ZUR FOURIERENTWICKLUNG PLUSGEQUANTELTER FELDOPERATOREN

JOSEPH WEIER (Bonn)

Die übliche Darstellung, eines plusgequantelten Feldoperators Ψ ist

$$\Psi(x) = \Sigma \int \frac{d\mathbf{y}}{2\,\omega} A_s(\mathbf{y})\, u_s(\mathbf{y})\, e^{i(\mathbf{yx} - \omega x^0)} + \Sigma \int \frac{d\mathbf{y}}{2\,\omega} B_s^*(\mathbf{y})\, v_s(\mathbf{y})\, e^{-i(\mathbf{yx} - \omega x^0)}$$

Dabei ist $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$ ein reeller 3-Vektor, und die Integration erstreckt sich über den ganzen reellen 3-Raum. Ebenso sind x^1, x^2, x^3, x^0 reelle Zahlen, es ist $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$, ferner

$$\omega = {}_+ (\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$$

mit einer reellen Zahl m. Der Index s durchläuft die Zahlen 1 und 2. Bei festem $\mathbf{y}$ sind $u_s(\mathbf{y})$, $s = 1, 2$, die zum Eigenwert im und $v_s(\mathbf{y})$, $s = 1, 2$, die zum Eigenwert -im gehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$\Sigma y^\nu \gamma^\nu \quad \text{mit} \quad y^4 = i\,\omega.$$

Für alle $\mathbf{y}$ und s sind $A_s(\mathbf{y})$ und $B_s(\mathbf{y})$ linears Operatoren.

Im folgenden wird eine neue Herleitung für die Darstellbarkeit plusgequantelter Feldoperatoren in der obigen Form angegeben. Unter anderem werden die komplexen 4-Vektoren u_s und v_s, $s = 1, 2$, zu einem konreten Diracquatrupel $(\gamma^1, \ldots, \gamma^4)$ explizit berechnet. Eine komplexwertige Funktion f über dem reellen Lorentzraum L, die sich als

$$f(x) = \int_M F(y)\, e^{iyx}\, dM$$

darstellen lässt, heisse hyperbolisch darstellbar. Dabei ist M die 3-Mannigfaltigkeit $y^2 + m^2 = 0$ in L. Es heisse F die hyperbolische Fouriertransformierte von f. Die hyperbolisch darstellbaren Funktionen und die Lösungen von $\Box - m^2 = 0$ fallen im wesentlichen zusammen. Welche Eigenschaften der üblichen euklidischen Fouriertransformierten übertragen sich auf die hyperbolische? Die Analogie kann nicht glatt sein, da M und der euklidische 3-Raum verschiedene Zusammenhangseigenschaften haben. Einfache Eigenschaften der hyperbolischen Fouriertransformierten sind unten bewiesen.

Die nachfolgenden Überlegungen gehören noch dem Teil der Theorie an, der mathematisch gesichert ist. Die Situation in der Nachbarschaft bezeichnet D. KASTLER schon als décourageante du point de vue mathématique. Aber auch für freis Felder liegen verschiedene Existenz- und Eindeutigkeitssätze, die immer wieder benutzt werden, nicht mehr im Anwendungsbereich dessen, was bekannte Darstellungen der Fourieranalysis wie (1) bringen. Dies zeigen strenge Aufsätze wie (2), (3), wo mit grösserem Aufwand verhältnismässig einfache Zerlegungssätze bewiesen sind.

1. LORENTZQUADRUPEL KOMPLEXER 4-MATRIZEN

Die Cliffordalgebra $C(L')$ über dem komplexen Lorentzzraum L' und die Algebra A der komplexen 4-Matrizen sind isomorph. Ein natürlicher Isomorphismus von $C(L')$ auf A ergibt sich wie folgt. Sind $x = (x^1, x^2, x^3, x^0)$ und $y = (y^1, y^2, y^3, y^0)$ Punkte aus L', so ist $x \cdot y = \Sigma_{\nu=1}^{3} x^\nu y^\nu - x^0 y^0$. Es seien dann e_1, e_2, e_3, e_0 die Vektoren $(1, 0, 0, 0), \ldots, (0, 0, 0, 1)$, so dass also $e_\nu \cdot e_\nu = 1$ für $\nu = 1, 2, 3$ und $e_0 \cdot e_0 = -1$. Bedeutet $\vee$ den Produktoperator in $C(L')$, so wird $C(L')$ von den Elementen e_ν, $e_\mu \vee e_\nu \, (\mu < \nu)$, $e_\gamma \vee e_\mu \vee e_\nu \, (\lambda < \mu < \nu)$, $e_1 \vee e_2 \vee e_3 \vee e_0$ und 1 linear aufgespannt.

Seien jetzt $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, die üblichen Paulimatrizen. Setzt man dann

$$\beta^\nu = \begin{pmatrix} 0 & -i\,\sigma_\nu \\ i\,\sigma_\nu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \qquad \beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & iE \\ iE & 0 \end{pmatrix},$$

wobei E die zweireihige Einheitsmatrix bedeutet, so ist $\beta^\mu \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\mu = 0$ für $\mu \neq \nu$, und es ist $(\beta^1)^2 = (\beta^2)^2 = (\beta^3)^2 = -(\beta^0)^2 = 1$. Die β^ν

erzeugen die Algebra A. Mit $\gamma^\nu = \beta^\nu$ für $\nu = 1, 2, 3$, $\gamma^4 = -i\,\beta^0$ bilden die ein Diracquadrupel: es ist $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\,\delta^{\mu\nu}$ für alle μ, ν. Durch die Zuordnung $e_\nu \longleftrightarrow \beta^\nu$, $\nu = 1, 2, 3, 0$, wird $C(L')$ isomroph auf A abgebildet.

2. Die Eigenwerte hyperbolischer Matrizen

Die Bedeutung von β^ν und γ^ν sei dieselbe wie im ersten Abschnitt. Ist $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$ ein reeller 3-Vektor und $\omega = {}_+(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$, so heisse die Matrix

$$\Gamma = \Sigma y^\nu \gamma^\nu \quad \text{mit} \quad y^4 = \pm\, i\,\omega$$

eine «*hyperbolische Matrix*». Wegen $\beta^4 = i\gamma^4$ ist jede hyperbolische Matrix eine reelle Linearkombination aus den Matrizen β^ν des Lorentzquadrupels $(\beta^1, \ldots, \beta^4)$.

Sei $\Gamma = \Sigma y^\nu \gamma^\nu$ eine hyperbolische Matrix. Mit

$$A = -\,i\,\Sigma_{\nu=1}^3 y^\nu \sigma_\nu + y^4 E, \qquad B = i\,\Sigma_{\nu=1}^3 y^\nu \sigma_\nu + y^4 E$$

ist dann

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(*) \qquad A\,B = B\,A = -\,m^2, \qquad \Gamma^2 = -\,m^2.$$

Zum Beweis von

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$$

braucht man nur die Definition der β^ν einzusetzen. Verbleibt, (*) zu beweisen:

$$\begin{aligned} A\,B &= (y^4 E - i\,\Sigma y^\nu \sigma_\nu)\,(y^4 E + i\,\Sigma y^\nu \sigma_\nu) \\ &= (y^4)^2 E - (i\,\Sigma y^\nu \sigma_\nu)^2 = (y^4)^2 E + (\Sigma y^\nu \sigma_\nu)^2. \end{aligned}$$

Nun ist $\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2\,\delta_{\alpha\beta}$, daher

$$(\Sigma y^\nu \sigma_\nu)^2 = \Sigma_{\alpha,\beta}\, y^\alpha y^\beta \sigma_\alpha \sigma_\beta = \Sigma_{\alpha<\beta} + \Sigma_{\alpha>\beta} + \Sigma_{\alpha=\beta} = \Sigma\,(y^\alpha)^2 \sigma_\alpha^2$$
$$= \mathbf{y}^2 E.$$

