# ÜBER PERMUTATIONEN MIT WIEDERHOLUNG

Von WERNER WEBER in Hamburg

Die nachstehende Abhandlung ist dem Wunsch entsprungen, eine von BESSEL-HAGEN und HASSE (¹) aus einer mit analytischen Mitteln gewonnenen Polynomidentität durch Vergleichung der höchsten Koeffizienten hergeleitete Formel (²) elementar zu beweisen. Dies gelang zwar; aber infolge des von mir eingeschlagenen kombinatorischen Weges schwoll der Beweis so an, daß von einer Vereinfachung nicht die Rede ist. Er läuft darauf hinaus, daß hernach in § 4 die Formel (25) als Folge des Satzes 19 erscheint. Man kann vermuten, daß es längst viel einfachere elementare Beweise gibt; eine solche Vermutung liegt schon deshalb nahe, weil die Formel in der genannten Arbeit nur ein Teilergebnis einer viel allgemeineren Gleichung darstellt. Die für Satz 19 erforderliche, von mir als «Ergänzung» (Definition 8) bezeichnete Begriffsbildung, deren Theorie der einzige Zweck dieser Arbeit ist, scheint mir nun aber als reiner Selbstzweck nicht fehl am Platz, da sie eine interessante Rekursionseigenschaft hat. Sucht man nämlich im eingeschränkten Sinne der Formel (16) die nichttrivialen («echten») Ergänzungen, die insbesondere von zwei natürlichen Zahlen $n$ und $l \leqq n - 2$ abhängen, zu zählen, so ist man genötigt, auf ebensolche Ergänzungen (einschließlich der «unechten») zurückzugreifen, in denen $n$ durch $l$ ersetzt ist. Diese Stelle tritt im Beweis des für Satz 19 allein wesentlichen Satzes 18 dort auf, wo der vorher bewiesene Satz 16 benutzt wird. Erst diese innere Eigenschaft des Ergänzungsbegriffes ermöglicht einen Induktionsbeweis für Satz 18. Sie scheint mir den Begriff interessant genug zu machen, zumal die Richtigkeit der Formel (16) oder der gleichwertigen Formeln (14) und (15) bei Betrachtung von Zahlenbeispielen immer wieder wie ein Zufall aussieht, so daß ihre Allgemeingültigkeit auf diesem Wege nicht plausibel wird.

---

(¹) *Beweis einer Identität zwischen Binomialkoeffizienten*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 37 (1928), S. 231-234.

(²) Dort Gleichung (8) (S. 232).

Offen bleibt die Frage, ob dieselbe oder auch eine passende allgemeinere Begriffsbildung einen analogen kombinatorischen Beweis für die Übereinstimmung auch der übrigen Koeffizienten in der von *Bessel-Hagen* und *Hasse* bewiesenen Identität ergeben würde. Vielleicht hätte der benötigte allgemeinere Begriff noch schönere Struktureigenschaften als der der Ergänzung.

## § 1. $(n, l)$-Funktionen

Definition 1: *Es seien* $n \geqq 3$ *und* $l$ *natürliche Zahlen. Als* $(n, l)$*-Funktion wird dann eine Funktion bezeichnet, die genau für die Argumente* $1, 2, \ldots, n-2$ *definiert ist und deren Wertevorrat aus genau* $l$ *Dingen besteht.*

Klar ist

Satz 1: *Sind* $n \geqq 3$ *und* $l$ *natürliche Zahlen, so gibt es dann und nur dann eine* $(n, l)$*-Funktion, wenn* $l \leqq n-2$ *ist.*

Definition 2: *Ist* $f(x)$ *eine* $(n, l)$*-Funktion,* $k$ *ganz,* $1 \leqq k \leqq n-1$*, so heißt die Menge der Funktionswerte* $f(x)$ *mit* $x \leqq k-1$ *die Vordermenge von* $k$ *(in bezug auf* $f(x)$*).*

Definition 3: *Nimmt die* $(n, l)$*-Funktion* $f(x)$ *den Wert* $a$ *für genau* $v$ *verschiedene* $x$ *aus der Reihe* $1, 2, \ldots, n-2$ *an, so heißt* $v$ *die Vielfachheit von* $a$ *in* $f(x)$.

Definition 4: *Sind* $n \geqq 3$ *und* $l$ *natürliche Zahlen,* $v = (v_1, \ldots, v_l)$ *ein geordnetes System von* $l$ *(nicht notwendig verschiedenen) natürlichen Zahlen mit der Summe* $n-2$ (also $l \leqq n-2$), $A$ *eine aus* $l$ *verschiedenen Werten* $a_1, \ldots, a_l$ *bestehende Menge, so wird die Anzahl aller* $(n, l)$*-Funktionen mit dem Wertevorrat* $A$*, in denen für jedes* $r$ *aus der Reihe* $1, 2, \ldots, l$ *der Wert* $a_r$ *die Vielfachheit* $v_r$ *hat, mit* $N(n, l; v)$ *oder ausführlich* $N(n, l; (v_1, \ldots, v_l))$ *bezeichnet.*

Zu beachten ist: Bei der Bestimmung eines $N(n, l; v)$ wird vorausgesetzt, daß die Elemente des Wertevorrats in ganz bestimmter Weise als $a_1, \ldots, a_l$ numeriert sind und jedes $v_r$ genau die Vielfachheit des zugehörigen $a_r$ bedeutet. Nicht mitgezählt werden diejenigen $(n, l)$-Funktionen, die die $l$ Elemente des Wertevorrats in irgendeiner andern Anordnung der Reihe nach $v_1$-mal, ..., $v_l$-mal als Funktionswert annehmen. Jedoch ändert sich $N(n, l; v)$ offenbar weder bei Umnumerierung der Werte $a_1, \ldots, a_l$ noch bei ihrer Ersetzung durch $l$ beliebige andere Werte, ebensowenig bei Umstellung des Systems $v$.

Beispiele: Eine $(n, l)$-Funktion $f(x)$ werde der Einfachheit halber dadurch beschrieben, daß man $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n-2)$ hintereinander aufschreibt. So bedeute etwa das Symbol 1121 diejenige Funktion, die nur für $x = 1, 2, 3, 4$ definiert ist und für die $f(1) = 1$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$, $f(4) = 1$ ist; sie ist offenbar eine (6, 2)-Funktion. Wie hier, so werden auch in den folgenden Beispielen für den Wertevorrat stets Zahlen gewählt werden, gewöhnlich die Zahlen 1, 2, ..., $l$.

Besonders einfache Beispiele bilden die Fälle mit $l = n - 2$. Hier muß offenbar jedes $v_r$ den Wert 1 haben. Im Falle des Wertevorrats $\{1, 2, ..., l\}$ können dann die Werte $a_1$, ..., $a_l$ jede Permutation der Zahlen 1, 2, ..., $n-2$ bilden. Man sieht also:

(1) $$N(n, n-2; \quad (1, 1, ..., 1)) = (n-2)!.$$

Es sei sodann $n = 6$, $l = 1$. Dann ergibt sich nur die eine Funktion 1111. Es ist also

(2) $$N(6, 1; (4)) = 1.$$

Im Falle $n = 6$, $l = 2$ ergeben sich die 14 Funktionen

1 1 1 2
1 1 2 1
1 1 2 2
1 2 1 1
1 2 1 2
1 2 2 1
1 2 2 2
2 1 1 1
2 1 1 2
2 1 2 1
2 1 2 2
2 2 1 1
2 2 1 2
2 2 2 1

Der Wertevorrat $\{1, 2\}$ werde so numeriert: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Für das Paar $(v_1, v_2)$ mit der Summe $n - 2 = 4$ hat man nun drei Möglichkeiten:

$$v_1 = 1, \quad v_2 = 3;$$
$$v_1 = 2, \quad v_2 = 2;$$
$$v_1 = 3, \quad v_2 = 1.$$

Die erste Möglichkeit z. B. bedeutet, daß die Zahl 1 einmal, die Zahl 2 dreimal als Funktionswert auftritt; keineswegs ist das Umgekehrte erlaubt. D. h. $N(6, 2; (1, 3))$ zählt lediglich die Funktionen 1222, 2122, 2212 und 2221, so daß

$$N(6, 2; \ (1, 3)) = 4 \tag{3}$$

ist. Entsprechend sieht man

$$\left\{ \begin{array}{l} N(6, 2; \ (2, 2)) = 6, \\ N(6, 2; \ (3, 1)) = 4. \end{array} \right. \tag{4}$$

Im Falle $l > 2$ ergeben sich natürlich keine Binomialkoeffizienten; sondern nach den obigen Klarstellungen gilt offenbar

Satz 2: *Sind $n \geq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, $v = (v_1, \ldots, v_l)$ ein geordnetes System natürlicher Zahlen mit der Summe $n - 2$,*

$$U = \frac{1}{v_1! \ v_2! \ldots v_l!}, \tag{5}$$

*so ist*

$$N(n, l; \ v) = U(n-2)!.$$

Eine einfache Verallgemeinerung des Satzes 2 ist

Satz 3: *Es sei $0 = h_0 < h_1 < h_2 < \ldots < h_m = n - 2$ $(m \geq 1)$, alle $h_r$ ganz. Für $r = 1, 2, \ldots, m$ verstehe man unter $I_r$ das Intervall der ganzen Zahlen $x$ mit $h_{r-1} < x \leq h_r$ und bezeichne mit $s_r$ deren Anzahl: $s_r = h_r - h_{r-1}$. Eine Menge $A$ aus $l$ verschiedenen Elementen $a_1, \ldots, a_l$ sei in $m$ paarweise elementefremde Teilmengen $A_1, \ldots, A_m$ zerlegt. Es seien $v_1, \ldots, v_l$ natürliche Zahlen mit der Summe $n - 2$. Für $r = 1, 2, \ldots, m$ habe die Summe aller $v_\lambda$ für diejenigen $\lambda$, für die $a_\lambda$ in $A_r$ enthalten ist, den Wert $u_r$. Behauptet wird: Eine $(n, l)$-Funktion $f(x)$ vom Wertevorrat $A$, in der jedes $a_r$ die Vielfachheit $v_r$ hat und in der für $r = 1$,* *2, ..., $m$ jeweils die Funktionswerte $f(x)$ für die $x$ aus $I_r$ genau die Menge $A_r$ bilden, gibt es dann und nur dann, wenn durchweg für* $1 \leqq r \leqq m-1$ (also auch für $r = m$) $u_r = s_r$ *ist, und die Anzahl dieser Funktionen $f(x)$ beträgt alsdann $Us_1!\,s_2!\,\ldots\,s_m!$, wo $U$ durch* (5) *erklärt ist.*

Vorbemerkung: Von selbst ist $n \geqq 3$, $1 \leqq l \leqq n-2$. Satz 2 ist der Sonderfall $m = 1$ des Satzes 3.

Beweis: Für $r = 1, 2, \ldots, m$ bedeute $p_r$ das Produkt der $v_\lambda!$ für diejenigen $\lambda$, für die $a_\lambda$ in $A_r$ liegt. Ist durchweg $u_r = s_r$, so läßt sich offenbar jedes $I_r$ auf genau $\frac{s_r!}{p_r}$ Arten in paarweise fremde Klassen einteilen, deren Anzahl gleich der Anzahl der in $A_r$ enthaltenen $a_\lambda$ ist und deren Elementezahlen gleich den zugehörigen $v_\lambda$ sind. Setzt man dann $f(x)$ für die $x$ jeder dieser Klassen durchweg gleich dem betreffenden $a_\lambda$ und verfährt so für jedes $r$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$, so entsteht offenbar eine $(n, l)$-Funktion $f(x)$ von der im Satz verlangten Art. Gibt es umgekehrt eine Funktion $f(x)$ von der im Satz verlangten Art, so muß durchweg $u_r = s_r$ sein und $f(x)$ auf diese Weise entstehen. Denn für jedes $\lambda$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, l$ gibt es genau $v_\lambda$ Werte $x$ mit $f(x) = a_\lambda$, und wenn $a_\lambda$ Element von $A_r$ ist, so liegen diese $x$ sämtlich in $I_r$, da $f(x)$ für andere $x$ als die von $I_r$ durchweg zu einer andern der Mengen $A_1, \ldots, A_m$ gehört, also von $a_\lambda$ verschieden ist. Daher ist auch $u_r \leqq s_r$, und da die $u_r$ dieselbe Summe $n-2$ haben wie die $s_r$, so muß durchweg sogar $u_r = s_r$ sein, d. h. bei gegebenem $r$ füllt die Menge der $x$, für die $f(x)$ in $A_r$ liegt, bereits das ganze $I_r$ aus. Die Anzahl der im Satz genannten Funktionen ist also nur dann von 0 verschieden, wenn durchweg $u_r = s_r$ ist, und zwar ist sie dann gleich der Anzahl der Möglichkeiten, alle $m$ Intervalle $I_r$ so zu unterteilen, wie es vorhin beschrieben wurde. Da man die Möglichkeiten der Unterteilung für die einzelnen Intervalle voneinander unabhängig ausnutzen kann, so ergibt sich in diesem Falle als Gesamtzahl das Produkt aller $\frac{s_r!}{p_r}$, also, da $p_1 \ldots p_m = v_1! \ldots v_l!$ ist, der im Satz behauptete Wert.

