SOBRE LAS ALGEBRAS LOCALMENTE CONVEXAS

por

JESÚS MUÑOZ y JOAQUÍN M.ª ORTEGA

INTRODUCCIÓN

Este trabajo es en gran parte una aplicación de los métodos espectrales de GELFAND al estudio de Álgebras localmente convexas conmutativas con unidad sobre el cuerpo complejo. Las primeras memorias en este sentido son las de E. MICHAEL y R. ARENS en 1952.

El problema tratado por ARENS es más bien marginal a nuestros propósitos: él da una caracterización del Álgebra de todas las funciones continuas en un espacio localmente compacto paracompacto.

Por el contrario, MICHAEL busca generalizar en lo posible los resultados fundamentales de la teoría de Álgebras de BANACH, conmutativas o no. De él tomamos el teorema de representación espectral y los teoremas 15 y 16 del capítulo III.

En el capítulo I y los dos primeros apartados del capítulo II nos ha guiado el propósito de extender los métodos y resultados generales de la teoría de Álgebras de BANACH. En el apartado tercero del capítulo II abordamos el estudio de la compactización del espectro del Álgebra que está asociada de modo natural a dicha Álgebra. El capítulo III trata fundamentalmente un problema no planteable en el caso BANACH.

Hacemos una breve glosa por capítulos. El capítulo I está dedicado esencialmente al teorema de representación espectral; la presentación difiere (aunque no esencialmente) de la de MICHAEL. Hemos creído servir al lector haciendo una exposición completa sin desviarnos del caso conmutativo, único que tratamos.

El capítulo II está dedicado a estudiar la conexión entre propiedades del álgebra y propiedades topológicas del espectro. El apartado I son generalidades sobre la comparación de las topologías de Zariski y de Gelfand (topología débil) en el espectro de ideales maximales cerrados (espectro de puntos). En el apartado 2 se trata esencialmente de la normalidad del espectro y cuestiones con ella relacionadas. El teorema fundamental de este apartado expresa que en un álgebra cuyos cocientes por ideales cerrados sean álgebras completas (por ejemplo, en un álgebra de Fréchet) la suma de dos ideales cerrados no puede ser densa sin ser todo el álgebra. Dicho de otro modo: si los cerrados del espectro asociados a dos ideales cerrados I, J, son disjuntos, existen $a \in I$, $b \in J$, tales que $a + b = 1$. A partir de aquí no hay obstrucciones a la generalización de lo esencial de la «teoría local» de Gelfand para álgebras de Banach.

El apartado 3 del capítulo II se dedica al estudio de la compactización del espectro asociada a cierto tipo de álgebras.

El teorema fundamental es el 13 : si A es una *-álgebra simétrica, completa y semisimple, B la subálgebra de A consistente en los elementos acotados (de radio espectral finito) y B es regular, entonces A es regular y su espectro de ideales maximales es homeomorfo al espectro de B, que resulta ser así una compactización del espectro de A canónicamente asociada a A. De aquí se deduce fácilmente el teorema 14: en las mismas condiciones que antes, la condición necesaria y suficiente para que el espectro de A sea localmente compacto es que entre todos los ideales densos de A haya uno mínimo Este ideal resulta ser el de las funciones a soporte compacto y es el encargado de separar en el espectro máximo de A los «buenos puntos» y los «puntos imaginarios» añadidos en la compactización, «enviando estos últimos al infinito».

En el capítulo III tratamos esencialmente el problema de la localización de un álgebra de funciones en un abierto del espectro, problema no planteable en términos de álgebras de Banach, pues al localizar, la condición de ser Banach desaparece. El proceso de la localización en abiertos sólo parece viable cuando el álgebra tiene la propiedad de que toda función en el espectro que localmente coincide con funciones del álgebra pertenece al álgebra. En otros términos: si las secciones globales del haz de gérmenes de elementos de A son justamente los elementos de A y no hay otros. Damos en el teorema 17 una condición suficiente para que esto ocurra. Luego pasamos al teorema 18, que es la razón de ser del capítulo. En él suponemos que el álgebra de funciones A es de Fréchet, simétrica, regular y satisface la condición de las secciones que antes decíamos.