Dabei ist benutzt, dass

$$\Sigma_{\alpha<\beta} + \Sigma_{\alpha>\beta} = \Sigma_{\alpha<\beta} + \Sigma_{\beta>\alpha}\, y^\beta y^\alpha \sigma_\beta \sigma_\alpha$$
$$= \Sigma_{\alpha<\beta}\, y^\alpha y^\beta (\sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha) = 0.$$

Also ist

$$A\,B = \mathbf{y}^2 + (\pm\, i\,\omega)^2 = \mathbf{y}^2 - \omega^2 = -\,m^2.$$

Entsprechend ist

$$BA = (y^4 E + i\,\Sigma y^\nu \sigma_\nu)\,(y^4 E - i\,\Sigma y^\nu \sigma_\nu) = (y^4)^2 E - (i\,\Sigma y^\nu \sigma_\nu)^2,$$

woraus wie für $A\,B$ folgt, dass $A = -\,m^2$. Schliesslich ist

$$\Gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\,B & 0 \\ 0 & BA \end{pmatrix},$$

wegen $A\,B = BA = -\,m^2$ also $\Gamma^2 = -\,m^2$, wie behauptet.

Aus $\Gamma^2 = -\,m^2$ folgt:

Mit einem reellen 3-*Vektor* $\mathbf{y} = (y^1, y^2, y^3)$, *mit* $\omega = {}_+(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$, $y_4 = \pm\, i\,\omega$ *und* $\Gamma = \Sigma y^\nu \gamma^\nu$ *hat* Γ^2 *die charakteristische Gleichung*

$$(\lambda + m^2)^4 = 0,$$

es ist also $\lambda = -\,m^2$ *vierfacher Eigenwert der Matrix* Γ^2.

Ohne die Gleichung $\Gamma^2 = -\,m^2$ lässt sich dieses Ergebnis auch so einsehen. Allgemein gilt: ist

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix},$$

und sind χ, χ_1, χ_2 die charakteristischen Polynome von C, C_1, C_2, so ist $\chi = \chi_1 \chi_2$. Danach ist

$$\chi\,(\Gamma^2) = \chi\,(A\,B)\,\chi\,(BA).$$

Weiter gilt allgemein: für beliebige quadratische Matrizen M_1 und M_2 haben $M_1 M_2$ und $M_2 M_1$ dasselbe charakteristische Polynom. Somit

$$\chi(\Gamma^2) = (\chi(A B))^2.$$

Wegen $A B = -m^2 E$ folgt hieraus nochmals die Behauptung.

Die charakteristischen Wurzeln der Matrix $\Gamma = \Sigma y^\nu \gamma^\nu$ mit $y^4 = \pm i\omega$, $\omega = {}_{+}(\mathrm{y}^2 + m^2)^{1/2}$ sind die Zahlen im und -im, deren jede die Vielfachheit 2 hat.

Beweis. Wegen $\Gamma^2 = -m^2$ ist $\Delta^2 = 1$, wenn man $\Delta = (1/im)\,\Gamma$ setzt. Allgemein gilt: mit $M^r = E$, r natürlich, sind sämtliche Wurzeln der Matrix M Wurzeln der Einheit. Es ist also $|\Delta - \mu| = 0$ für $\mu = \pm 1$, und sonst hat die Gleichung $|\Delta - \mu| = 0$ keine Wurzeln. Daher ist

$$|im\,\Delta - im\,\mu| = 0$$

für $\mu = \pm 1$, woraus wegen $im\,\Delta = \Gamma$ die Behauptung folgt.

Aussagen über die Wurzeln von Γ erhält man auch so. Allgemein gilt: hat M die charakteristischen Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, so hat M^r die Wurzeln $\lambda_1^r, \lambda_2^r, \ldots$. Seien jetzt $l_1, \ldots, l_4$ die charakteristischen Wurzeln von Γ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ die von Γ^2. Dann ist also $\lambda_j = (l_j)^2$, daher $l_1^2 \ldots l_4^2 = \lambda_1 \ldots \lambda_4 = (\lambda)^4 = m^8$, somit $l_1 \ldots l_4 = \pm m^4$. Allgemein ist die Spur einer Matrix gleich der Summe ihrer charakteristischen Wurzeln. Wegen spur $\Gamma = 0$ also $l_1 + \ldots + l_4 = 0$.

3. Die Eigenvektoren hyperbolischer matrizen

Wie im letzten Abschnitt bezeichne Γ die Matrix $\Sigma y^\nu \gamma^\nu$ mit $y^4 = \pm i\omega$. Mit $\Delta = (im)^{-1}\,\Gamma$ ist, wie dort gezeigt, $\Delta^2 = E$.

Allgemein gilt: eine komplexe Matrix ist nur dann periodisch, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich ist und lauter Wurzeln ± 1 hat.

Weiter gilt: dann und nur dann ist eine komplexe n-Matrix diagonalisierbar, wenn sie n linear unabhängige Eigenvektoren hat. Also ist

$$\Delta = S D S^{-1}$$

mit einer Diagonalmatrix D. Dann ist aber auch

$$\Gamma = im\,\Delta = S\,(im\,D)\,S^{-1},$$

also Γ diagonalisierbar. Somit besitzt Γ vier linear unabhängige Eigenvektoren. Wir haben also gezeigt: *jede hyperbolische Matrix besitzt vier linear unabhängige Eigenvektoren.*

Weiter gilt:

Seien u, v zu verschiedenen Eigenwerten gehörige Eigenvektoren der hyperbolischen Matrix Γ. Dann stehen u und v im Sinne

$$u \cdot v = \Sigma \bar{u}^\nu v^\nu = 0$$

aufeinander senkrecht.

Beweis. Mit $G = \Sigma_{\nu=1}^{3} y^\nu \gamma^\nu$ und $\Delta = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$\Gamma = G \pm i\,\omega\,\Delta.$$

Es ist

$$\Delta^2 = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} EE & 0 \\ 0 & EE \end{pmatrix} = 1.$$

Weiter ist

$$G^2 = \mathbf{y}^2.$$

Es ist nämlich

$$\begin{aligned}(\Sigma y^\alpha \gamma^\alpha)\,(\Sigma y^\beta \gamma^\beta) &= \Sigma_{\alpha,\beta}\, y^\alpha y^\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta = \Sigma_{\alpha<\beta} + \Sigma_{\beta>\alpha} + \omega_{\alpha=\beta} \\ &= \Sigma_{\alpha<\beta}\, y^\alpha y^\beta \gamma^\alpha \gamma^\beta + \Sigma_{\beta>\alpha}\, y^\beta y^\alpha \gamma^\beta \gamma^\alpha + \mathbf{y}^2 \\ &= \Sigma_{\alpha<\beta}\, y^\alpha y^\beta\,(\gamma^\alpha \gamma^\beta + \gamma^\beta \gamma^\alpha) + \mathbf{y}^2 = \mathbf{y}^2,\end{aligned}$$

wie behauptet.

Die Matrix G ist hermitisch: Die Summe hermitischer Matrizen ist hermitisch. Wegen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} & & & -i \\ & & -i & \\ & i & & \\ i & & & \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} & & -i & \\ & & & i \\ i & & & \\ & -i & & \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen $\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ sind also hermitisch. Da die Zahlen y^1, y^2, y^3 reellen sind, ist also G hermitisch.