Definition 5: *Ist $a$ eine beliebige, $r \geqq 0$ eine ganze Zahl, so wird unter $V(a, r)$ für $r > 0$ der Ausdruck $a(a-1)\ldots(a-r+1)$, für $r = 0$ die Zahl 1 verstanden.*

BEMERKUNG: Offenbar ist stets $V(a, r) = r! \binom{a}{r}$, für ganzes $a \geqq r$ auch $V(a, r) = \frac{a!}{(a-r)!}$. Ist $a$ ganz, $a \geqq 0$, $M$ eine Menge aus $a$ Elementen, so ist $V(a, r)$ bekanntlich die Anzahl der geordneten Folgen von $r$ verschiedenen Elementen von $M$ (Variationen von $a$ Elementen zur $r$-ten Klasse ohne Wiederholung).

SATZ 4: *Es sei $f(x)$ eine $(n, l)$-Funktion, $h$ und $m$ ganz, $3 \leqq h \leqq n$, $1 \leqq m \leqq h - 2$, $B$ eine aus $m$ verschiedenen Elementen $b_1, \ldots, b_m$ bestehende Untermenge des Wertevorrats von $f(x)$* (also $m \leqq l$). *Es sei $g(s)$ eine $(h, m)$-Funktion mit dem Wertevorrat $B$. Jedes $b_r$ habe in $f(x)$ die Vielfachheit $u_r$, in $g(s)$ die Vielfachheit $w_r$. Für die Anzahl $q$ der geordneten Folgen von $h - 2$ verschiedenen Zahlen $x_1, \ldots, x_{h-2}$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, n - 2$, für die durchweg*

$$f(x_s) = g(s) \tag{6}$$

*ist, gilt dann*

$$q = V(u_1, w_1)\, V(u_2, w_2) \ldots V(u_m, w_m). \tag{7}$$

BEWEIS: Faßt man alle $s$ zusammen, für die $g(s)$ einen bestimmten Wert $b_r$ annimmt, so können die zugehörigen $x_s$, etwa nach wachsendem $s$ geordnet, noch auf $V(u_r, w_r)$ Arten so gewählt werden, daß $f(x_s) = b_r$ ist. Für $r = 1, 2, \ldots, m$ lassen sich alle diese Möglichkeiten unabhängig voneinander ausnutzen.

BEISPIEL: Es sei $n = 14$, $l = 5$, und die $(14, 5)$-Funktion $f(x)$ habe folgende Wertetafel:

| $x =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) =$ | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 | 5 | 2 | 5 | 4 | 2 | 3 | 2 |

Es sei $h = 8$, $m = 3$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_3 = 4$. In $f(x)$ haben diese drei Funktionswerte die Vielfachheiten $u_1 = 2$, $u_2 = 5$, $u_3 = 2$. Eine $(8, 3)$-Funktion mit dem Wertevorrat $\{b_1, b_2, b_3\}$ ist z. B. durch die folgende Tafel gegeben:

| $s =$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(s) =$ | 2 | 4 | 1 | 2 | 2 | 1 |

Die Werte $b_1$, $b_2$, $b_3$ haben in ihr die Vielfachheiten $w_1 = 2$, $w_2 = 3$, $w_3 = 1$. Ein Beispiel für eine geordnete Folge von $h - 2 = 6$ verschiedenen Zahlen $x_1, \ldots, x_6$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, 12$, für die jeder Funktionswert $f(x_s)$ gleich dem zugehörigen $g(s)$ ist, wird etwa durch die Folge (4, 1, 5, 12, 7, 2) geliefert. Aber das geordnete Tripel $(x_1, x_4, x_5)$ der $x_s$ mit $g(s) = 2$ kann aus der Menge der $x$ mit $f(x) = 2$, d. h. der Menge $\{3, 4, 7, 10, 12\}$ beliebig herausgegriffen werden, könnte also statt (4, 12, 7) auch (4, 7, 12), (3, 4, 10) usw. lauten. Hinsichtlich dieser drei Werte $x_s$ erhält man daher $V(5, 3) = 60$ Möglichkeiten. $x_2$ könnte statt 1 nur noch 9 lauten; denn das sind die einzigen $x$ mit $f(x) = 4$. Das ergibt $V(2, 1) = 2$ Möglichkeiten. Bei der Besetzung der $x_s$ mit $g(s) = 1$, d. h. des geordneten Paares $(x_3, x_6)$, können 5 und 2 nur noch die Plätze tauschen; es ergeben sich damit $V(2, 2) = 2$ Möglichkeiten. Da alle diese Möglichkeiten voneinander unabhängig ausgenutzt werden können, so läßt sich die geordnete Folge $(x_1, \ldots, x_6)$ zu dieser Funktion $g(s)$ auf genau

$$V(u_1, w_1)\ V(u_2, w_2)\ V(u_3, w_3) = 2 \cdot 60 \cdot 2 = 240$$

Arten wählen.

Satz 5: *Es sei $f(x)$ eine $(n, l)$-Funktion, $h$ und $m$ ganz, $3 \leq h \leq n$, $1 \leq m \leq h - 2$, $B$ eine aus $m$ verschiedenen Elementen $b_1, \ldots, b_m$ bestehende Untermenge des Wertevorrats von $f(x)$ (also $m \leq l$). Jedes $b_r$ habe in $f(x)$ die Vielfachheit $u_r$. Es sei $w = (w_1, \ldots, w_m)$ ein geordnetes System natürlicher Zahlen mit der Summe $h - 2$, $q$ durch (7) definiert. Dann gibt es genau $q N(h, m; w)$ geordnete Folgen von $h - 2$ verschiedenen Zahlen $x_1, \ldots, x_{h-2}$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, n - 2$, für die die $f(x_s)$ genau die Menge $B$ bilden und es zu jedem ganzen $r$ mit $1 \leq r \leq m$ genau $w_r$ Werte $s$ mit*

$$f(x_s) = b_r \tag{8}$$

*gibt.*

Beweis: Durch die Festsetzung (6) wird jede der im Satz genannten Folgen offenbar eindeutig auf eine Funktion aus dem Bereich derjenigen $(h, m)$-Funktionen $g(s)$ mit dem Wertevorrat $B$ abgebildet, in denen jedes $b_r$ die Vielfachheit $w_r$ hat. Jede Funktion $g(s)$ aus dem letzteren Bereich steht nun nach Satz 4 zunächst umgekehrt zu genau $q$ geordneten Folgen von $h - 2$ verschiedenen Zahlen $x_1, \ldots, x_{h-2}$ in der Beziehung (6). Das sind aber von selbst lauter Folgen von der im Satz genannten Art; denn aus (6) geht bereits hervor, daß die $f(x_s)$ genau die Menge $B$ bilden und es zu jedem $r$ genau $w_r$ Werte $s$ mit (8) gibt. Die Anzahl der im Satz genannten Folgen ist also $q$-mal so groß wie die der $(h, m)$-Funktionen $g(s)$ vom Wertevorrat $B$, in denen jedes $b_r$ die Vielfachheit $w_r$ hat. Daraus folgt nach Definition 4 die Behauptung.

SATZ 6: *Es sei $f(x)$ eine $(n, l)$-Funktion vom Wertevorrat $A$, $h$ ganz, $3 \leqq h \leqq n$. Legt man dann für jede Menge $B$ aus mindestens einem und höchstens $h-2$ Elementen von $A$ eine bestimmte Numerierung ihrer $m$ Elemente $b_1, \ldots, b_m$ fest, wobei jedes $b_r$ in $f(x)$ die Vielfachheit $u_r$ haben möge, so ist mit der Abkürzung* (7)

$$\sum_B \sum_w q N(h, m; w) = V(n-2, h-2),$$

*wo sich das äußere Summenzeichen auf alle Mengen $B$ aus mindestens einem und höchstens $h-2$ Elementen von $A$ und die innere Summation, in der $m$ und die $u_r$ die obige* (von $B$ abhängige) *Bedeutung haben, auf alle geordneten Folgen $w$ aus $m$ natürlichen Zahlen $w_1, \ldots, w_m$ mit der Summe $h-2$ erstreckt.*

BEWEIS: Nach Satz 5 ist die linke Seite die Anzahl aller geordneten Folgen von $h-2$ verschiedenen Zahlen aus der Reihe 1, 2, ..., $n-2$.

DEFINITION 6: *Sind $n \geqq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, so wird die Anzahl aller $(n, l)$-Funktionen eines gegebenen, aus $l$ Elementen bestehenden Wertevorrats mit $N(n, l)$ bezeichnet.*

BEMERKUNG: Von der besonderen Wahl des Wertevorrats hängt $N(n, l)$ offenbar nicht ab.

Klar ist

SATZ 7: *Sind $n \geqq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, so ist $N(n, l)$ im Falle $l > n-2$ gleich 0, im Falle $l \leqq n-2$ die Summe aller $N(n, l; v)$, wo über die geordneten Systeme $v$ aus $l$ natürlichen Zahlen mit der Summe $n-2$ summiert wird.*

BEISPIELE: $n = 6$, $l \leqq 2$. Aus (2) – (4) folgt

$$\begin{cases} N(6, 1) = 1, \\ N(6, 2) = 14. \end{cases} \tag{9}$$

Satz 8: *Ist $n \geqq 3$ ganz, so ist*

$$N(n,\ 1) = 1.$$

Beweis: In $N(n,\ 1\,;\ (v_1))$ muß $v_1 = n - 2$ sein. Nach Satz 2 ist

$$N(n,\ 1\,;\ (n-2)) = 1.$$

Die Behauptung folgt also aus Satz 7.

## § 2. Spaltzahlen und Ergänzungen von $(n,\ l)$-Funktionen

Definition 7: *Es sei $f(x)$ eine $(n,\ l)$-Funktion. Eine ganze Zahl $k$ mit $1 \leqq k \leqq n - 1$ heißt dann eine Spaltzahl der Funktion $f(x)$, wenn die Menge der Funktionswerte $f(x)$ mit $x \leqq k - 1$ zu der Menge der Funktionswerte $f(x)$ mit $x \geqq k$ elementefremd ist.*

Beispiele: Die Zahlen $k = 1$ und $k = n - 1$ sind stets Spaltzahlen; denn für $k = 1$ ist die Menge der Funktionswerte $f(x)$ mit $x \leqq k - 1$, für $k = n - 1$ die Menge der Funktionswerte $f(x)$ mit $x \geqq k$ leer. Die $(6,\ 2)$-Funktionen 1121 und 1212 haben außer $k = 1$ und $k = n - 1 = 5$ keine weitere Spaltzahl. Für die $(6,\ 2)$-Funktion 2111 kommt noch genau eine Spaltzahl hinzu, nämlich $k = 2$. Im Falle $l = n - 2$ ist offenbar jedes ganze $k$ mit $1 \leqq k \leqq n - 1$ Spaltzahl.

Satz 9: *Hat eine $(n,\ l)$-Funktion eine Spaltzahl $k$ mit $1 < k < n - 1$, so ist $n \geqq 4$, $l \geqq 2$.*

Beweis: Die Funktion heiße $f(x)$. Die Menge der Funktionswerte $f(x)$ mit $x \leqq k - 1$ und die der Funktionswerte $f(x)$ mit $x \geqq k$ sind beide nichtleer, andrerseits aber elementefremd. Der Wertevorrat von $f(x)$ besteht also aus mindestens zwei Elementen, d. h. es ist $l \geqq 2$. Nach Satz 1 ist ferner $n \geqq l + 2$, also $n \geqq 4$.

