau} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}_A} = \bar{v}_A \partial_A \tag{7,6}$$

Possiamo quindi concludere che la relatività proiettiva può essere sviluppata mantenendo l'analogia matematica con la relatività ristretta e con la tecnica della teoria dei gruppi.

Fatta questa premessa, ricordiamo che nella relatività proiettiva, la massa di un corpo varia con la seguente legge

$$M = \frac{m(1 + \alpha^2 - \gamma^2)}{\sqrt{(1 - \beta^2)(1 + \alpha^2 - \gamma^2) + (\gamma - \vec{\alpha} \times \vec{\beta}^2)}} \tag{7,7}$$

simile a quella (2,3) di MILNE ed a quella (5,5) che ho ricavato dalla teoria di GÜRSEY. Se allora introduciamo la *quantità di moto proiettiva* $\bar{p}_A$ di un punto di massa m

$$\bar{p}_A = m\bar{v}_A = m\frac{d\bar{x}_A}{d\tau} \quad \text{da cui} \quad \bar{p}_A \bar{p}_A = -m^2 c^2 \tag{7,8}$$

possiamo definire così il *momento della quantità di moto proiettivo* (o momento angolare di S_5), rispetto alla origine

$$\boxed{L_{AB} = m(\bar{x}_A \bar{v}_B - \bar{x}_B \bar{v}_A)} \tag{7,9}$$

Questo tensore si può scomporre in due tensori di S_4, se teniamo presente che la *quantità di moto* é data da

$$p_i = m v_i = m \frac{d}{dt}\left(r \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_5}\right) = m r \bar{x}_5^{-2} (\bar{x}_5 \bar{v}_i - \bar{x}_i \bar{v}_5)$$

da cui segue l'espressione del *momento della quantità di moto*:

$$m_{ik} = m (x_i v_k - x_k v_i) = m r^2 \bar{x}_5^{-2} (\bar{x}_i \bar{v}_k - \bar{x}_k \bar{v}_i)$$

Tenendo conto della (6,6) possiamo concludere che

$$\boxed{L_{ij} = \frac{x_i p_j - x_j p_i}{1 + \alpha^2 - \gamma^2}; \qquad L_{5i} = \frac{r p_i}{1 + \alpha^2 - \gamma^2}} \tag{7,10}$$

e cioé: *il momento angolare proiettivo, al limite relativistico, si decompone nel momento lineare ed in quello angolare di* S_4. Nella relatività proiettiva quindi il momento lineare e quello angolare vengono fusi in un unico tensore proiettivo.

Ricordando che $\bar{x}_A \bar{x}_A = r^2$ e che $\bar{v}_A \bar{v}_A = - c^2$, possiamo verificare che si ha

$$\boxed{L_{AB} L_{AB} = 2 r^2 \bar{p}_A \bar{p}_A = - 2 m^2 c^2 r^2} \tag{7,11}$$

dalla quale segue, in base alla (10), che

$$p_i^2 + m_{ik}^2 / 2 r^2 = - m^2 c^2 (1 + \alpha^2 - \gamma^2)^2 \tag{7,12}$$

e ricordando che $p_i^2 = p^2 - E^2/c^2$, si ricava

$$E = \pm c \sqrt{p^2 + m^2 c^2 (1 + \alpha^2 - \gamma^2)^2 + m_{ik}^2 / 2 r^2} \tag{7,13}$$

che generalizza la formula della relativitá ristretta, e mostra che il momento lineare e quello angolare non si conservano piú separatamente.

8 — La meccanica proiettiva del punto libero

L'equazione della meccanica proiettiva del punto libero é la seguente

$$\boxed{dL_{AB}/d\tau = 0} \tag{8,1}$$

Per ottenere da essa l'equazione del moto di una particella libera, osserviamo che dalla (7,9), tenendo presente che $\bar{x}_A \bar{x}_A = r^2$ e che $\bar{v}_A \bar{v}_A = -c^2$, seguono subito le relazioni

$$L_{AB}\bar{x}_A = mr^2\bar{v}_B\,; \quad L_{AB}\bar{v}_A = mc^2\bar{x}_B \quad \text{da cui} \quad L_{AB}\bar{x}_A\bar{v}_B = -mc^2r^2 \tag{8,2}$$

derivando la prima di queste identità rispetto al tempo proprio e tenendo conto della seconda identità e della (1) otteniamo subito l'equazione

$$\boxed{d\bar{p}_A/d\tau = mH^2\bar{x}_A} \tag{8,3}$$

dove si é indicata con $H = c/r$ la costante di Hubble. Tale equazione, che ci descrive il moto di una particella libera nel cronotopo proiettivo di Castelnuovo, é simile alla equazione (4,10) di Gürsey.