Sei jetzt

$$\Gamma u = (im)\, u, \qquad \Gamma v = (-\, im)\, v.$$

Im Sinne der Matrizenmultiplikation, also nicht im Sinne des obigen Skalarproduktes $u \cdot v$, ist dann

$$(\overline{\Gamma u})^T (\Gamma v) = (-\, im)\, \bar{u}^T (-im)\, v = -\, m^2 \bar{u}^T v.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}(\overline{\Gamma u})^T (\Gamma v) &= \{\overline{(G \pm i\,\omega\,\Delta)\, u}\}^T \{(G \pm i\,\omega\,\Delta)\, v\} \\ &= \bar{u}^T (\overline{G}^T \mp i\,\omega\,\Delta)\,(G \pm i\,\omega\,\Delta)\, v \\ &= \bar{u}^T (G^2 - (i\,\omega\,\Delta)^2)\, v \\ &= \bar{u}^T (\mathbf{y}^2 + \omega^2 \Delta^2)\, v = (\mathbf{y}^2 + \mathbf{y}^2 + m^2)\, \bar{u}^T v.\end{aligned}$$

Dies ist nur für $\bar{u}^T\, v = 0$ möglich.

4. Grundlösungen im Vektorraum der Feldoperatoren

Mit reellen Zahlen ζ, a^1, a^2, a^3, a^0 und $\mathbf{a}^2 = \Sigma_{\nu=1}^3 (a^\nu)^2$ ist die Funktion $\psi(x) = \zeta \exp\, (i\, \Sigma\, a^\nu x^\nu)$ genau dann Lösung von $\square - m^2 = 0$, wenn

$$a^0 = \pm\, (\mathbf{a}^2 + m^2)^{1/2}. \tag{1}$$

Wegen $\square = \Sigma_{\nu=1}^3\, \partial_\nu\, \partial_\nu - \partial_0\, \partial_0$ ist

$$(\square - m^2)\, \psi(x) = \{\Sigma_{\nu=1}^3 (i\, a^\nu)^2 - (i\, a^0)^2 - m^2\}\, \psi(x).$$

Sei erstens (1) erfüllt. Dann ist offenbar $\{...\} = 0$. Es sei zweitens ψ Lösung. Dann ist $\{...\}\, \psi(x) = 0$, daher auch $\{...\} = 0$, also gilt (1). Die Bedingung (1) kann auch in

$$a^2 + m^2 = 0 \tag{1'}$$

mit $a = (a^1, ..., a^0)$ umgeformt werden.

Mit reellen Zahlen $\zeta_j \neq 0$, a_j^ν, $\nu = 1, 2, 3, 0$, $j = 1, 2, \ldots, r$, mit $\mathbf{a}_j^2 = \Sigma_{\nu=1}^3 (a_j^\nu)^2$ und $a_j = (a_j^1, \ldots, a_j^0)$ seien die Vektoren $a_1, a_2, \ldots$ linear unabhängig. Es sei

$$\psi(x) = \Sigma \zeta_j \exp(i \Sigma a_j^\nu x^\nu)$$

eine Lösung von $\Box - m^2 = 0$. Dann ist

$$a_j^0 = \pm (\mathbf{a}_j^2 + m^2)^{1/2} \qquad \text{für alle } j. \tag{2}$$

Mit $\varphi_j(x) = \exp(i \Sigma a_j^\nu x^\nu)$ ist

$$(\Box - m^2) \psi = \Sigma \zeta_j \{ (a_j^0)^2 - (\mathbf{a}_j)^2 - m^2 \} \varphi_j.$$

Zum Beweis genügt es also zu zeigen, dass die Funktionen φ_j linear unabhängig sind.

Es gilt aber der Satz: die reellen Zahlen $r_1, \ldots, r_n$ seien paarweis verschieden, dann sind die Funktionen $\exp(r_1 t), \ldots, \exp(r_n t)$ linear unabhängig. Verallgemeinerung dieses Resultates auf 4 Dimensionen liefert die Unabhängigkeit der φ_j.

Seien a^ν und b^ν ganze Zahlen, ferner $\mathbf{a} = 2\pi(a^1, a^2, a^3)$ und $\mathbf{b} = 2\pi(b^1, b^2, b^3)$. *Mit* $\omega = {}_+(\mathbf{a}^2 + m^2)^{1/2}$ *und* $\Omega = {}_\pm (\mathbf{b}^2 + m^2)^{1/2}$ *sei*

$$\varphi(x) - (2\pi)^{-3/2} (2\omega)^{-1/2} e^{i(\mathbf{a}\mathbf{x} - \omega x^0)}, \quad \psi(x) = (2\pi)^{-3/2} (2\Omega)^{-1/2} e^{i(\mathbf{b}\mathbf{x} - \Omega x^0)}$$

Mit

$$\varphi \cdot \psi = i \int_0^{2\pi} d\mathbf{x} \{ \overline{\varphi(x)} \cdot \partial_0 \psi(x) - \partial_0 \overline{\varphi(x)} \cdot \psi(x) \}$$

ist dann

$$\varphi \cdot \psi = 0 \quad \textit{für} \quad \mathbf{a} \neq \mathbf{b} \quad \textit{und} \quad \varphi \cdot \psi = 1 \quad \textit{fur} \quad \mathbf{a} = \mathbf{b}. \tag{3}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}\varphi \cdot \psi = \frac{i}{2(2\pi)^3} \omega^{-1/2} \Omega^{-1/2} \int_0^{2\pi} d\mathbf{x} \{ & e^{-i(\mathbf{a}\mathbf{x} - \omega x^0)} (-i\Omega) e^{i(\mathbf{b}\mathbf{x} - \Omega x^0)} \\ & - (i\omega) e^{-i(\mathbf{a}\mathbf{x} - \omega x^0)} e^{i(\mathbf{b}\mathbf{y} - \Omega x^0)} \} \\ = \frac{\omega^{-1/2} \Omega^{-1/2}}{2(2\pi)^3} (\Omega + \omega) \int_0^{2\pi} & d\mathbf{x}\, e^{i(\mathbf{b} - \mathbf{a})\mathbf{x}} e^{i(\omega - \Omega) x^0}\end{aligned}$$

Ist $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, so ist $\int d\mathbf{x}\, e^{i(\mathbf{b}-\mathbf{x})\mathbf{x}} = 0$. Ist $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, so ist

$$\int d\mathbf{x}\, e^{i(\mathbf{b}-\mathbf{a})\mathbf{x}} = \int d\mathbf{x} = (2\pi)^3,$$

woraus die Behauptung folgt.

Mit $\omega = {}_{+}(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$, $y^4 = i\,\omega$ *und einem komplexen* 4-*Vektor* u *ist*

$$\psi(x) = u\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)} \tag{4}$$

dann und nur dann Lösung von $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$, *wenn* u *Eigenvektor der Matrix* $\Sigma y^\nu \gamma^\nu$ *zum Eigenwert* $+ im$ *ist.*

Beweis. Sei erstens ψ Lösung. Dann ist

$$(\gamma^\nu \partial_\nu)\,\psi = \Sigma_{\nu=1}^{3}\,(i y^\nu)\,\gamma^\nu \psi + \gamma^4 \partial_4 \psi.$$

Wegen $x^4 = i x^0$ und $x^0 = -\,i x^4$ ist

$$\partial^4 = \frac{\partial}{\partial x^4} = \frac{\partial}{\partial x^0}\frac{d x^0}{d x^4} = -\,i\,\partial_0,$$

also

$$\partial^4 \psi = -\,i\,\partial_0 \psi = -\,i\,(-\,i\,\omega)\,\psi = i y^4 \psi$$

also

$$(\gamma^\nu \partial_\nu)\,\psi = i\,(\Sigma_{\nu=1}^{4}\, y^\nu \gamma^\nu)\,\psi.$$

Daher

$$(\gamma^\nu \partial_\nu + m)\,\psi = (i\,\Sigma y^\nu \gamma^\nu + m)\,\psi.$$

Nach Voraussetzung ist dies Null, also

$$(\Sigma y^\nu \gamma^\nu - im)\,\psi = 0.$$

Durch $\exp\,(i\,(\mathbf{y}\,\mathbf{x} - \omega\, x^0))$ kann man kürzen. Also ist u Eigenvektor zum Eigenwert im.