Klar ist

Satz 10: *Jede Spaltzahl einer $(n,\ l)$-Funktion ist die um 1 vermehrte Summe der Vielfachheiten der Elemente ihrer Vordermenge, wenn* (im Falle der Spaltzahl 1) *eine leere Summe* 0 *bedeutet.*

Definition 8: *Ist $f(x)$ eine $(n,\ l)$-Funktion, $M$ eine Menge von $n - l$ Elementen, $k$ eine Spaltzahl von $f(x)$, $m$ die Elementezahl der Vordermenge von $k$, $K$ eine Teilmenge von $M$ aus $k - m$ Elementen,* *so heißt das Paar* $(k, K)$ *eine Ergänzung, genauer* $M$*-Ergänzung oder* $(k, M)$*-Ergänzung der Funktion* $f(x)$. *Die Vordermenge von* $k$ *heißt zugleich die Vordermenge dieser Ergänzung.*

DEFINITION 9: *Im Falle der Definition 8 heißt die* $(k, M)$*-Ergänzung eine echte Ergänzung von* $f(x)$, *wenn* $1 < k < n - 1$ *ist, andernfalls eine unechte Ergänzung von* $f(x)$.

BEISPIELE: Im Falle $l = n - 2$ kann für $M$ stets die Menge $\{n - 1, n\}$ gewählt werden. Jedes ganze $k$ mit $1 \leq k \leq n - 1$ ist Spaltzahl; jeweils ist $m = k - 1$, also $k - m = 1$. Zu jedem $k$ gibt es also genau zwei $(k, M)$-Ergänzungen, da man für $K$ nur die Kombinationen $\{n - 1\}$ und $\{n\}$ aus je einem Element von $M$ wählen kann.

In den obigen Beispielen mit $n = 6$, $l \leq 2$ kann für $M$ stets die Menge der Zahlen $l + 1, l + 2, \ldots, n$, also $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ für $l = 1$, $\{3, 4, 5, 6\}$ für $l = 2$ gewählt werden. Im Falle $l = 1$ sind offenbar nur 1 und $n - 1 = 5$ Spaltzahlen. Im Falle $l = 2$ ergeben sich teilweise noch andere Spaltzahlen. In der folgenden Liste sind alle für $l = 1$ und $l = 2$ auftretenden Ergänzungen dadurch zusammengestellt, daß in senkrechten Spalten die Spaltzahlen $k$ und darunter neben jeder $(n, l)$-Funktion die zugehörigen möglichen Kombinationen $K$ von je $k - m$ Elementen von $M$ angegeben sind. Geordnet werden die $(6, l)$-Funktionen dabei nach den Systemen der Vielfachheiten $v_r$ ihrer Funktionswerte $a_r = r$.

| | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l = 1$: | | | | | |
| $v_1 = 4$: | | | | | |
| 1 1 1 1 | 2 | | | | 2 3 4 5 |
| | 3 | | | | 2 3 4 6 |
| | 4 | | | | 2 3 5 6 |
| | 5 | | | | 2 4 5 6 |
| | 6 | | | | 3 4 5 6 |
| $l = 2$: | | | | | |
| $v_1 = 1$, $v_2 = 3$: | | | | | |
| 1 2 2 2 | 3 | 3 | | | 3 4 5 |
| | 4 | 4 | | | 3 4 6 |
| | 5 | 5 | | | 3 5 6 |
| | 6 | 6 | | | 4 5 6 |

| | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 1 2 2 | 3 | | | | 3 4 5 |
| | 4 | | | | 3 4 6 |
| | 5 | | | | 3 5 6 |
| | 6 | | | | 4 5 6 |
| 2 2 1 2 | 3 | | | | 3 4 5 |
| | 4 | | | | 3 4 6 |
| | 5 | | | | 3 5 6 |
| | 6 | | | | 4 5 6 |
| 2 2 2 1 | 3 | | | 3 4 5 | 3 4 5 |
| | 4 | | | 3 4 6 | 3 4 6 |
| | 5 | | | 3 5 6 | 3 5 6 |
| | 6 | | | 4 5 6 | 4 5 6 |
| $v_1 = 2, \quad v_2 = 2:$ | | | | | |
| 1 1 2 2 | 3 | | 3 4 | | 3 4 5 |
| | 4 | | 3 5 | | 3 4 6 |
| | 5 | | 3 6 | | 3 5 6 |
| | 6 | | 4 5 | | 4 5 6 |
| | | | 4 6 | | |
| | | | 5 6 | | |
| 1 2 1 2 | 3 | | | | 3 4 5 |
| | 4 | | | | 3 4 6 |
| | 5 | | | | 3 5 6 |
| | 6 | | | | 4 5 6 |
| 1 2 2 1 | 3 | | | | 3 4 5 |
| | 4 | | | | 3 4 6 |
| | 5 | | | | 3 5 6 |
| | 6 | | | | 4 5 6 |
| 2 1 1 2 | 3 | | | | 3 4 5 |
| | 4 | | | | 3 4 6 |
| | 5 | | | | 3 5 6 |
| | 6 | | | | 4 5 6 |
| 2 1 2 1 | 3 | | | | 3 4 5 |
| | 4 | | | | 3 4 6 |
| | 5 | | | | 3 5 6 |
| | 6 | | | | 4 5 6 |

| | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 2 1 1 | 3 | | 3 4 | | 3 4 5 |
| | 4 | | 3 5 | | 3 4 6 |
| | 5 | | 3 6 | | 3 5 6 |
| | 6 | | 4 5 | | 4 5 6 |
| | | | 4 6 | | |
| | | | 5 6 | | |
| $v_1 = 3,\ v_2 = 1:$ | | | | | |
| 1 1 1 2 | 3 | | | 3 4 5 | 3 4 5 |
| | 4 | | | 3 4 6 | 3 4 6 |
| | 5 | | | 3 5 6 | 3 5 6 |
| | 6 | | | 4 5 6 | 4 5 6 |
| 1 1 2 1 | 3 | | | | 3 4 5 |
| | 4 | | | | 3 4 6 |
| | 5 | | | | 3 5 6 |
| | 6 | | | | 4 5 6 |
| 1 2 1 1 | 3 | | | | 3 4 5 |
| | 4 | | | | 3 4 6 |
| | 5 | | | | 3 5 6 |
| | 6 | | | | 4 5 6 |
| 2 1 1 1 | 3 | 3 | | | 3 4 5 |
| | 4 | 4 | | | 3 4 6 |
| | 5 | 5 | | | 3 5 6 |
| | 6 | 6 | | | 4 5 6 |

Klar ist

SATZ 11: *Ist $f(x)$ eine $(n, l)$-Funktion, $k$ eine Spaltzahl von $f(x)$, $m$ die Elementezahl der Vordermenge von $k$, so hat die Anzahl der $(k, M)$-Ergänzungen von $f(x)$ für jede Menge $M$ von $n - l$ Elementen denselben Wert, nämlich den Wert* $\binom{n-l}{k-m}$.

Aus Satz 9 folgt sofort

SATZ 12: *Hat eine $(n, l)$-Funktion eine echte Ergänzung, so ist* $n \geqq 4,\ l \geqq 2$.

DEFINITION 10: *Sind $n \geqq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, $A$ eine aus $l$ verschiedenen Werten $a_1, \ldots, a_l$ bestehende Menge, $v = (v_1, \ldots, v_l)$*

*ein geordnetes System natürlicher Zahlen mit der Summe* $n - 2$ (also $l \leq n - 2$), *M eine Menge von* $n - l$ *Elementen, so wird die Summe der Anzahlen der M-Ergänzungen bzw. echten M-Ergänzungen aller* $(n, l)$*-Funktionen vom Wertevorrat A, in denen jedes* $a_r$ *die Vielfachheit* $v_r$ *hat, wobei* (im zweiten Fall) *eine leere Summe die Zahl* 0 *bedeutet, mit* $E(n, l; v)$ *bzw.* $F(n, l; v)$ *oder ausführlich mit* $E(n, l; (v_1, \dots, v_l))$ *bzw.* $F(n, l; (v_1, \dots, v_l))$ *bezeichnet.*

Bemerkung: Offenbar hängen $E(n, l; v)$ und $F(n, l; v)$ nicht von der besonderen Wahl der Werte $a_1, \dots, a_l$, insbesondere auch bei festem Wertevorrat $A = \{a_1, \dots, a_l\}$ nicht von der Numerierung der $a_r$ ab, nach Satz 11 ebensowenig von der besonderen Wahl der Menge $M$. Auch bei einer Umstellung des Systems $v$ bleiben sie ungeändert.

Beispiele: Der Fall $l = n - 2$ ergibt, da für jedes $k$ mit $1 \leq k \leq n - 1$ genau zwei, für jede Funktion also insgesamt $2(n - 1)$ Ergänzungen festgestellt worden sind, zugleich aber $(n - 2)!$ Funktionen existieren,

$$E(n, n - 2; (1, 1, \dots, 1)) = 2(n - 1)(n - 2)! = 2(n - 1)!. \tag{10}$$

Zählt man nur die echten Ergänzungen, läßt also $k$ nur durch die $n - 3$ Werte von 2 bis $n - 2$ laufen, so ergibt sich entsprechend

$$F(n, n - 2; (1, 1, \dots, 1)) = 2(n - 3)(n - 2)!. \tag{11}$$

Dieser Fall zeigt zugleich, daß $E$ und $F$ im allgemeinen andere Werte erhalten würden, wenn man in Definition 8 als Ergänzungen einfach die Kombinationen $K$ von $k - m$ Elementen der Menge $M$, nicht die Paare $(k, K)$ bezeichnete. Denn für alle $n - 1$ bzw. $n - 3$ Werte $k$ entstehen hier immer wieder dieselben beiden Kombinationen (oben $\{n - 1\}$ und $\{n\}$) aus je einem Element. Auch muß man, wie dieser Fall zeigt, beachten, daß in Definition 10 nicht einfach von der Gesamtzahl der $M$-Ergänzungen bzw. echten $M$-Ergänzungen selbst, d. h. der Paare $(k, K)$ die Rede ist, die hier nur $2(n - 1)$ bzw. $2(n - 3)$ beträgt. Definition 10 handelt vielmehr ausdrücklich von der Summe der einzelnen Anzahlen für die verschiedenen Funktionen; d. h. wenn ein Paar $(k, K)$ bei mehreren Funktionen auftritt, muß man es entsprechend mehrfach zählen. Das alles läßt sich noch anschaulicher an dem zweiten der obigen Beispiele verfolgen: $n = 6$, $l \leqq 2$. Die oben aufgestellten Listen von Ergänzungen ergeben die Werte

$$(12)\quad \left\{\begin{array}{ll} E(6,\ 1;\ (4)) = 10, & F(6,\ 1;\ (4)) = 0; \\ E(6,\ 2;\ (1,\ 3)) = 40, & F(6,\ 2;\ (1,\ 3)) = 8; \\ E(6,\ 2;\ (2,\ 2)) = 60, & F(6,\ 2;\ (2,\ 2)) = 12; \\ E(6,\ 2;\ (3,\ 1)) = 40, & F(6,\ 2;\ (3,\ 1)) = 8. \end{array}\right.$$

Etwa für $n = 6$, $l = 2$, $v_1 = 2$, $v_2 = 2$ kommt das Paar $(k, K)$ mit $k = 3$, $K = \{3, 4\}$ zweimal, mit $k = 1$, $K = \{3\}$ sogar sechsmal vor und wird (im zweiten Falle nur bei $E$) entsprechend oft gezählt.

Aus Satz 12 ergibt sich sofort

Satz 13: *Ist $n \geqq 3$ ganz, so ist*

$$F(n,\ 1;\ (n-2)) = 0.$$

Satz 14: *Sind $n \geqq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, $v$ ein geordnetes System natürlicher Zahlen mit der Summe $n - 2$* (also $l \leqq n - 2$), *so ist*

$$E(n,\ l;\ v) = 2(n-l)\,N(n,\ l;\ v) + F(n,\ l;\ v).$$

Beweis: Es sei $v = (v_1, \ldots, v_l)$. Gegeben seien eine $(n, l)$-Funktion $f(x)$ und eine Menge $M$ von $n - l$ Elementen. Für die Spaltzahl $k = 1$ ist die Elementezahl $m$ der Vordermenge von $k$ gleich 0, also $k - m = 1$. Für die Spaltzahl $k = n - 1$ ist die Elementezahl $m$ der Vordermenge von $k$ gleich $l$, also $k - m = n - l - 1$. Die Gesamtzahl der unechten $M$-Ergänzungen, d. h. der $(k, M)$-Ergänzungen für diese beiden $k$ zusammen hat also für $f(x)$ nach Satz 11 den Wert

$$\binom{n-l}{1} + \binom{n-l}{n-l-1} = 2(n-l).$$

Hält man $M$ und die Elemente $a_1, \ldots, a_l$ des Wertevorrats fest, betrachtet aber alle diejenigen $(n, l)$-Funktionen, in denen jedes $a_r$ die Vielfachheit $v_r$ hat, so ist also die Summe der Anzahlen der unechten $M$-Ergänzungen $2(n-l)$-mal so groß wie die Anzahl der Funktionen selbst. Da diese $N(n,\ l;\ v)$ beträgt, so ergibt sich die Behauptung aus Definition 10.