Per scriverla sotto forma quadridimensionale, osserviamo che essa si scinde nelle due equazioni di S_4

$$d\bar{v}_i/d\tau = H^2\bar{x}_i\,; \qquad d\bar{v}_5/d\tau = H^2\bar{x}_5$$

Moltiplicando i due membri della prima equazione per $\bar{x}_5$, quelli della seconda equazione per $\bar{x}_i$ e sottraendo membro a membro si avrà

$$\bar{x}_5\frac{d\bar{p}_i}{d\tau} - \bar{x}_i\frac{d\bar{p}_5}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\bar{x}_5\bar{p}_i - \bar{x}_i\bar{p}_5) = \frac{dL_{5i}}{d\tau} = 0$$

e tenendo conto della seconda delle (7,10) arriviamo alla conclusione che la (3) equivale alla seguente equazione non proiettiva

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_i}{1+\alpha^2-\gamma^2}\right) = 0 \tag{8,4}$$

eseguendo la derivazione otteniamo l'equazione della meccanica del punto libero

$$(1 + \alpha^2 - \gamma^2) \frac{dv_i}{dt} = 2 H v_i (\vec{\alpha} \times \vec{\beta} - \gamma) \tag{8,5}$$

la quale é analoga alla (2,2) di MILNE ed alla (5,2) che ho ottenuto a partire dalla equazione di GÜRSEY.

Dalla (4), tenendo presente che $p_i = m v_i = m dx_i/d\tau$ e ricordando la espressione (7,2) del tempo proprio, si ricava la equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{dx_i}{dt} = k_i \sqrt{(1 - \beta^2)(1 + \alpha^2 - \gamma^2) + (\gamma - \vec{\alpha} \times \vec{\beta})^2} \tag{8,6}$$

dove k_i é la costante di integrazione. Tale equazione generalizza quella della meccanica relativistica del punto libero.

9 — INTEGRAZIONE DELLA EQUAZIONE MECCANICA

Per integrare l'equazione della meccanica proiettiva basata sul gruppo di FANTAPPIÉ, poniamoci come al solito nel caso bidimensionale (x, t) ed osserviamo che nella relatività ristretta l'equazione della meccanica del punto libero

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{V}{\sqrt{1 - \beta^2}}\right) = 0 \tag{9,1}$$

si può risolvere in due modi diversi. Il primo metodo consiste nello integrare direttamente la (1), ed indicando con k la costante di integrazione, si ha

$$\beta = k \sqrt{1 - \beta^2} \tag{9,2}$$

la quale ci dà la soluzione generale $x = v_1 t + x_1$, dove si é posto $v_1 = k/\sqrt{1 + k^2}$.

Il secondo metodo consiste invece nell'eseguire prima la derivazione indicata nella (1) e si ottiene così l'equazione

$$(9,3) \qquad (1 - \beta^2 + \beta^2) \frac{dV}{dt} = 0 \quad \text{cioé} \quad \frac{dV}{dt} = 0$$

Gli stessi metodi possono essere applicati alla soluzione della (8,4): per applicare il primo metodo, eseguiamo una prima integrazione ed otteniamo la (8,6), che nel caso bidimensionale si scrive così

$$(9,4) \qquad \beta = k \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}$$

e generalizza la (2). Se allora poniamo $v_1 = k/\sqrt{1 + k^2}$ e facciamo il cambiamento di variabili $\alpha \to y$; $\gamma \to x$, da cui $\beta = y' = d\alpha/d\gamma$, otteniamo la seguente equazione differenziale di Clairaut

$$(9,5) \qquad y - xy' = \pm \sqrt{y'^2/v_1^2 - 1}$$

la quale si integra subito sostituendo alla y' la costante di integrazione v_2. Otteniamo così come integrale generale della (4), espresso nelle primitive variabili, la seguente famiglia di rette