Zweitens sei u Eigenvektor der Matrix $\Sigma y^\nu \gamma^\nu$ zum Eigenwert im. Wie im ersten Falle ist wieder

$$(\gamma^\nu \partial_\nu)\,\psi = i\,(\Sigma_{\nu=1}^{4}\, y^\nu \gamma^\nu)\,\psi.$$

Dann ist

$$(\gamma^\nu \partial_\nu + m)\,\psi = (i\,\Sigma_{\nu=1}^{4}\, y^\nu \gamma_\nu + m)\,\psi = i\,(\Sigma_{\nu=1}^{4}\, y^\nu \gamma^\nu - im)\,\psi.$$

Nach Voraussetzung ist u Eigenvektor zum Eigenwert im, also

$$(\Sigma_{\nu=1}^4 y^\nu \gamma^\nu - im)\, u = 0.$$

Somit auch $(\gamma^\nu \partial_\nu + m)\, \psi = 0$, wie behauptet.

Mit $y^4 = -i\,\omega$ *und einem komplexen* 4-*Vektor* v *ist*

$$\psi(x) = v\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} + \omega x^0)} \tag{5}$$

dann und nur dann Lösung von $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$, *wenn* v *Eigenwert der Matrix* $\Sigma y^\nu \gamma^\nu$ *zum Eigenwert* $+ im$ *ist.*

Zunächst ist wieder

$$(\gamma^\nu \partial_\nu)\, \psi = \Sigma_{\nu=1}^3 (i y^\nu)\, \gamma^\nu \psi + \gamma^4 \partial_4 \psi,$$

wegen $\partial_4 = -i\,\partial_0$ weiter

$$\begin{aligned}\gamma^4 \partial_4 \psi &= -i\gamma^4 \partial_0 \psi = -i\gamma^4 (i\,\omega)\, \psi \\ &= i(-i\,\omega)\, \gamma^4 \psi = i y^4 \gamma^4 \psi,\end{aligned}$$

daher $(\gamma^\nu \partial_\nu)\, \psi = i\, (\Sigma_{\nu=1}^4 y^\nu \gamma^\nu)\, \psi$. Der Beweis verläuft dann wie für (4).

Es lassen sich (4) und (5) auch so zusammenfassen.

Mit reellen Zahlen a^1, a^2, a^3, a^0 *und einem vierkomponentigen komplexen Vektor* t *ist*

$$\psi(x) = t\, e^{i \Sigma a^\nu x^\nu} \tag{6}$$

dann und nur dann Lösung von $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$, *wenn gleichzeitig* (*) *und* (**) *gilt*: (*) *es ist*

$$a^0 = \pm (\mathbf{a}^2 + m^2)^{1/2},$$

wobei $\mathbf{a}^2 = (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2$ *gesetzt ist*; (**) *mit* $a^4 = -i a^0$ *ist* t *Eigenvektor der Matrix* $\Sigma a^\nu \gamma^\nu$ *zum Eigenwert* $+ im$.

Ist nämlich a^0 positiv, so liegt der Fall (5) vor. Ist a^0 negativ, so ist (6) mit (4) gleichwertig, es ist dann $a^4 = i(-a^0) = i\,\omega$.

5. Fourierzerlegung spinorieller Feldoperatoren

Bezüglich eines festen Koordinatensystems ist das Spinorfeld ψ ein vierkomponentiges Feld komplexwertiger Skalarfunktionen ψ_α. Man kann also ψ beliebig genau approximieren durch eine endliche Summe

$$\varphi(x) = \Sigma f_\nu(x)\, T_\nu,$$

wobei die T_ν konstante komplexe 4-Vektoren und die f_ν komplexwertige Skalarfunktionen sind. Verschwindet ψ ausserhalb einer hinreichend grossen Vollkugel, so lassen sich die f wiederum durch endliche Summen aus komplexen e-Funktionen beliebig genau approximieren. Mit den Ergebnissen des letzten Abschnittes gelangt man so zu folgendem Satz.

Jede Lösung von $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$ lässt sich in der Gestalt

$$\psi(x) = \Sigma \int_M a_s(y)\, t_s(y)\, e^{iyx}\, dM \tag{1}$$

darstellen, wobei $t_1(y)$ und $t_1(y)$ für $y \in M_+$ linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $\Sigma\, z^\nu \gamma^\nu$ mit

$$z^\nu = y^\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1,\ 2,\ 3, \qquad z^4 = i\,\omega, \qquad \omega = {}_{\pm}(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2},$$

zum Eigenwert $+\,im$, für $p \in M_-$ linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $\Sigma\, z^\nu \gamma^\nu$ mit

$$z^\nu = y^\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1,\ 2,\ 3, \qquad z^4 = -\,i\,\omega$$

zum Eigenwert $+\,im$ sind. Umgekehrt gilt: sind die komplexwertigen Funktionen a_1 und a_2 so gewählt, dass (1) *existiert, so ist* (1) *eine Lösung von $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$.*

Mit M_+ ist die positive und mit M_- die negative Hälfte von M bezeichnet. Geht man auf die differentialgeometrische Definition des Flächen-integrals zurück, so lässt sich zeigen:

$$\int_{M_+} f(y)\, dM = m \int \frac{d\,\mathbf{y}}{\omega} f(\mathbf{y},\ \omega), \tag{2}$$

$$\int_{M_-} f(y)\, dM = m \int \frac{d\,\mathbf{y}}{\omega} f(\mathbf{y},\ -\,\omega). \tag{2'}$$

Dabei ist f irgendeine komplexwertige, vektorwertige oder operatorwertige Funktion über M.

Es gestattet (1) eine Reihe einfacherer Folgerungen.

Jede Lösung von $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$ lässt sich in der Gestalt

$$\begin{aligned}\psi(x) = \Sigma \int \frac{d\,\mathbf{y}}{2\,\omega}\, a_s(\mathbf{y},\ \omega)\, t_s(\mathbf{y},\ \omega)\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)} \\ + \Sigma \int \frac{d\,\mathbf{y}}{2\,\omega}\, a_s(-\,\mathbf{y},\ -\,\omega)\, t_s(-\,\mathbf{y},\ -\,\omega)\, e^{-i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)}\end{aligned} \tag{3}$$

darstellen. Dabei sind $t_s(\mathbf{y}, \omega)$, $s = 1, 2$, *linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix* $\Sigma z^\nu \gamma^\nu$ *mit*

$$z^\nu = y^\nu \quad \textit{für} \quad \nu = 1, 2, 3, \qquad z^4 = i\omega$$

zum Eigenwert im, *und die* $t_s(-\mathbf{y}, -\omega)$ *sind linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix* $\Sigma z^\nu \gamma^\nu$ *zum Eigenwert* $-$ *im.*

Beweis. Wegen (1) und (2), (2′) ist zunächst die Darstellung

$$\psi(x) = \Sigma \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega} a_s(\mathbf{y}, \omega)\, t_s(\mathbf{y}, \omega)\, e^{i(\mathbf{yx} - \omega x^0)} + \Sigma \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega} a_s(\mathbf{y}, -\omega)\, t_s(\mathbf{y}, -\omega)\, e^{i(\mathbf{yx} + \omega x^0)}$$

möglich. Durch die Substitution $\mathbf{y} = -\mathbf{z}$ wird $d\mathbf{y} = -d\mathbf{z}$, und die Integrationsgrenzen vertauschen sich. Es ist dann

$$\psi(x) = \Sigma \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega} a_s(\mathbf{y}, \omega)\, t_s(\mathbf{y}, \omega)\, e^{i(\mathbf{yx} - \omega x^0)} + \Sigma \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega} a_s(-\mathbf{y}, -\omega)\, t_s(-\mathbf{y}, -\omega)\, e^{-i(\mathbf{yx} - \omega x^0)}.$$

Der Vektor $-\mathbf{y}$ kommt offenbar unter den Vektoren $\mathbf{y}$, wenn diese den reellen 3-Raum durchlaufen, vor. Definitionsgemäss ist $t_s(-\mathbf{y}, -\omega)$ Eigenvektor der Matrix

$$\Sigma_{\nu=1}^{3} (-y^\nu)\gamma^\nu - i\omega\gamma^4$$

zum Eigenwert $+\,im$, also Eigenwert der Matrix $\Sigma_{\nu=1}^{3} y^\nu \gamma^\nu + i\omega\gamma^4$ zum Eigenwert $-\,im$.