Satz 15: *Sind* $n \geqq 3$ *und* $l$ *natürliche Zahlen,* $A$ *eine aus* $l$ *verschiedenen Elementen* $a_1, \ldots, a_l$ *bestehende Menge,* $v = (v_1, \ldots, v_l)$ *ein geordnetes System natürlicher Zahlen mit der Summe* $n - 2$ (also $l \leqq n - 2$), *so ist mit der Abkürzung* (5)

$$F(n, l; v) = U(n - l)! \sum_R V(k - 1, j - 1) V(n - k - 1, l - j - 1),$$

*wo sich die Summe über alle nichtleeren echten Untermengen* $R$ *von* $A$ *erstreckt und jeweils* $k$ *die um* 1 *vermehrte Summe der* $v_r$ *für die in* $R$ *enthaltenen* $a_r$, $j$ *die Elementezahl von* $R$ *bedeutet.*

Beweis: Es sei $M$ eine Menge von $n - l$ Elementen. Zur Bestimmung von $F(n, l; v)$ werden für alle diejenigen $(n, l)$-Funktionen $f(x)$ mit dem Wertevorrat $A$, in denen jedes $a_r$ die Vielfachheit $v_r$ hat, alle echten $M$-Ergänzungen gezählt. Jeweils ist die Vordermenge der Ergänzung eine nichtleere echte Teilmenge $R$ von $A$. Für die Gesamtheit dieser Funktionen $f(x)$ teile man nun die gezählten $M$-Ergänzungen nach der Vordermenge $R$ ein. Für jede nichtleere echte Teilmenge $R$ von $A$ kann es sich dann nach Satz 10 nur um $(k, M)$-Ergänzungen handeln, wo $k$ die um 1 vermehrte Summe der $v_r$ zu den in $R$ enthaltenen $a_r$ ist. Satz 3 ist mit $m = 2$, $A_1 = R$, $A_2 = A - R$, $h_1 = k - 1$ anwendbar; es wird $s_1 = k - 1$, $s_2 = n - k - 1$, $u_1 = k - 1$, also $u_1 = s_1$. Die Anzahl der zu $R$ passenden Funktionen $f(x)$ hat also nach Satz 3 den Wert $U(k - 1)!\,(n - k - 1)!$. Nach Satz 11 hat bei gegebenem $R$ die Anzahl der $M$-Ergänzungen für jede dieser Funktionen einen und denselben Wert, nämlich den Wert $\binom{n - l}{k - j}$, wo $j$ die Elementezahl von $R$ ist. Die Summe der Anzahlen der $M$-Ergänzungen mit der Vordermenge $R$ für alle diese Funktionen zusammen beträgt also

$$\binom{n - l}{k - j} U(k - 1)!\,(n - k - 1)! = U \frac{(n - l)!\,(k - 1)!\,(n - k - 1)!}{(k - j)!\,(n - l - k + j)!}$$
$$= U(n - l)!\, V(k - 1, j - 1)\, V(n - k - 1, l - j - 1).$$

Summation über $R$ liefert die Behauptung.

Satz 16: *Sind* $l \geqq 3$ *und* $m$ *natürliche Zahlen,* $A$ *eine aus* $l$ *verschiedenen Elementen* $a_1, \ldots, a_l$ *bestehende Menge,* $w = (w_1, \ldots, w_m)$ *ein geordnetes System natürlicher Zahlen mit der Summe* $l - 2$ (also

*$m \leqq l - 2$), $B$ eine aus $m$ verschiedenen Elementen $b_1, \ldots, b_m$ bestehende Untermenge von $A$, so hat die Anzahl der Paare aus einer nichtleeren echten Untermenge $R$ von $A$ und einer $(l, m)$-Funktion $g(s)$ vom Wertevorrat $B$, in der jedes $b_r$ die Vielfachheit $w_r$ hat und die die Elementezahl von $R$ zur Spaltzahl mit dem Durchschnitt von $R$ und $B$ als Vordermenge hat, den Wert $E(l, m; w)$.*

Beweis: Eine $(l, m)$-Funktion $g(s)$ vom Wertevorrat $B$, in der jedes $b_r$ die Vielfachheit $w_r$ hat, sei gegeben. Für jedes im angegebenen Sinne zu ihr passende $R$ ist dessen Elementezahl $j$ eine Spaltzahl von $g(s)$, ihre Vordermenge eine Teilmenge von $R$, und wenn diese Vordermenge genau $m$ Elemente hat, so hat $R$ noch genau $j - m$ weitere Elemente. Diese liegen aber nicht im Durchschnitt von $R$ und $B$, also überhaupt nicht in $B$, sondern in $A - B$. Ist umgekehrt $j$ eine Spaltzahl von $g(s)$, deren Vordermenge aus genau $m$ verschiedenen Elementen bestehen möge, so ist die Vereinigung dieser Vordermenge mit einer beliebigen Kombination von $j - m$ Elementen von $A - B$ wegen $1 \leqq j \leqq l - 1$ eine nichtleere echte Untermenge $R$ von $A$, die im angegebenen Sinne zu $g(s)$ paßt. Die zu $g(s)$ passenden $R$ sind damit ein-eindeutig den Paaren aus einer Spaltzahl $j$ von $g(s)$ und einer Kombination von $j - m$ Elementen der aus $l - m$ Elementen bestehenden Menge $A - B$ zugeordnet, wo jeweils $m$ die Elementezahl der Vordermenge von $j$ ist. Das sind genau die $(A - B)$-Ergänzungen der Funktion $g(s)$, und die Anzahl der zu $g(s)$ passenden $R$ ist gleich der Anzahl der $(A - B)$-Ergänzungen von $g(s)$. Läßt man $g(s)$ alle $(l, m)$-Funktionen vom Wertevorrat $B$ durchlaufen, in denen jedes $b_r$ die Vielfachheit $w_r$ hat, so erhält also die Anzahl der entstehenden Paare aus einem $R$ und einem $g(s)$ nach Definition 10 den Wert $E(l, m; w)$.

Definition 11: *Sind $n \geqq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, $M$ eine Menge von $n - l$ Elementen, so wird die Summe der Anzahlen der $M$-Ergänzungen bzw. echten $M$-Ergänzungen aller $(n, l)$-Funktionen eines gegebenen, aus $l$ Elementen bestehenden Wertevorrats, wo* (im zweiten Fall) *eine leere Summe die Zahl 0 bedeutet, mit $E(n, l)$ bzw. $F(n, l)$ bezeichnet.*

Bemerkung: Von der besonderen Wahl der Menge $M$ und des Wertevorrats hängen $E(n, l)$ und $F(n, l)$ offenbar nicht ab. Nach dem Wortlaut der Definition 11 werden in $E(n, l)$ und $F(n, l)$ wiederum nicht einfach die verschiedenen Paare $(k, K)$ im Sinne der Definition

8 gezählt, sondern wenn ein solches Paar bei mehreren Funktionen auftritt, zählt es entsprechend mehrfach.

Klar ist

Satz 17: *Es seien* $n \geqq 3$ *und* $l$ *natürliche Zahlen. Im Falle* $l > n - 2$ *ist dann* $E(n, l) = F(n, l) = 0$. *Im Falle* $l \leqq n - 2$ *ist* $E(n, l)$ *die Summe aller* $E(n, l; v)$, $F(n, l)$ *die Summe aller* $F(n, l; v)$, *wo beide Male über die geordneten Systeme* $v$ *aus* $l$ *natürlichen Zahlen mit der Summe* $n - 2$ *summiert wird.*

Beispiele: $n = 6$, $l \leqq 2$. Aus (12) ergibt sich:

$$\left\{\begin{array}{ll} E(6, 1) = 10, & F(6, 1) = 0; \\ E(6, 2) = 140, & F(6, 2) = 28. \end{array}\right. \tag{13}$$

## § 3. Hauptsatz über die Anzahl der Ergänzungen

Satz 18: *Sind* $n \geqq 3$ *und* $l$ *natürliche Zahlen,* $v = (v_1, \ldots, v_l)$ *ein geordnetes System natürlicher Zahlen mit der Summe* $n - 2$ (also $l \leqq n - 2$), *so ist*

$$E(n, l; v) = 2(n-1) N(n, l; v), \tag{14}$$

*mit der Abkürzung* (5) *auch*

$$E(n, l; v) = 2U(n-1)!, \tag{15}$$

*schließlich*

$$F(n, l; v) = 2(l-1) N(n, l; v). \tag{16}$$

Beweis: Für jede feste Wahl der Zahlen $n$, $l$, $v_1, \ldots, v_l$ ist (14) und ebenso (15) eine Folge von (16). Denn aus (16) ergibt sich nach Satz 14

$$\begin{aligned} E(n, l; v) &= 2(n-l) N(n, l; v) + 2(l-1) N(n, l; v) \\ &= 2(n-1) N(n, l; v), \end{aligned}$$

also (14). Hieraus folgt nach Satz 2 auch (15).

Zunächst sei $l = 1$. Dann muß $v_1 = n - 2$ sein. Nach Satz 13 ist also

$$F(n, l; v) = 0 = 2(l-1) N(n, l; v).$$

Für $l = 1$ gilt also (16) und damit nach dem Obigen auch (14) und (15).

Es sei ferner $l = 2$. Für eine $(n, 2)$-Funktion vom Wertevorrat $\{a_1, a_2\}$ seien $v_1$ und $v_2$ gegeben. Eine Menge $M$ aus $n - 2$ Elementen werde fest gewählt. Nur zwei der zu $a_1, a_2, v_1, v_2$ passenden $(n, 2)$-Funktionen haben eine Spaltzahl $k$ mit $1 < k < n - 1$:

1. Ist $f(x) = a_1$ für jedes $x \leqq v_1$, also $f(x) = a_2$ für jedes $x > v_1$, so ist $k = v_1 + 1$ die einzige derartige Spaltzahl. Für die Elementezahl $m$ ihrer Vordermenge gilt $m = 1$, $k - m = v_1$, so daß die Anzahl der $(k, M)$-Ergänzungen nach Satz 11 den Wert $\binom{n-2}{v_1}$ hat.

2. Ist $f(x) = a_2$ für jedes $x \leqq v_2$, also $f(x) = a_1$ für jedes $x > v_2$, so ist $k = v_2 + 1$ die einzige derartige Spaltzahl. Für die Elementezahl $m$ ihrer Vordermenge gilt $m = 1$, $k - m = v_2$, so daß die Anzahl der $(k, M)$-Ergänzungen nach Satz 11 den Wert $\binom{n-2}{v_2}$ hat.

Daher ist

$$F(n, l; v) = \binom{n-2}{v_1} + \binom{n-2}{v_2},$$

wegen $v_1 + v_2 = n - 2$ also

$$F(n, l; v) = 2\,\frac{(n-2)!}{v_1!\; v_2!} = 2\,U(n-2)!,$$

nach Satz 2 also

$$F(n, l; v) = 2\,N(n, l; v) = 2\,(l-1)\,N(n, l; v).$$

Auch für den Fall $l = 2$ ist damit (16), nach dem Obigen also auch (14) und (15) bewiesen.

Es sei nun $l > 2$ und die Behauptung für jedes kleinere $l$ bewiesen. $A$ sei eine aus $l$ verschiedenen Elementen $a_1, \ldots, a_l$ bestehende Menge, $M$ eine Menge aus $n - l$ Elementen. Für jede Menge $B$ aus mindestens einem und höchstens $l - 2$ Elementen von $A$ sei ein für allemal eine bestimmte Numerierung ihrer Elemente festgelegt. Für den Bereich der nichtleeren echten Untermengen $R$ von $A$ führe man nun die Funktion

$$\varphi(R) = V(k-1, j-1)\, V(n-k-1, l-j-1)$$

ein, wo $k$ die um 1 vermehrte Summe der $v_r$ für die in $R$ enthaltenen $a_r$, $j$ die Elementezahl von $R$ bedeutet. $\varphi(R)$ ist dann die Anzahl der Möglichkeiten, eine geordnete Folge von $j-1$ verschiedenen Zahlen $x_1, \ldots, x_{j-1}$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, k-1$ und anschließend eine geordnete Folge von $l-j-1$ verschiedenen Zahlen $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{l-2}$ aus der Reihe $k, k+1, \ldots, n-k-1$ anzugeben, was jedesmal eine geordnete Gesamtfolge $(x_1, \ldots, x_{l-2})$ ergibt.