$$(9,6) \qquad \boxed{x = v_2 t \pm r \sqrt{v_2^2/v_1^2 - 1}}$$

Per ottenere l'*integrale singolare* occorre eliminare il parametro v_2 tra la (6) e la derivata rispetto a tale parametro

$$x = v_2 t \pm r \sqrt{v_2^2/v_1^2 - 1}\,; \qquad 0 = t \pm v_2/(v_1 \sqrt{v_2^2 - v_1^2})$$

si ottiene così l'integrale singolare

$$(9,7) \qquad \boxed{x^2 - v_1^2 t^2 + r^2 = 0}$$

che rappresenta l'inviluppo della famiglia di rette (6) e che per $v_1 = c$ viene a coincidere con l'assoluto.

Gli stessi risultati possono essere ottenuti applicando il secondo metodo. In tal caso, dalla (8,4) segue

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{1+\alpha^2-\gamma^2}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{mV}{\sqrt{1-\beta^2+(\alpha-\beta\gamma)^2}}\right)=0$$

ed eseguendo la derivazione, avremo

$$[1-\beta^2+(\alpha-\beta\gamma)^2]\frac{dV}{dt}-$$

$$-\frac{V}{2}\left[-2\frac{V}{c^2}\frac{dV}{dt}+2(\alpha-\beta\gamma)\left(\frac{V}{r}-\frac{\gamma}{c}\frac{dV}{dt}-\frac{V}{c}\cdot\frac{c}{r}\right)\right]=0$$

ed infine, semplificando

$$\boxed{[1+\alpha(\alpha-\beta\gamma)]\frac{dV}{dt}=0} \tag{9,8}$$

che generalizza la (3). Essa si scinde nella solita equazione $dv/dt=0$, che ci dà la soluzione generale $x=v_1 t+x_1$, come nella relatività ristretta, e nella equazione a variabili separabili

$$\frac{dx}{dt}=\frac{r}{t}\left(\frac{r}{x}+\frac{x}{r}\right) \tag{9,10}$$

che ci fornisce l'integrale singolare (7).

Possiamo quindi concludere che le soluzioni della equazione del punto libero ci danno le rette del piano (x, t), che rappresentano dei moti uniformi e che corrispondono alle geodetiche del cronotopo di De Sitter, e le curve che inviluppano tali rette.

Se esaminiamo queste ultime curve, vediamo che per $v_1=c$ si ha l'assoluto $x^2-c^2t^2+r^2=0$, per $v_1<c$ si ottengono delle curve interne all'assoluto, e quindi non appartenenti allo spazio fisico. Infine *solo se $v_1>c$ otteniamo delle curve esterne all'assoluto, e quindi appartenenti allo spazio fisico.*

Queste curve rappresentano dei moti iperbolici, la cui velocità ed accelerazione sono date da

$$V=v_1^2\frac{t}{x};\quad A=-\frac{v_1^2 r^2}{x^3}\quad \text{con}\quad x=\sqrt{v_1^2t^2-r^2} \tag{9,11}$$

La velocità dei punti corrispondenti varia quindi da infinito (per $t = r/v_1$) e diminuisce all'aumentare di t, sino a raggiungere il valore $v_1 > c$, per t tendente all'infinito. *Si tratta quindi di moti non uniformi a velocità iper-c.*

Tali soluzioni singolari, che sono una diretta conseguenza della esistenza dell'assoluto di CAYLEY-KLEIN, potrebbero allora essere collegate alle recenti ricerche di FEINBERG [6], sulla possibilità che esistano delle particelle, dette i «tachioni», che si muovono a velocità iper-c.