Es war $a_s(y)$ eine komplexwertige Funktion. Sei jetzt $A(y)$ eine operatorwertige Funktion.

Für jeden Punkt $y = (y^1, y^2, y^3, y^0)$ *von* M *sei* $u(y)$ *ein Eigenvektor der Matrix* $\Gamma = \Sigma y^\nu \gamma^\nu$ *mit* $y^4 = iy^0$ *zum Eigenwert* im. *Dann ist*

$$\Psi(x) = \int_M A(y)\, t(y)\, e^{iyx}\, dM \tag{4}$$

eine Lösung von $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$.

Es lässt sich (4) auch in der Gestalt

$$(4') \qquad \Psi(x) = \int \frac{d\mathbf{y}}{2\,\omega}\, C(\mathbf{y})\, u(\mathbf{y})\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x}-\omega x^0)} + \int \frac{d\mathbf{y}}{2\,\omega}\, D^*(\mathbf{y})\, v(\mathbf{y})\, e^{-i(\mathbf{y}\mathbf{x}-\omega x^0)}$$

schreiben. Dabei ist

$$t(\mathbf{y},\ \omega) = u(\mathbf{y}), \qquad t(-\mathbf{y},\ -\omega) = v(\mathbf{y}),$$
$$A(\mathbf{y},\ \omega) = C(\mathbf{y}), \qquad A^*(-\mathbf{y},\ -\omega) = D(\mathbf{y})$$

gesetzt, und es bedeutet A^* den zu A hermitisch konjugierten Operator. Es ist also $v(\mathbf{y})$ Eigenvektor der Matrix $\Sigma_{\nu=1}^{3}(-y_\nu)\gamma^\nu + (-i\,\omega)\gamma^4$ zum Eigenwert $+im$, daher Eigenvektor der Matrix $\Sigma_{\nu=1}^{3} y_\nu \gamma^\nu + i\,\omega\gamma^4$ zum Eigenwert $-im$.

Man kann auch folgendes sagen.

Für jeden reellen 3-Vektor $\mathbf{y}$ *seien* $u_s(\mathbf{y})$, $s = 1, 2$, *zum Eigenwert* $+im$ *und* $v_s(\mathbf{y})$, $s = 1, 2$, *zum Eigenwert* $-im$ *gehörige linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix*

$$\Sigma y^\nu \gamma^\nu \quad mit \quad y^4 = i\,\omega, \qquad \omega = {}_{+}(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}.$$

Es seien $C_s(\mathbf{y})$ *und* $D_s(\mathbf{y})$ *für alle* $\mathbf{y}$ *und für* $s = 1, 2$ *lineare Operatoren. Existiert dann das Integral*

$$(5) \qquad \Psi(x) = \Sigma \int \frac{2\,\omega}{d\mathbf{y}}\, C_s(\mathbf{y})\, u_s(\mathbf{y})\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x}-\omega x^0)} + \Sigma \int \frac{d\mathbf{y}}{2\,\omega}\, D_s^*(\mathbf{y})\, v_s(\mathbf{y})\, e^{-i(\mathbf{y}\mathbf{x}-\omega x^0)},$$

so ist Ψ *ein vierkomponentiger Feldoperator, der* $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$ *erfüllt.*

Umgekehrt lässt sich jede Lösung von $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$ in der Gestalt (5) darstellen. In der üblichen Terminologie sind: die $C_s(\mathbf{y})$ die zu Ψ gehörigen «Fermionen-Vernichtungsoperatoren», die $D_s(\mathbf{y})$ die zu Ψ gehörigen «Antifermionen-Vernichtungsoperatoren», die $C^*(\mathbf{y})$, wobei wieder C^* den zu C hermitisch konjugierten Operator bedeutet, die zu Ψ gehörigen« Fermionen-Erzeugungsoperatoren», und die $D^*(\mathbf{y})$ sind die zu Ψ gehörigen «Antifermionen-Erzeugungsoperatoren».

Eine Verallgemeinerung von (4) ist folgende Aussage. *Für jeden Punkt* $y = (y^1, y^2, y^3, y^0)$ *des Massenhyperboloides* M *seien* $t_1(y)$ *und*

$t_1(y)$ und $t_2(y)$ linear unabhängige Eigenvektoren der Matrix $\Gamma = \Sigma y^\nu \gamma^\nu$ *mit* $y^4 = i y^0$ *zum Eigenwert* im. *Dann ist*

$$\Psi(x) = \sum_M \int A_s(y)\, t_s(y)\, e^{iyx}\, dM \tag{6}$$

eine Lösung von $\gamma^\nu \partial_\nu + m = 0$. Mit $t_s(\mathbf{y}, \omega) = u_s(\mathbf{y})$, $t_s(-\mathbf{y}, -\omega) = v_s(\mathbf{y})$ und $A_s(\mathbf{y}, \omega) = C_s(\mathbf{y})$, $A_s^*(-\mathbf{y}, -\omega) = D_s(\mathbf{y})$ ist

$$\Psi(x) = \Sigma \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega} C_s(\mathbf{y})\, u_s(\mathbf{y})\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)} + \Sigma \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega} D_s^*(\mathbf{y})\, v_s(\mathbf{y})\, e^{-i(\mathbf{x}\mathbf{y} - \omega x^0)}. \tag{6'}$$

Die Vektoren $v_s(\mathbf{y})$ sind Eigenvektoren der Matrix Γ zum Eigenwert $-im$.

6. Zum hyperbolischen Skalarprodukte

Die Differentialgleichung $y'' + \lambda y = 0$ besitzt für jedes λ zwei linear unabhängige Lösungen. Mit den Randbedingungen $y(0) = y(\pi) = 0$ gibt es nur noch abzählbar viele λ, für die nichttriviale Lösungen existieren. Auferlegt man den Lösungen $u(x^1, x^2, x^3)$, der Differentialgleichung $(-\Delta + a)\, u = E u$, wobei a eine reelle Funktion von x^1, x^2, x^3 ist, die Randbedingung $\int |u(x^1, x^2, x^3)|^2\, dx^1\, dx^2\, dx^3 < \infty$, so wird sie nur noch für gewisse E lösbar. Entsprechend hat die Schrödinger-Gordon-Gleichung $(\square - m^2)\, \psi = 0$ für alle m Lösungen Fordert man dagegen $\psi \cdot \psi < \infty$, wobei wie üblich

$$\varphi \cdot \psi = \int d\mathbf{y}\, \{ \overline{\varphi(x)} \cdot \partial_0 \psi(x) - \partial_0 \overline{\varphi(x)} \cdot \psi(x) \}$$

gesetzt ist, so wird die Gleichung nur noch für gewisse m lösbar. Anders ausgedrückt: die Frage nach den Eigenvektoren des linearen Operators $\square$, speziell nach den zu positiven Eigenwerten m^2 gehörigen Eigenvektoren wird erst nichttrivial, wenn man die Lösungsgesamtheit durch Randbedingungen zu einem vollständigen Vektorraum zusammenfasst.