El abierto U se supone que es reunión numerable de abiertos cuyos complementarios contienen en su interior al complementario de U (condición siempre realizada si A es separable). Entonces la condición necesaria y suficiente para que una función en U coincida localmente con funciones de A es que sea cociente de dos funciones de A. Es decir, el anillo de secciones sobre U es la localización algebraica de A en el abierto U.

Por ejemplo, toda función infinitamente diferenciable (o n veces diferenciable, o continua) en el segmento abierto es cociente de dos funciones del mismo tipo en el segmento cerrado o en la circunferencia.

Es interesante observar que el álgebra localizada en U es otra vez del mismo tipo que A (de Fréchet, simétrica, etc.).

Algunos resultados que son simple transcripción de los análogos para álgebras de Banach están dados sin demostración. Es claro que los temas abordados no están tratados en forma exhaustiva. Hemos procurado no dar resultados laterales al desarrollo general.

Agradecemos al profesor J. Sancho Guimerá sus valiosas orientaciones y su constante estímulo, sin los cuales este trabajo no se habría realizado.

I. TEOREMA DE REPRESENTACION ESPECTRAL

Todas las álgebras que consideremos serán sobre el cuerpo complejo, conmutativas y con unidad. Al decir «álgebra» sobreentenderemos estas condiciones.

DEFINICIÓN. Una álgebra A se llamará álgebra localmente convexa (brevemente a.l.c.) cuando esté dotada de una topología localmente convexa separada definida por una familia fundamental de seminormas $\{p\} = \{p_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ tal que para toda $p_\lambda \in \{p\}$ y todo par de elementos $a, b \in A$ sea $p_\lambda (a \cdot b) \leq p_\lambda (a) \cdot p_\lambda (b)$ (1)

Si $p_\lambda p_\mu$, son seminormas satisfaciendo la condición (1), también sup $\{p_\lambda, p_\mu\}$ satisface esta condición. Por consiguiente, podemos suponer que la familia de seminormas $\{p\}$ es filtrante creciente. Ordenamos la familia de índices Λ poniendo $\lambda \geq \mu$ cada vez que p_λ sea más fina que p_μ.

Sea N_λ el anulador de la seminorma p_λ; desde luego N_λ es un ideal cerrado en A; sea $A_\lambda = A/_{N_\lambda}$; llamemos π_λ a la proyección canónica $A \to A_\lambda$ y dotemos a A_λ de la norma $|\pi_\lambda a| = p_\lambda (a)$.

Si $\lambda \geq \mu$ existe un epimorfismo continuo canónico $\pi^\lambda_\mu : A_\lambda \to A_\mu$ y se tiene $\pi^\lambda_\mu \circ \pi_\lambda = \pi_\mu$, $\pi^\mu_\nu \circ \pi^\lambda_\mu = \pi^\lambda_\nu$ cada vez que $\lambda \geq \mu \geq \nu$. En estas condiciones podemos considerar el álgebra $\varprojlim_{\pi^\lambda_\mu} A_\lambda$ dotada de su topología límite proyectivo natural y definir un morfismo $\pi : A \to \varprojlim_{\pi^\lambda_\mu} A_\lambda$ que asigna a cada $a \in A$ el punto cuya coordenada λ es $\pi_\lambda a$; π es un morfismo inyectivo (por ser A separada) y $A \approx \pi A$, isomorfismo algebraico y topológico.

Si denotamos con $\bar{A}_\lambda$ la complección de A_λ, el morfismo $\pi^\lambda_\mu : A_\lambda \to A_\mu$ se extiende de modo único a un morfismo continuo $\pi^\lambda_\mu : \bar{A}_\lambda \to \bar{A}_\mu$ (que en general ya no será epimorfismo). Puede asimismo formarse $\bar{A} = \varprojlim_{\pi^\lambda_\mu} \bar{A}_\lambda$; $\varprojlim_{\pi^\lambda_\mu} A_\lambda$ es denso en $\bar{A} = \varprojlim_{\pi^\lambda_\mu} \bar{A}_\lambda$, que es su complección; a su vez, A es denso en $\varprojlim_{\pi^\lambda_\mu} A_\lambda$, luego A es denso en $\bar{A}$. En particular, si A es completa, $A = \bar{A} = \varprojlim_{\pi^\lambda_\mu} A_\lambda$. Hemos demostrado:

TEOREMA 1. Un a.l.c. completa es límite proyectivo estricto de álgebras normadas y también límite proyectivo (en general no estricto) de álgebras de BANACH.