Si osservi che nella relatività proiettiva, un corpo può muoversi a velocità iper-c, senza che la sua massa diventi infinita. Infatti la legge della variazione della massa (7,7), se ci riferiamo al caso bidimensionale (x, t) e poniamo $\beta = \pm 1$, si scrive così

$$M = \frac{m(1 + \alpha^2 - \gamma^2)}{\alpha \pm \gamma} \tag{9,12}$$

In particolare, per $\alpha = \mp \gamma$ cioé $x = \mp ct$ essa si riduce alla

$$M = \frac{mr}{2x} \tag{9,13}$$

cioé, *per $V = \pm c$, la massa diventa molto grande, ma si mantiene finita.* Abbiamo pure visto in un precedente lavoro [4] che se un corpo si muove con la legge di fuga $\beta = \alpha : (1 + \gamma)$, e ci poniamo sul cono-luce (dove si ha $\alpha = \pm \gamma$) si ha $M = m$, cioé *può essere raggiunta qualsiasi velocità, senza che si abbia variazione di massa.*

Per integrare le (8,6) nel caso tridimensionale, dividiamo la prima e la seconda equazione per la terza, ed avremo le equazioni a variabili separate

$$dx/dz = k_1/k_3\,; \qquad dy/dz = k_2/k_3$$

che integrate, e tenendo conto delle condizioni iniziali, danno per traiettoria una retta.

Se allora cambiamo il sistema di riferimento, scegliendo l'asse x su tale retta, ci riduciamo al precedente caso bidimensionale.

I moti inerziali sono quindi o rettilinei uniformi, o rettilinei accelerati, con velocità iper-c.

Concludendo, possiamo quindi affermare che se si vuole costruire una meccanica valida su scala cosmica, si possono seguire delle vie diverse e si ottengono le seguenti equazioni del moto di un punto libero (nel caso bidimensionale x, t):

MILNE	$\left(t^2 - \frac{x^2}{c^2}\right) \frac{dV}{dt} = -(x - Vt)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$
GÜRSEY	$\left(1 + \frac{x^2 - c^2 t^2}{4r^2}\right) \frac{dV}{dt} = \frac{c^2}{2r^2}(x - Vt)\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)$
ARCIDIACONO	$\left[1 + \frac{x}{r^2}(x - Vt)\right] \frac{dV}{dt} = 0$

Nella equazione di MILNE, il tempo viene contato a partire dalla origine dei tempi, e si ottengono per integrali i moti uniformi $x = Vt$, ed altri movimenti più o meno complessi, che sarebbe interessante approfondire ulteriormente. L'equazione di MILNE, come ho fatto vedere al n.º 3, puó essere integrata per via elementare.

L'equazione che ho ricavato a partire da quella di GÜRSEY, é assai simile a quella di MILNE, uma non risulta integrabile per via elementare. Essa ammette per soluzioni i moti radiali uniformi $x = Vt$, ed altri moti non uniformi (moti iperbolici).

Infine, l'equazione che ho ottenuto a partire dal gruppo di FANTAPPIÉ, e seguendo l'analogia con la relatività ristretta, risulta la più semplice, sia perché é integrabile per via elementare, e sia perché ci dà per integrale generale i moti uniformi $x = v_1 t + x_1$. Accanto a tali moti appaiono poi dei moti iperbolici a velocità iper-c, i quali sono una diretta conseguenza della esistenza dell'assoluto di CAYLEY-KLEIN, e che scompaiono al límite relativistico.

10 — MODELLI DI UNIVERSO E COSTANTI UNIVERSALI

In questi ultimi anni l'interesse per il cronotopo di DE SITTER é notevolmente aumentato in connessione con le ricerche sulle particelle elementari e la fisica delle alte energie. Vari fisici hanno infatti suggerito l'idea che occorre ormai perfezionare la relatività ristretta e passare all'Universo di DE SITTER, studiato con la tecnica dei gruppi. Ma i vari Autori che si sono occupati dell'argomento [7], lo hanno fatto in modo alquanto frammentario, e cioé senza scrivere esplicitamente le trasformazioni finite del gruppo ed interpretarne il loro significato fisico, ma limitandosi per lo più a considerare le trasformazioni infinitesime e le rappresentazioni lineari del gruppo di De Sitter.

Invece, sin dal 1955, ponendomi dal punto di vista della «teoria degli Universi fisici» del Fantappié [8] ho sviluppato sistematicamente la nuova «relatività proiettiva» in modo perfettamente analogo alla relatività ristretta, ed a tale scopo ho introdotto la distinzione tra spazio «assoluto» (curvo) e spazi «relativi» (spazi piatti tangenti). Ho potuto allora scrivere le trasformazioni finite del gruppo di Fantappié (in coordinate proiettive) delle quali ho dato una semplice interpretazione fisica, che mette in luce il legame con la «doppia scala» dei tempi di Milne e con le più recenti teorie cosmologiche evoluzionarie e stazionarie.