Das Integral über $d\mathbf{x}\,\{\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_0\psi(x) - \partial_0\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x)\}$ *ist von der Zeit unabhängig, wenn* φ, ψ *wie oben Lösungen von* $\square - m^2 = 0$ *sind, die ausserhalb einer hinreichend grossen Vollkugel verschwinden.*

Beweis. Es ist $\partial_0 \int d\mathbf{x}\,\{...\}$ gleich

$$\int d\mathbf{x}\,\{\partial_0\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_0\psi(x)$$
$$+\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_0\partial_0\psi(x) - \partial_0\partial_0\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x) - \partial_0\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_0\psi(x)\}$$
$$= \int d\mathbf{x}\,\{\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_0\partial_0\psi(x) - \partial_0\partial_0\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x)\}.$$

Nun ist $\square = \Sigma_{\nu=1}^{3}\,\partial_\nu\partial_\nu - \partial_0\partial_0$, daher $\partial_0\partial_0 = \Delta - m^2$, also

$$\partial_0 \int d\mathbf{x}\,\{...\} = \int d\mathbf{x}\,\{\overline{\varphi(x)}\cdot\Delta\,\psi(x) - \Delta\,\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x)\}.$$

Weiter ist

$$\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_1\partial_1\psi(x) - \partial_1\partial_1\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x) = \partial_1(\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_1\psi(x) - \partial_1\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x)),$$
$$\int d\mathbf{x}\,\{\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_1\partial_1\psi(x) - \partial_1\partial_1\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x)$$
$$= \iint\left(\int(\partial_1\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_1\psi(x) - \partial_1\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x))\,dx^1\right)dx^2\,dx^3$$
$$= \iint\left[\overline{\varphi(x)}\cdot\partial_1\psi(x) - \partial_1\overline{\varphi(x)}\cdot\psi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}dx^2\,dx^3.$$

Hieraus und aus der Voraussetzung, dass φ und ψ ausserhalb einer Vollkugel verschiwinden, folgt die Behauptung.

Der Zeitunabhängigkeit des oben genannten Integrals entspricht in der elementaren Quantenmechanik die Zeitunabhängigkeit von $(\gamma(t), \gamma(t))$ für die Lösungen $\gamma(t)$ der Schrödingergleichung $H\gamma = -(h/i)\,\partial_t\gamma$. Der übliche Beweis verläuft so. Es ist

$$\partial_t(\gamma, \gamma) = \partial_t \int \gamma^*(t)\cdot\gamma(t)\,dt = \int \partial_t\gamma^*(t)\cdot\gamma(t)\,dt + \int \gamma^*(t)\cdot\partial_t\gamma(t)\,dt,$$

wegen $(H\gamma)^* = (-(h/i)\,\partial_t\gamma)^* = (h/i)\,\partial_t\gamma^*$ also

$$\partial_t(\gamma, \gamma) = \int \frac{i}{h}(H\gamma)^*(t)\,\gamma(t)\,dt = \int \gamma^*(t)\left(-\frac{i}{h}H\gamma(t)\right)dt$$
$$= \frac{i}{h}\left\{\int(H\gamma)^*(t)\cdot\gamma(t) - \int\gamma^*(t)\,H\gamma(t)\right\}dt = \frac{i}{h}(H\gamma, \gamma) - (\gamma, H\gamma),$$

woraus wegen der Hermitizität von H die Behauptung folgt.

Lassen sich die Lösungen φ, ψ von $\square - m^2 = 0$ als

$$\varphi(x) = \int \frac{d\mathbf{y}}{\omega} e^{-iyx} \varphi_F(y), \qquad \psi(x) = \int \frac{d\mathbf{z}}{\Omega} e^{-izx} \Psi_F(z)$$

mit $\omega = (\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$ und $\Omega\, (\mathbf{z}^2 + m^2)^{1/2}$ darstellen, so ist

$$(*) \quad \int d\mathbf{x}\, \{\overline{\varphi(x)} \cdot \partial_0 \psi(x) - \partial_0 \overline{\varphi(x)} \cdot \psi(x) = (2\pi)^3\, 2\, i \int \frac{d\mathbf{y}}{\omega} \overline{\varphi_F(\mathbf{y})}\, \Psi_F(\mathbf{y}),$$

wobei $\varphi_F(\mathbf{y}, \omega)$ nuch mit $\varphi_F(\mathbf{y})$ bezeichnet ist.

Beweis von (*). Offenbar ist $\int d\mathbf{x}\, \{\overline{\varphi(x)} \cdot \partial_0 \psi(x) - \partial_0 \overline{\varphi(x)} \cdot \psi(x)\}$ $= \mathrm{I} - \mathrm{II}$ mit

$$\mathrm{I} = \int d\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{y}}{\omega} e^{iyx} \overline{\varphi_F(y)} \int \frac{d\mathbf{z}}{\Omega} (i\,\Omega)^{-izx} \Psi_F(z),$$

$$\mathrm{II} = \int d\mathbf{x} \int \frac{d\mathbf{y}}{\omega} (-\,i\,\omega)\, e^{iyx} \overline{\varphi_F(y)} \int \frac{d\mathbf{z}}{\Omega} e^{-izx} \Psi_F(z),$$

wobei $yx = \mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0$ und $zx = \mathbf{z}\mathbf{x} - \Omega x^0$ benutzt ist. Weiter ist

$$\mathrm{I} = \iint \left(\int d\mathbf{x}\, e^{i(\mathbf{y}-\mathbf{z})\mathbf{x}} \right) e^{i(\Omega-\omega)x^0} \frac{i}{\omega} \overline{\varphi_F(y)}\, \psi_F(z)\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{z}.$$

Bekanntlich ist $\iiint d\mathbf{x} \exp(i\mathbf{x}(\mathbf{y} - \mathbf{z})) = (2\pi)^3\, \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z})$, also

$$\mathrm{I} = (2\pi)^3\, i \iint \delta(\mathbf{y} - \mathbf{z})\, e^{i(\Omega-\omega)x^0} \frac{1}{\omega} \overline{\varphi_F(y)}\, \psi_F(z)\, d\mathbf{y}\, d\mathbf{z}$$

$$= (2\pi)^3\, i \int \frac{d\mathbf{z}}{\Omega} \overline{\varphi_F(\mathbf{z})}\, \psi_F(\mathbf{z}).$$

Entsprechend ergibt sich, dass $\mathrm{II} = \mathrm{I}$ ist, woraus dann die Behauptung folgt.

7. Ueber die Wurzel aus $m^2 - \nabla^2$

Sei V der Vektorraum über den komplexen Zahlen bestehend aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen über dem reellen 3-Raum, die ausserhalb einer individuellen Vollkugel verschwinden. Es sei V mit einem positiv definiten Skalarprodukt versehen. Wir betten V in einen Hilbertraum W ein, in welchem V dicht liegt. Wenn der lineare Operator $T = m^2 - \nabla^2$ auf V stetig ist, lässt er sich über $W - V$ linear fortsetzen.

Die Elemente aus V lassen sich beliebig gut durch endliche Linearkombinationen von Funktionen f folgender Art approximieren: $f(\mathbf{x}) = \exp(i\,\mathbf{y}\,\mathbf{x})$ für $\mathbf{x} \in F$ und $f(\mathbf{x}) = 0$ sonst. Dabei ist F eine zu f gehörige Vollkugel. Offenbar liegt f in $W - V$. Anwendung von T auf f ergibt

$$(m^2 - \nabla^2) f = \{m^2 - \Sigma\,(i y^\nu)^2\} f = (\mathbf{y}^2 + m^2) f.$$

Wegen $f \cdot f \geq 0$ ist also $(Tf) \cdot f = (\mathbf{y}^2 + m^2)\,(f \cdot f) \geq 0$.