LEMA. En un álgebra normada A todo ideal que no sea denso por doquier está contenido en un ideal maximal cerrado. Todo ideal maximal cerrado es un hiperplano.

DEMOSTRACIÓN. Si A es de BANACH, sabemos que el lema es cierto. Supongamos que A no es de BANACH, y sea $\bar{A}$ su completada. Sea I un ideal no denso en A; es fácil ver que entonces la unidad de A no es adherente a I, luego la clausura $\bar{I}$ de I en $\bar{A}$ no contiene la unidad; además, $\bar{I}$ es un ideal: Si $a \in A$, a transforma por multiplicación I en I, luego $\bar{I}$ en $\bar{I}$; por tanto, para cada $a \in A$ y cada $b \in \bar{I}$ $a \cdot b \in \bar{I}$ entonces b transforma por multiplicación A en $\bar{I}$, luego $\bar{A}$ en $\bar{I}$. Esto prueba que $\bar{I}$ es un ideal. Por tanto está contenido en un ideal maximal $\bar{M}$ de $\bar{A}$, que en virtud del teorema de GELFAND-MAZUR será un hiperplano; entonces $M = \bar{M} \cap A$ es un ideal cerrado en A y es un hiperplano de A (luego es un ideal maximal). Esto demuestra las dos partes del lema.

TEOREMA 2. En un a.l.c. un ideal que no es denso por doquier está contenido en un ideal maximal cerrado. Todo ideal maximal cerrado es un hiperplano.

DEMOSTRACIÓN. Sea J un ideal no denso en A. La imagen J_λ de J en cada A_λ es un ideal de A_λ. Como J no es denso en A, para algún índice λ, J_λ no será denso en A_λ (por las propiedades de la topología límite proyectivo en que A está sumergida); existirá entonces un ideal maximal cerrado M_λ en A_λ conteniendo a J_λ. El morfismo continuo de A sobre el cuerpo complejo C dado por la aplicación $A_\lambda \to A_\lambda/M_\lambda \approx C$ define entonces, por composición con π_λ, un morfismo continuo de A sobre C cuyo núcleo es un ideal maximal M cerrado en A y conteniendo a J. Esto prueba simultáneamente las dos partes del teorema.

TEOREMA 3. En un a.l.c. completa no existen ideales principales densos.

DEMOSTRACIÓN. Sea $a \in A$ tal que $a \cdot A$ sea denso en A; entonces $\pi_\lambda (a \cdot A) = a_\lambda \cdot A_\lambda$ es denso en A_λ (para cada λ) y por tanto $a_\lambda \cdot \bar{A}_\lambda$ es denso en $\bar{A}_\lambda$; pero como $\bar{A}_\lambda$ es un álgebra de BANACH, esto sólo es posible si $a_\lambda \cdot \bar{A}_\lambda = \bar{A}_\lambda$; es decir, existirá $b_\lambda \in \bar{A}_\lambda$ tal que $a_\lambda \cdot b_\lambda = 1_\lambda$;

este b_λ es necesariamente único, luego $\pi_\mu^\lambda b_\lambda = b_\mu$ y por tanto el punto $b = (b_\lambda)$ del álgebra producto $\pi_{\lambda \in \Lambda} \bar{A}_\lambda$ pertenece a $\varprojlim_{\pi_\mu^\lambda} \bar{A}_\lambda = A$. Entonces $a \cdot b = 1$, $a \cdot A = A$.

Corolario 1. La condición necesaria y suficiente para que un elemento a $\in A$ sea inversible, es que no esté contenido en ningún ideal maximal cerrado.