Nel 1958 ho poi fatto vedere che a partire dal cronotopo di De Sitter (con due costanti universali c ed r) si possono ricavare tutta una serie di modelli «limiti» (ottenuti facendo tendere all'infinito una o le due costanti universali) e «ridotti» (eliminando una o più dimensioni).

In particolare, per c ed r infiniti, si ricade nel gruppo di Galileo della fisica classica, per c finito ed r infinito otteniamo il gruppo di Poincaré della fisica relativistica ed infine per c infinito ed r finito si ottiene un nuovo gruppo che descrive un Universo a curvatura costante, ma nel quale la velocità della luce é infinita, e che corrisponde ad una cosmologia di tipo newtoniano [4].

A risultati analoghi sono giunti nel 1968, H. Bacry ed J. M. Levy-Leblond, i quali si sono posti il problema di costruire tutte le possibili cinematiche partendo da alcune ipotesi di carattere generale, e cioé (a) lo spazio é isotropo; (b) la parità e la inversione sono automorfismi del gruppo cinematico (c) le trasformazioni inerziali in ogni direzione formano un sottogruppo non compatto [9]. Arrivano allora alla conclusione che vi sono sotto tali ipotesi *otto* tipi di algebre di Lie, ai quali corrispondono *undici* possibili cinematiche, tra le quali le cinematiche basate sui due gruppi di De Sitter (a curvatura positiva e negativa). Al primo gruppo corrisponde un Universo in espansione, nel quale un punto libero, posto nella origine si allontanerà con legge esponenziale, mentre al secondo gruppo corrisponde un Universo oscillante nel quale un punto libero oscillerà attorno alla origine:

$$x = V t_0 \sinh t/t_0 \,; \qquad x = V t_0 \sin t/t_0 . \tag{10,1}$$

dove t_0 é un tempo caratteristico.

Più recentemente T.G. PAVLOPOULOS ha sostenuto l'idea che la relatività é incompleta, ed occorre perfezionarla non più nel senso della relatività generale, ma con la tecnica dei gruppi [10]. Egli infatti osserva che con due sole costanti universali c (velocità della luce) ed h (costante di PLANCK) non si può costruire una espressione con le dimensioni di una massa. Occorre quindi una teoria nella quale intervenga una lunghezza universale l_0, la quale sia la stessa per tutti gli osservatori, cosa che evidentemente é incompatibile con la relatività ristretta, nella quale le lunghezze vengono a dipendere dallo stato di moto dell'osservatore. Solo allora si potrà costruire un sistema di unità «naturali» di lunghezza, tempo e massa:

$$L = l_0 \,; \qquad T = l_0/c \,; \qquad M = h/l_0 c \tag{10,2}$$

Secondo il PAVLOPOULOS, per costruire una siffatta teoria, occorre per prima cosa generalizzare le equazioni di MAXWELL, le quali hanno come modello un mezzo elastico, che permette solo onde trasversali. Per generalizzare tali equazioni occorre allora costruire un substrato con prop ietá più generali, per esempio un continuo di punti con microstruttura orientata nel quale sono possibili non solo onde trasversali, ma anche onde longitudinali.

Il cronotopo di CASTELNUOVO e le equazioni di MAXWELL generalizzate, che ho proposto nel 1955, e che rappresentano il campo magnetoidrodinamico [4], soddisfano ad alcune esigenze espresse dal PAVLOPOULOS, ma a mio avviso, le tre costanti universali c, r ed h, per avere un ruolo nella formulazione delle leggi fisiche, debbono essere inserite nella struttura stessa del gruppo base, cosa che può essere fatta adoperando il «gruppo conforme» (isomorfo alle rotazioni di S_6), nel quale intervengono i moti uniformemente accelerati, e che risulta a 15 parametri. Si avrebbe allora una teoria di MAXWELL che descrive un campo a 15 componenti, di cui le prime 10 corrispondono al campo magneto-idrodinamico e le altre 5 ad un nuovo campo, il quale godrebbe della proprietà di apparire o sparire per moti uniformemente accelerati, e quindi potrebbe essere il campo gravitazionale. In tal modo il principio di equivalenza di Einstein verrebbe incluso nel gruppo conforme, e si potrebbe avere una teoria della gravitazione su basi gruppali.