Zum Operator T existiert ein eindeutig bestimmter Operator S mit $SS = T$.

Beweis. Statt $(Pw) \cdot w \geq 0$ für alle $w \in W$ schreibt man auch $P \geq 0$. Es heisst dann P positiv. Jeder positive Operator ist hermitisch. Und es gilt der Satz: wenn $P \geq 0$, so existiert ein eindeutig bestimmter Operator Q mit $QQ = P$. Dieser Satz lässt sich auf $T = P$ anwenden.

Sei $\varphi(x^1, x^2, x^3, x^0) = \varphi(\mathbf{x}, x^0) = \varphi(x)$ ein von x^0 abhängiges Element aus W, das $\Box - m^2 = 0$ erfüllt. Wegen $\Box = \Sigma_{\nu=1}^{3} \partial_\nu \partial_\nu - \partial_0 \partial_0$ ist $-\partial_0 \partial_0 = m^2 - \nabla^2$ oder

$$(i\,\partial_0)^2 = m^2 - \nabla^2 = T,$$

daher $i\,\partial_0 = S$. Es genügt also φ der Differentialgleichung $i\,\partial_0 \varphi = S \varphi$. Formal ist damit die Lösung von $\Box - m^2 = 0$ auf folgendes Problem reduziert.

Sei R ein Hilbertraum und A ein linearer Operator über R. Gesucht Lösungen der Differentialgleichung $d\varphi/dt = A\,\varphi$, wobei $\varphi(t)$ ein vom reellen Parameter t abhängiger Vektor aus R ist. Es bezeichne jetzt $(e_1, e_2, \ldots)$, ein vollständiges Orthonormalsystem in R. Mit $\varphi(t) = \Sigma \xi_\alpha(t)\, e_\alpha$ ist dann

$$\Sigma \xi'_\alpha e_\alpha = \varphi' = A\varphi = \Sigma \xi_\alpha A e_\alpha,$$

nach Multiplikation mit e_β also $\xi'_\beta = \Sigma_\alpha A_{\beta\alpha} \xi_\alpha$, wobei $A_{\beta\alpha} = (A e_\alpha) \cdot e_\beta$ gesetzt ist. In Matrizenschreibweise ist daher $\xi' = A\xi$. Ist der Operator A hermitisch, so lässt er sich gemäss

$$A = S B S^{-1}$$

auf Diagonalgestalt bringen. Erklärt man dann die unendliche Folge ζ durch $\zeta = S^{-1}\xi$, so ist $\xi' = S\zeta' = A S \zeta$, also

$$\zeta' = S^{-1} A S \zeta = B\zeta.$$

Damit ist die Integration der Schrödinger-Gordon-Gleichung formal auf die triviale Differentialgleichung $z' = z_1$ zurückgeführt.

8. Zur Integration Pber das Massenhyperboloid

Eine Funktion φ über dem reellen Lorentzraume, die sich als

(1) $$\varphi(x) = \int_M a(y)\, e^{iyx}\, dM$$

schreiben lässt, heisse «hyperbolisch darstellbar». Wie aus den Bemerkungen des vierten Abschnittes leicht folgt, fallen die hyperbolisch darstellbaren Funktionen im wesentlichen mit den Lösungen von $\square - m^2 = 0$ zusammen.

Setzt man wie üblich $\delta(y^2 + m^2) = (1/2\,\omega)\,(\delta(y^0 - \omega) + \delta(y_0 + \omega))$ mit $\omega = {}_+(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$, so gilt

(2) $$\int_M f(y)\, dM = 2m \int \delta(y^2 + m^2) f(y)\, dy.$$

Der Beweis ist nicht mehr trivial: Nach der Definition vo $\delta(y^2 + m^2)$ ist

$$\int \delta(y^2 + m^2) f(y)\, dy = \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega} f(\mathbf{y}, \omega) + \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega} f(\mathbf{y}, -\omega).$$

Nach der üblichen Definition des Flächenintegrals ist

$$\int_M f(y)\,dM = \int_J f(\mathbf{y},\ \omega)\, g^{1/2}\, d\mathbf{y} + \int_J f(\mathbf{y},\ -\omega)\, g^{1/2}\, d\mathbf{y},$$

wobei g die Funktionaldeterminante des benutzten Koordinatensystems von M bezeichnet. Es ist also zu zeigen, dass

$$g^{1/2} = m/(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2} = m/\omega. \tag{3}$$

Der Beweis von (3) erfordert eine längere differentialgeometrische Rechnung.

Elementer ist folgende Aussage. Mit

$$\varphi(x) = 2m \int \delta(y^2 + m^2)\, a(y)\, e^{iyx}\, dy$$

ist

$$\frac{1}{2m}\varphi(x) = \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\, a(\mathbf{y},\ \omega)\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)} + \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\, a(-\mathbf{y},\ -\omega)\, e^{-i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)}. \tag{4}$$

Wegen der Bedeutung von $\delta(y^2 + m^2)$ und ω ist nämlich

$$\frac{1}{2m}\varphi(x) = \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\, a(\mathbf{y},\ \omega)\, e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)} + \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\, a(\mathbf{y},\ -\omega)^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} + \omega x^0)}.$$

Der zweite Summand der rechten Seite geht durch die Substitution $\mathbf{y} = -\mathbf{z}$ in den zweiten Summanden der rechten Seite von (4) über.

9. Die hyperbotische Fouriertransformierte

Ist φ eine Lösung von $\square - m^2 = 0$, so lässt sie sich, wie oben dargelegt, als

$$\varphi(x) = \frac{1}{2m}\int_M \varphi_F(y)\, e^{ixy}\, dM \tag{1}$$

darstellen. Es heisst φ_F weiterhin die «hyperbolische Fouriertransformierter» von φ. Wie im letzten Abschnitt gezeigt, ist

$$\varphi(x) = \int \delta(y^2 + m^2)\, \varphi_F(y)\, e^{ixy}\, dy \tag{2}$$

Da sich jede hyperbolisch darstellbare Funktion aus Funktionen e^{ixy} mit $y \in M$ aufbauen lässt, sind die hyperbolischen Fouriertransformierten der letzteren Funktionen von besonderer Wichtigkeit. Wir wollen zeigen: zu

$$\varphi(x) = e^{i(\mathbf{a}\mathbf{x} - \omega x^0)}$$

gehört die durch

$$\varphi_F(x) = 2(\mathbf{a}^2 + m^2)^{1/2}\,\theta(x)\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

bestimmte Funktion φ_F als hyperbolische Fouriertransformierte.

Beweis. Mit $\omega = {}_+(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$ ist $\int \delta(y^2 + m^2)\,\varphi_F(y)\,e^{ixy}\,dy$ gleich

$$\begin{aligned}
&\int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\,\varphi_F(\mathbf{y}, \omega)\,e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)} + \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\,\varphi_F(\mathbf{y}, -\omega)\,e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} + \omega x^0)} \\
&= \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\,\varphi_F(\mathbf{y}, \omega)\,e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)} \\
&= 2(\mathbf{a}^2 + m^2)^{1/2} \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a})\,e^{i(\mathbf{y}\mathbf{x} - \omega x^0)} \\
&= (\mathbf{a}^2 + m^2)^{1/2}\,(\mathbf{a}^2 + m^2)^{-1/2}\,e^{i(\mathbf{a}\mathbf{x} - \omega x^0)} = \varphi(x),
\end{aligned}$$

wie behauptet.