Nach Satz 15 ist nunmehr

$$F(n, l; v) = U(n-l)! \sum_R \varphi(R), \tag{17}$$

wo sich die Summation über alle nichtleeren echten Untermengen $R$ von $A$ erstreckt. Diese Summe wird nun unterteilt. Zu jedem $R$ sei eine bestimmte $(n, l)$-Funktion $f_R(x)$ vom Wertevorrat $A$ herausgegriffen, in der jedes $a_r$ die Vielfachheit $v_r$ hat und $R$ die Vordermenge von $k$ ist. Eine solche Funktion gibt es. Man braucht nur die Elemente von $A$ in eine solche Reihenfolge $c_1, \ldots, c_l$ zu bringen, daß die $j$ Elemente von $R$ am Anfang stehen, und dann, wenn allgemein $v_r$ für $a_r = c_\lambda$ mit $t_\lambda$ bezeichnet wird, den ersten $t_1$ natürlichen Zahlen den Funktionswert $c_1$, den darauffolgenden $t_2$ natürlichen Zahlen den Funktionswert $c_2$ usw. zu geben. Da auch die $t_\lambda$ die Summe $n-2$ haben, so entsteht damit eine $(n, l)$-Funktion vom Wertevorrat $A$; jedes $a_r$ ist ein $c_\lambda$ und hat damit die Vielfachheit $t_\lambda = v_r$, und wegen $t_1 + \ldots + t_j = k-1$ ist $R$ die Vordermenge von $k$. Für eine $(n, l)$-Funktion $f_R(x)$ mit diesen Eigenschaften liegt der Funktionswert dann und nur dann in $R$, wenn $x \leqq k-1$ ist. $\varphi(R)$ ist also die Anzahl der geordneten Folgen aus $l-2$ verschiedenen Zahlen $x_1, \ldots, x_{l-2}$ mit der Eigenschaft, daß $f_R(x_s)$ für $s \leqq j-1$ stets, für $s \geqq j$ niemals in $R$ liegt. Für jede solche Folge ist die Gesamtheit der $f_R(x_s)$ $(1 \leqq s \leqq l-2)$ eine Teilmenge $B$ von $A$, deren Elementezahl $m$ der Bedingung $1 \leqq m \leqq l-2$ genügt. Für die Menge $B$ gibt es vermöge der allgemeinen Festsetzung bereits eine bestimmte Numerierung ihrer $m$ Elemente $b_1, \ldots, b_m$. Für jedes $r$ aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$ bedeute $w_r$ die Anzahl der $s$ mit $f_R(x_s) = b_r$. Dann ist $w_1 + \ldots + w_m = l-2$. Bei gegebenem $R$ sei die Anzahl der wie oben gebildeten Folgen $(x_1, \ldots, x_{l-2})$, die ein bestimmtes $B$ und eine bestimmte geordnete Folge $w = (w_1, \ldots, w_m)$ ($m$ Elementezahl von $B$) ergeben, mit $\varphi_{B,w}(R)$ bezeichnet. (Bei gegebenen $R$, $B$ und $w$ hängt dieser Wert durchaus noch von der zufällig gewählten Numerierung der Elemente $b_1, \ldots, b_m$ von $B$ ab.) Dann ist also

$$\varphi(R) = \sum_B \sum_w \varphi_{B,w}(R), \tag{18}$$

wo $B$ alle Untermengen von $A$ mit einer Elementezahl $m$ aus der Reihe 1, 2, ..., $l-2$, bei festem $B$ sodann $w$ alle geordneten Folgen aus $m$ natürlichen Zahlen mit der Summe $l-2$ durchläuft. (Übrigens ist in (18) schon die innere Summe offenbar von der zufälligen Numerierung der Elemente der Menge $B$ unabhängig.) Nach (17) ist also

$$F(n, l; v) = U(n-l)! \sum_R \sum_B \sum_w \varphi_{B,w}(R).$$

Die Reihenfolge der Summationen wird nun vertauscht, indem die Summationen über $B$ und $w$ der über $R$ vorangestellt werden. Das ist ohne weiteres möglich, weil $B$ und $R$ voneinander unabhängig gewählt werden konnten und der Bereich der $w$ durch $B$ allein bereits gegeben ist. Damit erhält man

$$F(n, l; v) = U(n-l)! \sum_B \sum_w \sum_R \varphi_{B,w}(R). \tag{19}$$

$\varphi_{B,w}(R)$ ist die Anzahl der geordneten Folgen von $l-2$ verschiedenen Zahlen $x_1, \ldots, x_{l-2}$ aus der Reihe 1, 2, ..., $n-2$, für die die $f_R(x_s)$ $(1 \leqq s \leqq l-2)$ insgesamt genau die Menge $B$ bilden und genau für die $s \leqq j-1$ obendrein in $R$ liegen und für die es, wenn $b_1, \ldots, b_m$ die Elemente von $B$ in der festgelegten Reihenfolge sind und die Folge $w$ wieder $(w_1, \ldots, w_m)$ lautet, zu jedem ganzen $r$ mit $1 \leqq r \leqq m$ genau $w_r$ Werte $s$ mit $f_R(x_s) = b_r$ gibt. Jede solche Folge wird nun durch die Festsetzung

$$g(s) = f_R(x_s) \quad (s = 1, 2, \ldots, l-2) \tag{20}$$

offenbar eindeutig auf eine Funktion aus dem Bereich derjenigen $(l, m)$-Funktionen $g(s)$ mit dem Wertevorrat $B$ abgebildet, in denen jedes $b_r$ die Vielfachheit $w_r$ hat und für die der Funktionswert $g(s)$ für $s \leqq j-1$ stets, für $s \geqq j$ niemals in $R$ liegt. Nach Satz 4 mit $f_R(x)$ statt $f(x)$ steht nun jede Funktion $g(s)$ aus dem letzteren Bereich, wenn jedes $b_r$ in $f_R(x)$ die Vielfachheit $u_r$ hat und $q$ anschließend durch (7) definiert wird, zunächst umgekehrt zu genau $q$ geordneten Folgen von $l-2$ verschiedenen Zahlen $x_1, \ldots, x_{l-2}$ aus der Reihe 1, 2, ..., $n-2$ in der Beziehung (20). Wie man aus (20) ersieht, sind das aber von selbst lauter Folgen von der in $\varphi_{B,w}(R)$ gezählten Art. $\varphi_{B,w}(R)$ ist also $q$-mal so groß wie die Anzahl der $(l, m)$-Funktionen $g(s)$ aus dem genannten Bereich.

Die innerste Summe in (19) ist zunächst die Anzahl der geordneten Paare aus einem $R$ und einer jener Folgen, also bei gegebenen $B$ und $w$, da $q$ nicht von $R$ abhängt, $q$-mal so groß wie die Anzahl der Paare aus einem $R$ und einer Funktion $g(s)$ aus dem Bereich. Nach Satz 16 ist also jeweils

$$\sum_R \varphi_{B,w}(R) = q\,E(l,\ m;\ w).$$

Aus (19) folgt also

$$F(n,\ l;\ v) = U(n-l)!\sum_B \sum_w q\,E(l,\ m;\ w).$$

Wegen $m < l$ ist nun auf $E(l, m; w)$ die Induktionsvoraussetzung anwendbar. Man erhält jeweils

$$E(l,\ m;\ w) = 2(l-1)\,N(l,\ m;\ w),$$

also

$$F(n,\ l;\ v) = 2(l-1)\,U(n-l)!\sum_B \sum_w q\,N(l,\ m;\ w).$$

Nach Satz 6 mit $h = l$ ist also

$$\begin{aligned} F(n,\ l;\ v) &= 2(l-1)\,U(n-l)!\ V(n-2,\ l-2) \\ &= 2(l-1)\,U(n-l)!\ \frac{(n-2)!}{(n-l)!} \\ &= 2(l-1)\,U(n-2)!. \end{aligned}$$

Nach Satz 2 ist damit (16) auch für das vorliegende $l$ bewiesen. (14) und (15) folgen daraus. Die Behauptung gilt also allgemein.

Bemerkung: In Anbetracht der Sätze 15 und 2 kommt die entscheidende Formel (16) auf die Relation

$$\begin{aligned} U(n-l)!\sum_R V(k-1,\ j-1)\,V(n-k-1,\ l-j-1) \\ = 2(l-1)\,U(n-2)!, \end{aligned}$$

d. h. auf

$$\sum_R V(k-1, j-1)\,V(n-k-1, l-j-1) = 2(l-1)\,V(n-2, l-2)$$

im Sinne des Satzes 15 hinaus. Vielleicht gelingt für die letztere Formel ein ganz einfacher analytischer Beweis ohne kombinatorischen Aufwand. Das würde Satz 18 fast trivial machen.

Beispiele: In dem oben zunächst behandelten Fall $l = n - 2$, wo also $v_1 = \ldots = v_l = 1$ ist, liest man den Satz an (1), (10), (11) ab, da $l - 1 = n - 3$ ist. Ebenso ergibt er sich in den anschließend behandelten Beispielen $n = 6$, $l \leqq 2$ für alle zulässigen Systeme $v$ an Hand der Gleichungen (2), (3), (4), (12), da $2(n-1) = 10$, $2(l-1)$ die Zahl 0 bzw. 2 ist. Man sieht an den letzteren Beispielen aber zugleich, daß schon für $l = 2$ keineswegs jede einzelne $(n, l)$-Funktion genau $2(n-1)$ Ergänzungen oder $2(l-1)$ echte Ergänzungen hat, wie es für $l = n - 2$ noch durchweg der Fall war. Satz 18 sagt gerade aus, daß dies wenigstens «im Durchschnitt» über alle $(n, l)$-Funktionen gilt, und zwar bereits dann, wenn man die Vielfachheiten der Funktionswerte vorschreibt.

Satz 19: *Sind $n \geqq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, so ist*

$$E(n, l) = 2(n-1)\,N(n, l),$$
$$F(n, l) = 2(l-1)\,N(n, l).$$

Beweis: Für $l > n - 2$ folgt die Behauptung aus Satz 7 und 17. Es sei nunmehr $l \leqq n - 2$. Nach Satz 17 ist $E(n, l)$ die Summe aller $E(n, l; v)$, $F(n, l)$ die Summe aller $F(n, l; v)$, wo jeweils über die geordneten Systeme $v$ aus $l$ natürlichen Zahlen mit der Summe $n - 2$ summiert wird. Tut man dies in Satz 18, so folgt also aus Satz 7 die Behauptung.

Beispiele: Für $n = 6$, $l \leqq 2$ liest man den Satz an (9) und (13) ab, da $2(n-1) = 10$, $2(l-1)$ die Zahl 0 bzw. 2 ist.

## § 4. Die Rekursion der $N(n, l)$

Satz 20: *Sind $n \geqq 3$ und $L$ natürliche Zahlen, so ist*

$$\sum_{l=1}^{L} \binom{L}{l} N(n, l) = L^{n-2}, \tag{21}$$

$$\sum_{l=1}^{\mathrm{Min}\,(L,\, n-2)} \binom{L}{l} N(n, l) = L^{n-2}. \tag{22}$$

Beweis: Ist $l$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, L$, so gibt es unter den nämlichen Zahlen genau $\binom{L}{l}$ Kombinationen von $l$ Werten, und jede von ihnen dient genau $N(n, l)$ Funktionen mit dem Argumentenbereich $\{1, 2, ..., n-2\}$ als Wertevorrat. Es gibt also genau $\binom{L}{l} N(n, l)$ Funktionen mit diesem Argumentenbereich und einem Wertevorrat von genau $l$ Zahlen aus der Reihe $1, 2, ..., L$. Summation über alle $l$ von 1 bis $L$ liefert daher die Anzahl der Funktionen mit dem Argumentenbereich $\{1, 2, ..., n-2\}$, die nur Werte aus der Reihe $1, 2, ..., L$ annehmen, also die Zahl $L^{n-2}$. Damit ist (21) bewiesen. Da $N(n, l)$ nach Satz 7 für $l > n-2$ verschwindet, so folgt auch (22).