Se infatti ci poniamo dal punto di vista della teoria degli Universi fisici, nella quale ad ogni gruppo corrisponde un modello di Universo, e cioé una relatività ristretta ed una relatività generale (nel senso di Cartan), si arriva alla conclusione che la nozione stessa di «campo gravitazionale» verrebbe a dipendere dal gruppo, nel senso che passando da un gruppo al successivo, degli effetti che nella precedente teoria erano di natura gravitazionale, adesso non lo sono più.

Per esempio, se si passa dal gruppo di Poincaré a quello di Fantappié, si vede che adesso la curvatura globale dell'universo non é più di natura gravitazionale, perché si ha in assenza di materia, mentre se passiamo al gruppo conforme, la presenza di moti uniformemente accelerati nel gruppo, implica un nuovo significato da assegnare al campo gravitazionale.

Uno studio del gruppo conforme, fatto con gli stessi metodi della relatività ristretta, e tenendo conto dei risultati della relatività proiettiva dovrebbe quindi risultare assai interessante, perché potrebbe farci comprendere meglio il legame tra le leggi del macrocosmo e quelle del microcosmo, come del resto é richiesto dalle recenti ricerche sulla fisica delle alte energie e sulla astrofisica.

BIBLIOGRAFIA

(1) E.A. MILNE, *Kinematic Relativity*, Oxford 1948, cap. V.

(2) E.A. MILNE, *Relativity, Gravitation and World Structure*, Oxford 1935, pag. 141.

(3) F. GÜRSEY, *Introduction to the De Sitter Group*, in «Group Theoretical concepts and Methods in Elementary Particle Physics, Gordon and Breach, New York, 1964, pag. 365.

(4) G. ARCIDIACONO, *La relatività di Fantappiè* (1958), *Relatività finale e cosmologia* (1960), *Sulle trasformazioni finite dei gruppi delle rotazioni* (1963), *Gli spazi di Cartan e la teorie unitarie* (1964), *Relatività cinematica e cosmologia proiettiva* (1965), *L'Universo di De Sitter e la relatività proiettiva* (1968), *Magnetoidrodinamica e cosmologia* (1968), su Collectanea Mathematica.

(5) L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa 1902, pag. 386. G. CASTELNUOVO, *L'Universo di De Sitter*, Rend. Lincei, *12*, 263 (1930); *De Sitter's Universe and the motion of Nebulae*, Monthly Not. *91*, 829, (1931).

(6) G. FEINBERG, *Possibility of Faster-than-Light Particles*, Physical Review, *159*, 1106 (1967); M. GLÜCK, *Quantum-mechanical description of tachyons and their interactions*, Nuovo Cimento LXII-A, 791 (1969).

(7) Tra i lavori più recenti ricordiamo: P. BURCEV, *De Sitter Model for Stable Particles*, Nuovo Cimento LVI, A, 795 (1968); N.A. CHERNIKOV, E.A. TAGIROV, *Quantum theory of scalar field in De Sitter space-time*, Ann. Poinc. IX, 109 (1968); MAHMOUD M. BAKRI, *De Sitter Symmetric field theory*, Journ. Math. Phys, *10* 298 (1969); L. CASTELL, *Goldstone Particles in De Sitter Space*, Nuovo Cimento, LXI-A, 585 (1969); T. O. PHILIPS, E. P. WIGNER, *De Sitter Space and positive energy*, in «Group Theory and its applications» New York 1968, e quelli citati nelle memorie precedenti.

(8) L. FANTAPPIÈ, *Sui fondamenti gruppali della fisica*, Collectanea Mathematica, XI, 77 (1959).

(9) H. BACRY, J.M. LEVY-LEBLOND, *Possible Kinematics*, Journ. Math. Phys. x, 1605 (1968).

(10) T.G. PAVLOPOULOS, *The Special Theory of Relativity and the Problem of the Universal Constants*, Nuovo Cimento, LX-B, 93 (1969); *Breakdown of Lorentz Invariance*, Phys. Rev. *159*, 1106 (1967). J. ROSEN, *Mass, Momentum and the conformal group*, Nuovo Cimento LXII-A, 648, (1969)