Mit

$$\varphi(x) = e^{i(\mathbf{a}\mathbf{x} - \omega x^0)}, \qquad \psi(x) = e^{i(\mathbf{a}\mathbf{x} - \omega x^0)}$$

ist

$$\zeta \int_M \overline{\varphi_F(x)}\,\psi_F(x)\,dM = \delta(\mathbf{a} - \mathbf{b}),$$

wobei ζ eine reelle Zahl $\neq 0$ bedeutet, die nur von m und $\mathbf{b}$ *abhängt.*

Beweis. Wie oben gezeigt, ist

$$\begin{aligned}
\varphi_F(x) &= 2(\mathbf{a}^2 + m^2)^{1/2}\,\theta(x)\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \\
\psi_F(x) &= 2(\mathbf{b}^2 + m^2)^{1/2}\,\theta(x)\,\delta(\mathbf{x} - \mathbf{b}).
\end{aligned}$$

Mit $\omega = {}_{+}(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$ ist, wie oben gezeigt,

$$\frac{1}{2m}\int_M \overline{\varphi_F(x)}\,\psi_F(x)\,dM = \int \delta(y^2 + m^2)\,\overline{\varphi_F(y)}\,\psi_F(y)\,dy$$
$$= \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\,\overline{\varphi_F(\mathbf{y},\ \omega)}\,\psi(\mathbf{y},\ \omega) + \int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\,\overline{\varphi_F(\mathbf{y},\ -\omega)}\,\psi_F(\mathbf{y},\ -\omega).$$

Wie im letzten Beweis fällt der zweite Summand weg, da definitionsgemäss $\theta(x) = \theta(x^0) = 1$ für $x^0 > 0$ und $\theta(x) = 0$ sonst ist. Wir rechnen also weiter mit

$$\int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\,\overline{\varphi_F(\mathbf{y},\ \omega)}\,\psi_F(\mathbf{y},\ \omega) = 2(\mathbf{a}^2 + m^2)^{1/2}\int \frac{d\mathbf{y}}{2\omega}\,\delta(\mathbf{y} - \mathbf{a})\,\psi_F(\mathbf{y},\ \omega).$$

Mit $\Omega = {}_{+}(\mathbf{a}^2 + m^2)^{1/2}$ ist dies gleich

$$\psi_F(\mathbf{a},\ \Omega) = 2(\mathbf{b}^2 + m^2)^{1/2}\,\delta(\mathbf{a} - \mathbf{b}),$$

so dass man $\zeta = 4m(\mathbf{b}^2 + m^2)^{1/2}$ setzen kann.

10. Umkehrung der hyperbolischen Fouriertransformation

Sei φ eine hyperbolisch darstellbare Funktion über reellen Lorentzraum. Dann gibt es hyperbolisch darstellbare Funktionen φ^+ und φ^- mit

$$\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x) \quad \text{für alle } x$$

derart, dass die hyperbolische Fouriertransformierte von φ^+ auf M_- und die hyperbolische Fouriertransformierte von φ^- auf M_+ verschwindet. Mit $N = M_\pm$ und φ_F als hyperbolischer Fouriertransformierten von φ kann man ja

$$\varphi^\pm(x) = \frac{1}{m}\int_N \varphi_F(y)\,e^{ixy}\,dN$$

setzen.

Die Funktion φ lasse sich als

$$\varphi(x) = \frac{1}{2m}\int_M f(y)\,e^{iyx}\,dM$$

mit $f(y) = 0$ *für* $y \in M_-$ *darstellen. Dann ist*

$$f(\mathbf{y}) = \frac{2\,\omega}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{x},\ 0)\, e^{-i\mathbf{y}\mathbf{x}} d\mathbf{x}\,.$$

Dabei ist $f(\mathbf{y},\ \omega) = f(\mathbf{y})$ *mit* $\omega = {}_+(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$ *gesetzt.*

Beweis. Mit $\Omega = {}_+(\mathbf{z}^2 + m^2)^{1/2}$ ist

$$\varphi(x) = \int \frac{d\,\mathbf{z}}{2\,\Omega} f(\mathbf{z},\ \Omega)\, e^{i(\mathbf{z}\mathbf{x} - \Omega x^0)} + \int \frac{d\,\mathbf{z}}{2\,\Omega} f(-\,\mathbf{z},\ -\,\Omega)\, e^{-i(\mathbf{z}\mathbf{x} - \Omega x^0)},$$

also, da f auf M_- verschwindet,

$$\varphi(x) = \int \frac{d\,\mathbf{z}}{2\,\Omega} f(\mathbf{z},\ \Omega)\, e^{i(\mathbf{z}\mathbf{x} - \Omega x^0)},$$

daher

$$\int \varphi(\mathbf{x},\ 0)\, e^{-i\mathbf{y}\mathbf{x}}\, d\,\mathbf{x} = \iint e^{i(\mathbf{z}-\mathbf{y})\mathbf{x}}\, d\,\mathbf{x} \frac{f(\mathbf{z},\ \Omega)}{2\,\Omega}\, d\,\mathbf{z}$$

$$= (2\pi)^3 \int \delta(\mathbf{z} - \mathbf{y}) \frac{f(\mathbf{z},\ \Omega)}{2\,\Omega}\, d\,\mathbf{z} = (2\pi)^3 \frac{f(\mathbf{y},\ \omega)}{2\,\omega},$$

wie behauptet.

Die Funktion φ *lasse sich als*

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\,m} \int_M f(y)\, e^{iyx}\, dM$$

mit $f(y) = 0$ *für* $y \in M_+$ *darstellen. Dann ist*

$$f(\mathbf{y}) = \frac{2\,\omega}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{x},\ 0)\, e^{-i\mathbf{y}\mathbf{x}}\, d\,\mathbf{x},$$

wobei $f(\mathbf{y},\ -\,\omega) = f(\mathbf{y})$ *mit* $\omega = {}_+(\mathbf{y}^2 + m^2)^{1/2}$ *gesetzt ist.*

Beweis. Wegen $f(M_+) = 0$ ist

$$\varphi(x) = \int \frac{d\,\mathbf{z}}{2\,\Omega} f(-\,\mathbf{z},\ -\,\Omega)\, e^{-i(\mathbf{z}\mathbf{x} - \Omega x^0)},$$

daher

$$\int \varphi(\mathbf{x},\ 0)\, e^{i\mathbf{y}\mathbf{x}} = \int\int e^{i(\mathbf{y}-\mathbf{z})\mathbf{x}}\, d\,\mathbf{x}\, \frac{f(-\mathbf{z},\ -\Omega)}{2\Omega}\, d\,\mathbf{z}$$

$$= (2\pi)^3 \int \delta(\mathbf{y}-\mathbf{z})\, \frac{f(-\mathbf{z},\ -\Omega)}{2\Omega}\, d\,\mathbf{z} = \frac{(2\pi)^3}{2\omega} f(-\mathbf{y},\ -\omega).$$

Also ist

$$\frac{(2\pi)^3}{2\omega} f(\mathbf{y},\ -\omega) = \int \varphi(\mathbf{x},\ 0)\, e^{-i\mathbf{y}\mathbf{x}}\, d\,\mathbf{x},$$

wie behauptet.

LITERATUR

(1) DELAVAUT, H.: *Les transformations intégrales à plusieurs variables et leurs applications*, Paris, 1961.

(2) URBANIK, K.: *Fourier analysis in Marcinkiewicz* spaces, Studia mathem. 21 (1961), 93-102.

(3) OKLANDER, T. E.: *Interpolación, espacios de Lorentz y teorema de Marcinkiewics*, Dep. de Matem., Universidad, Buenos Aires, 1965.