Aus Satz 19 und 20 folgt sofort

SATZ 21: *Sind $n \geqq 3$ und $L$ natürliche Zahlen, so ist*

$$\sum_{l=1}^{L} \binom{L}{l} E(n, l) = 2(n-1) L^{n-2}, \tag{23}$$

$$\sum_{l=1}^{Min(L, n-2)} \binom{L}{l} E(n, l) = 2(n-1) L^{n-2}. \tag{24}$$

BEISPIEL: $n = 6$, $L = 2$. Die Summen in (21) und (23) erhält man, wenn man in dem Beispiel $n = 6$, $l \leqq 2$ des § 1 für $l = 1$ auch erlaubt, daß statt des Funktionswertes 1 der Funktionswert 2 benutzt wird, so daß die Funktion 2222 entsteht. Will man hierfür auch die Ergänzungen darstellen, so nimmt man als Menge $M$ im Sinne der Definition 8 zweckmäßig die Menge $\{1, 3, 4, 5, 6\}$. Das ergibt die folgende Liste:

| | $k = 1$ | $k = 2$ | $k = 3$ | $k = 4$ | $k = 5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l = 1$: | | | | | |
| $v_1 = 4$: | | | | | |
| 2 2 2 2 | 1 | | | | 1 3 4 5 |
| | 3 | | | | 1 3 4 6 |
| | 4 | | | | 1 3 5 6 |
| | 5 | | | | 1 4 5 6 |
| | 6 | | | | 3 4 5 6 |

Auch diese Funktion bringt also 10 Ergänzungen, darunter keine echte Ergänzung. Für $l = 2$ kommt nichts Neues hinzu. Die Summe in (21) erhält damit den Wert

$$\binom{2}{1} N(6, 1) + \binom{2}{2} N(6, 2) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 14 = 2 + 14 = 16,$$

die Summe in (23) den Wert

$$\binom{2}{1} E(6, 1) + \binom{2}{2} E(6, 2) = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 140 = 20 + 140 = 160,$$

und das sind die in (21) und (23) verlangten Werte $L^{n-2}$ bzw. $2(n-1) L^{n-2}$.

Die durch Satz 20 gelieferte Rekursion der $N(n, l)$ befriedigt noch nicht, da sie sich der Potenzen bedient. Aber eben deswegen bringt sie die Potenzen in einen Zusammenhang, aus dem sich durch Kombination mit Satz 19, wie sie in (24) zum Ausdruck kommt, die im Eingang zitierte Formel von *Bessel-Hagen* und *Hasse* ergibt. In der Originalfassung lautet diese für jede natürliche Zahl $n$

$$\sum_{k+l=n-1} \frac{(k+1)^{k-1}}{k!} \frac{(l+1)^{l-1}}{l!} = 2 \frac{(n+1)^{n-2}}{(n-1)!},$$

wo $k$ und $l$ nichtnegative ganze Zahlen bedeuten. Mit $n-1$ statt $n$ bei gleichzeitiger Umformung des Summengliedes besagt dies genau, daß für jedes ganze $n \geqq 2$

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(k+1)^k}{(k+1)!} \frac{(n-k-1)^{n-k-2}}{(n-k-1)!} = 2 \frac{n^{n-3}}{(n-2)!}$$

oder

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^{k-1}}{k!} \frac{(n-k)^{n-k-1}}{(n-k)!} = 2 \frac{n^{n-3}}{(n-2)!}$$

ist. Multiplikation mit $n!$ ergibt als gleichwertige Fassung

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k^{k-1} (n-k)^{n-k-1} = 2(n-1) n^{n-2}, \tag{25}$$

wo $n$ jede natürliche Zahl sein kann, wenn im Falle $n = 1$ die leere Summe 0 bedeutet. (25) läßt sich nun folgendermaßen beweisen: Für $n = 1$ und $n = 2$ rechnet man die Formel leicht nach. Es sei also $n \geqq 3$. Es sei $k$ ganz, $1 \leqq k \leqq n-1$. In der Menge $C = \{1, 2, \dots, n\}$ gibt es genau $\binom{n}{k}$ Kombinationen $B$ von $k$ Elementen. Für jedes solche $B$ ist $k^{k-1}$ die Anzahl der geordneten Folgen von $k-1$ (nicht notwendig verschiedenen) Zahlen $x_1, \dots, x_{k-1}$ aus $B$, $(n-k)^{n-k-1}$ die

Anzahl der geordneten Folgen von $n - k - 1$ (nicht notwendig verschiedenen) Zahlen $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{n-2}$ aus $C - B$. Die linke Seite $S$ von (25) ist also die Anzahl der Paare aus einer nichtleeren echten Untermenge $B$ von $C$ und einer Funktion $g(s) = x_s$ mit dem Argumentenbereich $\{1, 2, \ldots, n-2\}$, deren Funktionswerte $g(s)$, wenn $k$ die Elementezahl von $B$ ist, für $s \leqq k - 1$ in $B$, für $s \geqq k$ in $C$, aber nicht in $B$ liegen. Der Wertevorrat $A$ von $g(s)$ ist Untermenge von $C$ und bestehe aus $l$ Elementen; es ist $1 \leqq l \leqq n - 2$. Die Funktion $g(s)$ ist eine $(n, l)$-Funktion, und $k$ ist Spaltzahl von $g(s)$. Die Zählung der Paare aus einem $B$ und einem $g(s)$ wird nun zunächst nach $l$, dann bei festem $l$ nach $A$, schließlich bei festem $A$ nach $k$ unterteilt. Zunächst seien eine ganze Zahl $l$ mit $1 \leqq l \leqq n - 2$, eine Untermenge $A$ von $C$ aus $l$ Elementen und eine ganze Zahl $k$ mit $1 \leqq k \leqq n - 1$ gegeben. In den betreffenden Paaren aus einem $B$ und einem $g(s)$ muß die $(n, l)$-Funktion $g(s)$ dann den Wertevorrat $A$ haben und $k$ für sie Spaltzahl sein, und jede $(n, l)$-Funktion $g(s)$ mit diesen beiden Eigenschaften tritt in so vielen Paaren auf, wie es Untermengen $B$ von $C$ mit $k$ Elementen gibt, die jeden Funktionswert $g(s)$ mit $s \leqq k - 1$, aber keinen mit $s \geqq k$ enthalten. Diese $B$ sind offenbar jeweils die Vereinigungsmengen der Vordermenge von $k$, die $m$ Elemente haben möge, mit den Kombinationen von je $k - m$ Elementen der aus insgesamt $n - l$ Elementen bestehenden Menge $M = C - A$. Ihre Anzahl ist also gleich der Anzahl der $(k, M)$-Ergänzungen von $g(s)$. Macht man $k$ veränderlich, hält aber $l$ und $A$ noch fest, so tritt also jede $(n, l)$-Funktion vom Wertevorrat $A$ in genau so vielen Paaren auf, wie die Gesamtzahl ihrer $M$-Ergänzungen beträgt, und die verschiedenen $(n, l)$-Funktionen vom Wertevorrat $A$ ergeben mit den dazu passenden Mengen $B$ insgesamt $E(n, l)$ Paare. Hält man $l$ fest, macht aber den Wertevorrat $A$ veränderlich, so kann dieser $\binom{n}{l}$ Mengen durchlaufen, und da zwei verschiedene $A$ nicht zur selben Funktion $g(s)$ gehören können, so entstehen $\binom{n}{l} E(n, l)$ Paare. $S$ ist die Gesamtzahl aller Paare; daher ist

$$S = \sum_{l=1}^{n-2} \binom{n}{l} E(n, l),$$

nach (24) mit $L = n$ also

$$S = 2(n-1)\, n^{n-2}.$$

Damit ist (25) bewiesen.

Eine Verallgemeinerung von (25) sei noch erwähnt:

Satz 22: *Sind $n$ und $l \leqq n$ natürliche Zahlen, so ist, wenn* (für $l = 1$) *eine leere Summe den Wert* 0 *bedeutet,*

$$(26) \quad \sum_{k=1}^{l-1} \binom{l}{k} \sum_{p=k}^{n-l+k} \binom{n-l}{p-k} k^{p-1} (l-k)^{n-p-1} = 2(l-1)\, l^{n-2}.$$

Beweis: Die linke Seite von (26) hat den Wert

$$\sum_{k=1}^{l-1} \binom{l}{k} k^{k-1} (l-k)^{l-k-1} \sum_{p=k}^{n-l+k} \binom{n-l}{p-k} k^{p-k} (l-k)^{n-l-p+k}$$

$$= \sum_{k=1}^{l-1} \binom{l}{k} k^{k-1} (l-k)^{l-k-1} \sum_{p=o}^{n-l} \binom{n-l}{p} k^{p} (l-k)^{n-l-p}$$

$$= \sum_{k=1}^{l-1} \binom{l}{k} k^{k-1} (l-k)^{l-k-1}\, l^{n-l}.$$

Nach (25) mit $l$ statt $n$ hat der letzte Ausdruck den Wert

$$l^{n-l} \cdot 2(l-1)\, l^{l-2} = 2(l-1)\, l^{n-2}.$$

Satz 23: *Sind $n$ und $l \leqq n$ natürliche Zahlen, so ist, wenn* $0^0$ *den Wert* 1 *und leere Summen den Wert* 0 *bedeuten,*

$$(27) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{p=Max(o,\, k+l-n)}^{Min(k,\, l)} \binom{l}{p} \binom{n-l}{k-p} p^{k-1} (l-p)^{n-k-1} = 2(n-1)\, l^{n-2},$$

$$(28) \quad \sum_{p=o}^{l} \binom{l}{p} \sum_{k=Max(1,\, p)}^{Min(n-1,\, n-l+p)} \binom{n-l}{k-p} p^{k-1} (l-p)^{n-k-1} = 2(n-1)\, l^{n-2}.$$

Vorbemerkung: (25) ergibt sich aus Satz 23 als Sonderfall $l = n$. Der Wert $0^0$ kommt nur im Falle $l < n$, $k = 1$ (für $p = 0$) und im Falle $l < n$, $k = n - 1$ (für $p = l$) vor.

Beweis: (27) und (28) sind gleichbedeutend. Denn das Paar ganzer Zahlen $k$, $p$ kommt in (27) dann und nur dann vor, wenn

$$1 \leqq k \leqq n-1, \quad 0 \leqq p \leqq l, \quad k+l-n \leqq p \leqq k$$

ist, in (28) dann und nur dann, wenn

$$0 \leq p \leq l, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad p \leq k \leq n-l+p$$

ist. Die letzteren Bedingungen sind in ihrer Gesamtheit offenbar mit den ersteren gleichwertig.

Zunächst werde nun (28) bewiesen. Für $0 < p < l$ ist

$$\text{Max}\,(1,\, p) = p,$$
$$\text{Min}\,(n-1,\, n-l+p) = n-l+p.$$

Bis auf die Glieder mit $p = 0$ und $p = l$ deckt sich also die linke Seite von (28) mit der von (26), hat also nach (26) den Wert $2\,(l-1)\,l^{n-2}$. Das Glied mit $p = 0$ ergibt den Beitrag

$$\binom{l}{0} \sum_{k=1}^{n-l} \binom{n-l}{k}\, 0^{k-1}\, l^{n-k-1}.$$

Für $l = n$ ist diese Summe leer; für $l < n$ ist in ihr nur das Glied mit $k = 1$ von 0 verschieden. In beiden Fällen wird der Ausdruck gleich $(n-l)\,l^{n-2}$. Das Glied mit $p = l$ ergibt den Beitrag

$$\binom{l}{l} \sum_{k=l}^{n-1} \binom{n-l}{k-l}\, l^{k-1}\, 0^{n-k-1}.$$

Für $l = n$ ist diese Summe leer; für $l < n$ ist in ihr nur das Glied mit $k = n-1$ von 0 verschieden. In beiden Fällen wird der Ausdruck gleich $(n-l)\,l^{n-2}$. Die linke Seite von (28) erhält damit den Wert

$$2\,(n-l)\,l^{n-2} + 2\,(l-1)\,l^{n-2} = 2\,(n-1)\,l^{n-2}.$$

Damit ist (28) und nach dem Obigen auch (27) bewiesen.

Mit ähnlichen Mitteln, wie sie oben zu (25) und damit zu einer Rekursion zwischen Potenzen mit einfacher Beziehung zwischen der Basis und dem Exponenten führten, läßt sich auch eine Rekursion zwischen den $N\,(n,\, l)$ unter Vermeidung des in Satz 20 noch erforderlichen Potenzbegriffes gewinnen, wiederum unter wesentlicher Benutzung des Satzes 19. Sie besteht in

Satz 24: *Sind* $n \geqq 4$ *und* $l \leqq n-2$ *natürliche Zahlen, so ist, wenn* (für $l = 1$) *leere Summen* 0 *bedeuten,*

$$(29)\quad \sum_{k=2}^{n-2} \sum_{m=\mathrm{Max}\,(1,\,k+l-n+1)}^{\mathrm{Min}\,(k,\,l)-1} \binom{l}{m}\binom{n-l}{k-m} N(k+1, m)\, N(n-k+1, l-m) = 2\,(l-1)\, N(n, l),$$

$$(30)\quad \sum_{m=1}^{l-1} \binom{l}{m} \sum_{k=m+1}^{n-l+m-1} \binom{n-l}{k-m} N(k+1, m)\, N(n-k+1, l-m) = 2\,(l-1)\, N(n, l).$$

Beweis: (29) und (30) sind gleichbedeutend. Denn das Paar ganzer Zahlen $k$, $m$ tritt in (29) und ebenso auch in (30) sicher nur für solche $m$ auf, für die

$$(31)\qquad 1 \leqq m \leqq l-1$$

ist. Mit jedem solchen $m$ zusammen kommt $k$ in (29) dann und nur dann vor, wenn

$$(32)\qquad 2 \leqq k \leqq n-2$$

und zugleich

$$k+l-n+1 \leqq m \leqq k-1,$$

d. h. im ganzen

$$(33)\qquad \mathrm{Max}\,(2,\, m+1) \leqq k \leqq \mathrm{Min}\,(n-2,\, n-l+m-1),$$

d. h. wegen (31) einfach

$$(34)\qquad m+1 \leqq k \leqq n-l+m-1$$

ist, und das ist gerade auch die Bedingung für das Auftreten von $k$ in (30).

Zunächst werde nun (30) bewiesen. Es sei $A$ eine Menge von $l$ Elementen, $M$ eine Menge von $n-l$ Elementen. $F(n, l)$ ist die Summe der Anzahlen der echten $M$-Ergänzungen aller $(n, l)$-Funktionen $f(x)$ vom Wertevorrat $A$. Diese Ergänzungen sind die Paare $(k, K)$, wo $k$ eine Spaltzahl von $f(x)$ mit der Eigenschaft (32), $K$ eine Kombination von $k-m$ Elementen der Menge $M$ bedeutet, wenn die Vordermenge $B$ von $k$ in $f(x)$ aus genau $m$ verschiedenen Elementen besteht. $F(n, l)$ ist dann die Anzahl der zugehörigen Tripel $(f(x), k, K)$. Diese werden nun nach den Vordermengen $B$ von $k$ eingeteilt. Jeweils ist $B$ eine nichtleere echte Untermenge von $A$; denn wegen $k - 1 \geqq 1$ gibt es einen Funktionswert $f(x)$ mit $x \leqq k - 1$, also aus $B$, wegen $k \leqq n - 2$ auch einen mit $x \geqq k$, also, da $k$ Spaltzahl ist, aus $A - B$. Die Funktionswerte $f(x)$ für die $k - 1$ Argumente $x \leqq k - 1$ müssen die aus $m$ Elementen bestehende Menge $B$, die für die $n - k - 1$ Argumente $x \geqq k$ die aus $l - m$ Elementen bestehende Menge $A - B$ bilden. Jede nichtleere echte Untermenge $B$ von $A$, die aus $m$ Elementen bestehen möge, kann also nur zu solchen Tripeln gehören, in denen $k$ der Bedingung (32) und außerdem der Bedingung

$$m \leqq k - 1, \quad l - m \leqq n - k - 1,$$

im ganzen also der Bedingung (33), d. h., da sicher (31) gilt, einfach der Bedingung (34) genügt. Wählt man nun eine nichtleere echte Untermenge $B$ von $A$ und eine der Bedingung (34) genügende ganze Zahl $k$, so ist die Anzahl der $(n, l)$-Funktionen mit dem Wertevorrat $A$, für die $k$ Spaltzahl mit der Vordermenge $B$ ist, offenbar gleich dem Produkt aus der Anzahl der genau für $x = 1, 2, \ldots, k - 1$ definierten Funktionen $g(x)$ vom Wertevorrat $B$ und der Anzahl der genau für $x = k, k + 1, \ldots, n - 2$ definierten Funktionen $h(x)$ vom Wertevorrat $A - B$. Die Anzahl der $g(x)$ ist $N(k + 1, m)$, und da die $h(x)$ den genau für $x = 1, 2, \ldots, n - k - 1$ definierten Funktionen $h_1(x)$ vom Wertevorrat $A - B$ vermöge der Beziehung

$$h(x + k - 1) = h_1(x)$$

ein-eindeutig zugeordnet sind, so beträgt ihre Anzahl

$$N(n - k + 1, l - m).$$

Die Anzahl der $(n, l)$-Funktionen $f(x)$ mit dem Wertevorrat $A$ und der Vordermenge $B$ zur Spaltzahl $k$ beträgt also

$$N(k + 1, m)\, N(n - k + 1, l - m).$$

Jeweils lassen sich $f(x)$ und $k$ durch genau $\binom{n - l}{k - m}$ Kombinationen $K$ zu einem zugelassenen Tripel $(f(x), k, K)$ ergänzen. Zu $k$ und $B$ gehören also genau

$$\binom{n - l}{k - m} N(k + 1, m)\, N(n - k + 1, l - m)$$

Tripel. Macht man $k$ veränderlich, hält aber $B$ noch fest, so ergeben sich also genau so viel Tripel $(f(x), k, K)$, wie die innere Summe auf der linken Seite von (30) beträgt. Zwei verschiedene $B$ können nun nicht zum selben Tripel gehören; denn durch das Tripel sind $f(x)$ und $k$, damit auch die Vordermenge $B$ von $k$ eindeutig bestimmt. $F(n, l)$ ergibt sich also, wenn man die innere Summe von (30) über $B$ summiert, d. h. sie bei zunächst festgehaltenem $m$ mit der Anzahl $\binom{l}{m}$ der möglichen $B$ multipliziert und das Ergebnis über die $m$ mit (31) summiert. Die linke Seite von (30) hat also den Wert $F(n, l)$. Nach Satz 19 ist damit (30) und daher nach dem Obigen auch (29) bewiesen.

Bemerkung: Die beiden Summen (29) und (30) bestehen aus denselben $(l-1)(n-l-1)$ Gliedern. Ordnet man diese nach wachsendem Wert des äußeren und, solange dieser derselbe bleibt, nach wachsendem Wert des inneren Summationsbuchstabens, so treten sie in jeder der Gleichungen (29) und (30) bis auf eine Vertauschung der Faktoren $N$ in symmetrischer Anordnung auf. Denn durch Spiegelung geht in (29) zunächst $k$ in $k' = n - k$ über, und da sich das kleinste zu $k$ und das größte zu $k'$ passende $m$ wegen

$$\begin{aligned} l - \operatorname{Max}(1,\ k + l - n + 1) &= \operatorname{Min}(l - 1,\ n - k - 1) \\ &= \operatorname{Min}(k',\ l) - 1 \end{aligned}$$

zu $l$ ergänzen, so gilt dasselbe für zwei beliebige an symmetrischer Stelle auftretende Werte $m$ und $m'$ des inneren Summationsbuchstabens. In (30) geht $m$ durch Spiegelung direkt in $m' = l - m$ über, und da das kleinste zu $m$ und das größte zu $m'$ passende $k$ zusammen

$$(m + 1) + (n - l + m' - 1) = n$$

ergeben, so haben auch zwei beliebige an symmetrischer Stelle auftretende Werte $k$ und $k'$ des inneren Summationsbuchstabens die Summe $n$. In beiden Gleichungen ist also wegen

$$m + m' = l$$

der Faktor $\binom{l}{m}$, wegen

$$(k - m) + (k' - m') = n - l$$

der Faktor $\binom{n-l}{k-m}$ gegenüber der Spiegelung invariant, während die Faktoren $N(k+1, m)$ und $N(n-k+1, l-m)$ die Plätze tauschen.

Im etwaigen unpaaren Mittelglied, das der angegebenen Gliederzahl zufolge dann und nur dann auftritt, wenn $n$ und $l$ beide gerade sind, werden die beiden Faktoren $N$ daher gleich; sie lauten beide $N\left(\frac{n}{2}+1, \frac{l}{2}\right)$.

Beispiele zeigen, daß in (30) keineswegs, wie man vermuten könnte, alle $l-1$ Glieder der äußeren Summe denselben Wert $2N(n, l)$ zu haben brauchen. Für $n = 7$, $l = 4$ z. B. lauten die 6 Glieder der Doppelsumme je zweimal 432, 72 und 216, und hieraus läßt sich $2N(n, l) = 480$ überhaupt nicht kombinieren.

Um die Nachprüfung dieses und anderer Beispiele zu erleichtern, sei noch ein an sich entbehrlicher Paragraph angehängt.

## § 5. Weiteres über den Bau der $N(n, l)$

Satz 25: *Sind $n \geqq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, so ist $N(n, l)$ durch $l!$ teilbar.*

Beweis: Für einen aus $l$ Elementen bestehenden Wertevorrat $A$ erhält man alle $(n, l)$-Funktionen und jede nur einmal, wenn man das Intervall der ganzen Zahlen $x$ mit $1 \leqq x \leqq n-2$ auf alle Arten in $l$ nichtleere Teilbereiche zerlegt und den $x$ aus einem und demselben Teilbereich dasselbe, den $x$ aus zwei verschiedenen Teilbereichen verschiedene Elemente von $A$ als Funktionswerte zuordnet. Bei jeder Zerlegung ist aber die Verteilung der Funktionswerte auf die Teilbereiche auf genau $l!$ Arten möglich.

Satz 26: *Sind $l$, $m$, $r$ ganz, $l \geqq m \geqq r \geqq 0$, so ist*

$$\binom{l}{m}\binom{m}{r} = \binom{l-r}{m-r}\binom{l}{r}.$$

Beweis:

$$\binom{l}{m}\binom{m}{r} = \frac{l!\,m!}{m!\,(l-m)!\,r!\,(m-r)!}$$

$$= \frac{(l-r)!}{(m-r)!\,(l-m)!} \cdot \frac{l!}{r!\,(l-r)!}$$

$$= \binom{l-r}{m-r}\binom{l}{r}.$$

Satz 27: *Sind $l$ und $r$ ganz, $l \geqq r \geqq 0$, so ist*

$$\sum_{m=r}^{l} (-1)^{m-r} \binom{l}{m} \binom{m}{r} = \begin{cases} 0 \text{ für } l > r, \\ 1 \text{ für } l = r. \end{cases}$$

Beweis: Die linke Seite der Behauptung hat nach Satz 26 den Wert

$$\sum_{m=r}^{l} (-1)^{m-r} \binom{l-r}{m-r} \binom{l}{r} = \binom{l}{r} \sum_{m=0}^{l-r} (-1)^{m} \binom{l-r}{m}$$

$$= \binom{l}{r} (1-1)^{l-r} = \binom{l}{r} \cdot 0^{l-r},$$

wenn unter $0^0$ (im Falle $l = r$) die Zahl 1 verstanden wird.

Satz 28: *Sind $n \geqq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, so ist*

$$N(n, l) = \sum_{r=1}^{l} (-1)^{l-r} \binom{l}{r} r^{n-2}.$$

Beweis: Im Falle $l = 1$ hat die rechte und nach Satz 8 auch die linke Seite der Behauptung den Wert 1. Für $l = 1$ trifft der Satz also zu. Nun sei $l > 1$ und die Behauptung für alle kleineren $l$ bewiesen. Nach Satz 20 ist dann

$$N(n, l) = l^{n-2} - \sum_{m=1}^{l-1} \binom{l}{m} N(n, m)$$

$$= l^{n-2} - \sum_{m=1}^{l-1} \binom{l}{m} \sum_{r=1}^{m} (-1)^{m-r} \binom{m}{r} r^{n-2}$$

$$= l^{n-2} - \sum_{r=1}^{l-1} \left\{ \sum_{m=r}^{l-1} (-1)^{m-r} \binom{l}{m} \binom{m}{r} \right\} r^{n-2}.$$

Nach Satz 27 ist nun für $1 \leqq r \leqq l-1$ stets

$$\sum_{m=r}^{l} (-1)^{m-r} \binom{l}{m} \binom{m}{r} = 0,$$

daher

$$\sum_{m=r}^{l-1} (-1)^{m-r} \binom{l}{m} \binom{m}{r} = -(-1)^{l-r} \binom{l}{l} \binom{l}{r} = -(-1)^{l-r} \binom{l}{r}.$$

Somit ist

$$N(n, l) = l^{n-2} + \sum_{r=1}^{l-1} (-1)^{l-r} \binom{l}{r} r^{n-2}$$
$$= \sum_{r=1}^{l} (-1)^{l-r} \binom{l}{r} r^{n-2}.$$

Die Behauptung gilt also auch für das vorliegende $l$ und damit allgemein.

BEMERKUNG: In Satz 28 darf man die Summation natürlich auch bei $r = 0$ beginnen lassen. Auch im Beweis kann man dann den Summationsbereich beibehalten, da in Satz 27 auch $r = 0$ sein durfte.

Ein einfacher Sonderfall ist der aus Satz 28 ohne weiteres ersichtliche

SATZ 29: *Ist $n \geqq 3$ ganz, so ist*

$$N(n, 2) = 2^{n-2} - 2.$$

SATZ 30: *Für jedes ganze $l > 0$ ist*

$$N(l + 2, l) = l!.$$

BEWEIS: $N(l + 2, l; (v_1, \ldots, v_l))$ existiert nur für den Fall $v_1 = \ldots = v_l = 1$ und hat dann nach (1) den Wert $l!$. Die Behauptung folgt also aus Satz 7.

Insbesondere liest man, wenn $l$ und $\varkappa$ natürliche Zahlen sind, aus Satz 28 und 30 die alte Formel (3)

$$\sum_{r=1}^{l} (-1)^{l-r} \binom{l}{r} r^{\varkappa} = \begin{cases} 0 \text{ für } \varkappa < l, \\ l! \text{ für } \varkappa = l \end{cases} \tag{35}$$

ab. Denn die linke Seite hat nach Satz 28 den Wert $N(\varkappa + 2, l)$, der für $\varkappa < l$ nach Satz 7 verschwindet. Natürlich darf man in (35) die Summation auch bei $r = 0$ beginnen lassen. In diesem Falle darf auch noch der Wert $\varkappa = 0$ zugelassen werden, wenn man (im ersten Glied) $0^0 = 1$ setzt. Denn es ist

$$\sum_{r=0}^{l} (-1)^{l-r} \binom{l}{r} = (1 - 1)^l = 0.$$

(3) S. etwa *Netto, Lehrbuch der Combinatorik*, 2. Aufl. (1927), S. 249.

SATZ 31: *Sind $n \geqq 3$ und $l$ natürliche Zahlen, $n - l - 2 = p \geqq 0$, so ist*

$$N(n, l) = l! \sum_{1 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \dots \leqq s_p \leqq l} s_1 s_2 \dots s_p, \tag{36}$$

*wo im Falle $l = n - 2$ die Summe über das leere Produkt den Wert 1 bedeutet.*

BEWEIS: Ist $l = n - 2$, so ergibt sich die Behauptung aus Satz 30. Nunmehr sei $l < n - 2$, d. h. $p > 0$.

Für jede $(n, l)$-Funktion $f(x)$ mit dem gegebenen Wertevorrat $A = \{a_1, \dots, a_l\}$ gibt es zu jedem $r$ aus der Reihe $1, 2, \dots, l$ ein kleinstes $x$ mit $f(x) = a_r$. Diese $x$ seien nach der Größe geordnet:

$$1 = x_1 < x_2 < \dots < x_l.$$

Es ist nicht notwendig $f(x_\nu) = a_\nu$; setzt man vielmehr $f(x_\nu) = a_r$ mit $r = r_\nu$, so können $r_1, \dots, r_l$ jede Permutation der Zahlen $1, 2, \dots, l$ darstellen. Diese Permutation sei zunächst fest gewählt. Für $\nu = 1, 2, \dots, l$ kennt man damit $f(x_\nu)$, wenn auch im allgemeinen noch nicht $x_\nu$. Unter den Zahlen $1, 2, \dots, n - 2$ gibt es außer den $x_\nu$ noch genau $n - 2 - l = p$ Zahlen. Diese seien ebenfalls der Größe nach geordnet:

$$y_1 < y_2 < \dots < y_p.$$

Für $\nu = 1, 2, \dots, l - 1$ bedeute $I_\nu$ den Bereich der $x$ mit $x_\nu < x < x_{\nu+1}$; $I_l$ bedeute den Bereich der $x$ mit $x > x_l$. Für $\lambda = 1, 2, \dots, p$ liegt $y_\lambda$ jeweils in einem $I_\nu$, etwa mit $\nu = s_\lambda$. Offenbar ist

$$1 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq \dots \leqq s_p \leqq l. \tag{37}$$

Die jetzt möglichen $(n, l)$-Funktionen sind ein-eindeutig den Möglichkeiten zugeordnet, für $\lambda = 1, 2, \dots, p$ die ganzen Zahlen $s_\lambda$ im Einklang mit (37) und die Funktionswerte $f(y_\lambda)$ so festzulegen, daß jedes $f(y_\lambda)$ einer der $s_\lambda$ Werte $f(x_\nu)$ mit $\nu \leqq s_\lambda$ ist. Denn die unter den $s_\lambda$ vertretenen Werte bestimmen durch die Häufigkeit ihres Vorkommens die Länge der Intervalle $I_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, l)$, also die Lage der einzelnen $x_\nu$; die $f(x_\nu)$ kennt man schon, und jede Wahl der $f(y_\lambda)$ gemäß der obigen Vorschrift ergibt dann gerade eine zulässige Funktion.

Offenbar ist noch jedes $s_1$ mit $1 \leqq s_1 \leqq l$ wählbar; für $f(y_1)$ bestehen dann genau $s_1$ Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten, $s_1$ und $f(y_1)$ zu wählen, beträgt also

$$\sum_{s_1=1}^{l} s_1.$$

Kennt man nun $s_1$, so kann $s_2$ alle Werte von $s_1$ bis $l$ haben, und $f(y_2)$ läßt sich unabhängig von der Wahl von $f(y_1)$ jeweils auf $s_2$ Arten wählen. Die Anzahl der Möglichkeiten, $s_1$, $s_2$, $f(y_1)$ und $f(y_2)$ zu wählen, beträgt also

$$\sum_{s_1=1}^{l} s_1 \sum_{s_2=s_1}^{l} s_2 = \sum_{1 \leqq s_1 \leqq s_2 \leqq l} s_1 s_2. \tag{38}$$

So fährt man fort und erhält, daß die Anzahl der Möglichkeiten, $s_1, s_2, \ldots, s_p, f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_p)$ zu wählen, gerade die Summe aus (36), noch ohne den Faktor $l!$, darstellt.

Läßt man die Permutation $r_1, \ldots, r_l$ alle $l!$ Möglichkeiten durchlaufen, so ergeben sich offenbar jedesmal neue Funktionen $f(x)$. Die Anzahl $N(n, l)$ der $(n, l)$-Funktionen vom Wertevorrat $A$ ist also das $l!$-fache der Summe aus (36). Damit ist die Behauptung bewiesen.

Bemerkung: Aus Satz 31 folgt Satz 25 nochmals, da ja $N(n, l)$ nach Satz 7 im Falle $l > n - 2$ verschwindet.

Satz 32: *Sind $l \geqq 1$ und $d \geqq 2$ ganz, so ist $N(l + d, l)$ als Funktion von $l$ das Produkt aus $l!$ und einem nur von $d$ abhängigen Polynom in $l$ mit rationalen Koeffizienten.*

Beweis: Ist $d = 2$, so folgt die Behauptung aus Satz 30. Ist $d > 2$, so ist $N(l + d, l)$ nach Satz 31 gleich der rechten Seite von (36) mit $p = d - 2 > 0$. Die dortige Summe kann man (vgl. (38)) dadurch berechnen, daß man zunächst das Glied $s_p$ über alle Werte des Summationsbuchstabens $s_p$ von $s_{p-1}$ bis $l$ summiert und das Ergebnis mit $s_{p-1}$ multipliziert, das entstehende Produkt dann über alle $s_{p-1}$ von $s_{p-2}$ bis $l$ summiert und das Ergebnis mit $s_{p-2}$ multipliziert usw. und nur die letzte ($p$-te) Summation ausnahmsweise bei $s_1 = 1$ beginnt. Alle Summationen lassen sich mittels der bekannten Formeln für die Summen aufeinanderfolgender Potenzen mit gemeinsamem Exponenten durchführen, wobei sich die Rechnungen durch Rekursion etwas erleichtern lassen. Der bekannte Bau dieser Summenformeln zeigt, daß im Falle $p > 1$ für $\nu = 1, 2, \ldots, p - 1$ bei der $\nu$-ten Summation jeweils Polynome in den beiden Veränderlichen $l$ und $s_{p-\nu}$ mit rationalen Koeffizienten entstehen. Die $p$-te Summation liefert, da sie bei der Konstanten 1 beginnt, ein Polynom in $l$ allein mit rationalen Koeffizienten. Damit ist der Satz bewiesen.

Im Falle $p > 1$ ist nach der ersten Summation der unter den Gliedern vorkommende Höchstgrad (in den beiden Veränderlichen $l$ und $s_{p-1}$ zusammen) 2, nach der Multiplikation mit $s_{p-1}$ also 3. Unterwirft man die Glieder alle der zweiten Summation, so ist im Falle $p > 2$ der unter den entstehenden Einzelgliedern (die sich zum Teil noch zusammenfassen lassen) vorkommende Höchstgrad (in den beiden Veränderlichen $l$ und $s_{p-2}$ zusammen) also 4, nach Multiplikation mit $s_{p-2}$ also 5. So geht es weiter, und nach der $(p - 1)$-ten Summation ist der unter den entstandenen Einzelgliedern auftretende Höchstgrad $2(p - 1)$, nach Multiplikation mit $s_1$ also $2p - 1$. Nach der $p$-ten Summation, die das gewünschte Polynom in $l$ allein liefert, ist der unter den entstandenen Einzelgliedern vorkommende Höchstgrad mithin $2p = 2(d - 2)$.

Statt aus den Formeln für die Potenzsummen läßt sich dieses Polynom daher auch aus jeweils $2p + 1 = 2d - 3$ beliebigen Einzelwerten errechnen, die sich aus Satz 28 ergeben. An den Fall $d = 2$ (Satz 30) schließen sich dann für $d = 3, 4, 5, 6, 7$ als erste Gleichungen dieser Art die folgenden an:

$$(39)\quad \begin{cases} N(l+3, l) = l!\binom{l+1}{2}, \\ N(l+4, l) = \frac{1}{4}\, l!\,(3l+1)\binom{l+2}{3}, \\ N(l+5, l) = l!\binom{l+1}{2}\binom{l+3}{4}, \\ N(l+6, l) = \frac{1}{48}\, l!\,(15l^3 + 30l^2 + 5l - 2)\binom{l+4}{5}, \\ N(l+7, l) = \frac{1}{8}\, l!\,(3l^2 + 7l - 2)\binom{l+1}{2}\binom{l+5}{6}. \end{cases}$$

Zum Überblick und Vergleich kann man die Summe aus Satz 28 bei festem $l$ für die aufeinanderfolgenden $n$ ausrechnen. Wie in

(35) soll jetzt der Exponent von $r$ mit $\varkappa$ bezeichnet werden. Man nehme etwa $l = 5$ und lasse $\varkappa$ von 0 an wachsen. Dann ergibt die alternierende Summe

$$-\binom{5}{0}\cdot 0^{\varkappa} + \binom{5}{1}\cdot 1^{\varkappa} - \binom{5}{2}\cdot 2^{\varkappa} + \binom{5}{3}\cdot 3^{\varkappa} - \binom{5}{4}\cdot 4^{\varkappa} + \binom{5}{5}\cdot 5^{\varkappa}$$

im Einklang mit (35) nicht nur für $\varkappa = 0$ den Wert 0, sondern anschließend noch viermal hintereinander (für $\varkappa = 1, 2, 3, 4$) den Wert $N(\varkappa + 2, 5) = 0$ und erst für $\varkappa = 5$ einen von 0 verschiedenen Wert, nämlich den Wert $120 = 5! = N(7, 5)$. Für $\varkappa = 6, 7, 8, 9, 10$ erhält sie der Reihe nach die Werte $1800 = N(8, 5)$, $16800 = N(9, 5)$, $126000 = N(10, 5)$, $834120 = N(11, 5)$, $5103000 = N(12, 5)$. Alle diese Zahlen lassen sich auch aus (39) berechnen.