Demostración. Inmediata a partir de los teoremas 2 y 3.

Corolario 2. El radical de Jacobson de A coincide con la intersección de los ideales maximales cerrados de A.

Demostración. Sea $a \in A$ perteneciente a todos los ideales maximales cerrados de A y sea M_0 un ideal maximal cualquiera en A. Si $a \notin M_0$, por ser M_0 maximal existirían $m \in M_0$, $b \in A$, tales que $ab + m = 1$; como m no es inversible, existirá un ideal maximal cerrado M conteniendo a m; como por hipótesis $a \in M$, sería $1 \in M$, contradicción.

Traduzcamos los enunciados anteriores a lenguaje geométrico. Llamemos puntos a los ideales maximales cerrados de A y denotémosles con x, y, etc. Al conjunto de todos los puntos de A le llamaremos espectro y lo denotaremos $E(A)$ o sencillamente E si no hay peligro de confusión. El teorema 2 se traduce diciendo que cada punto $x \in E$ define un morfismo continuo de A sobre el cuerpo complejo C. Al número que corresponda al elemento $a \in A$ en este morfismo le denotaremos $a(x)$. Con ello A se representa como álgebra de funciones en su espectro E; el núcleo de esta representación es el radical de Jacobson de A (corolario 2 del teorema 3); un elemento $a \in A$ es inversible en A sí y sólo si la función $a(x)$ es inversible, es decir, si no tiene ceros (corolario 1 del teorema 3).

Como $E(A)$ está sumergido en el dual topológico A' de A, podemos dotar a $E(A)$ de la estructura uniforme débil inducida por la estructura uniforme débil de A'. La topología que así resulta en $E(A)$ se llamará topología de Gelfand de $E(A)$. Por la propia definición de topología débil, las funciones $a(x)$, $a \in A$ son continuas en $E(A)$ para la topología de Gelfand. Si denotamos con $C(E)$ el álgebra de todas las funciones continuas en E, lo que hemos obtenido es una representación $A \to C(E)$ que llamaremos representación espectral. Cuando la representación espectral es fiel (es decir, cuando el radical de A es cero), A se llama semisimple.

Con las notaciones de antes, observemos que siendo $\bar{A}_\lambda$ un álgebra de BANACH, su espectro E_λ es un espacio compacto; hay una inyección canónica $E_\lambda \to E$ que permite considerar $E(A)$ como reunión de los compactos E_λ. Tenemos $\max_{x \in E_\lambda} |a(x)| \leq |\pi_\lambda a| = p_\lambda(a)$ por lo que si dotamos a $C(E)$ de la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos E_λ, la representación espectral $A \to C(E)$ es continua. Si A es un espacio vectorial tonelado, toda parte débilmente compacta de A' (en particular de E) es equicontinua y entonces la representación espectral $A \to C(E)$ es continua si se dota a $C(E)$ de la topología de la convergencia uniforme sobre las partes compactas de E.

TEOREMA 4. Para toda a.l.c. completa A existe un espacio completamente regular E (el espectro de A) y una representación $A \to C(E)$ (representación espectral) cuyo núcleo es el radical de JACOBSON de A. La condición necesaria suficiente para que $a \in A$ sea inversible es que la función imagen de a no tenga ceros en E. Si A es tonelada y $C(E)$ está dotada de la topología compacta-abierta, la representación espectral es continua.

II. PROPIEDADES TOPOLOGICAS DEL ESPECTRO

1. ÁLGEBRAS REGULARES

Sea A un anillo con unidad, $\mathcal{P}$ el conjunto de sus ideales primos. Para cada ideal I de A pondremos $h(I) = \{\mathfrak{p} \in \mathcal{P} : I \subset \mathfrak{p}\}$

Se tiene

$$h(I \cap J) = h(I) \cup h(J)$$

$$h(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} h(I_\lambda)$$

para cualquier familia de índices Λ.

Para cada parte $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}$ escribiremos $k(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathcal{A}} \mathfrak{p}$; $k(\mathcal{A})$ es un ideal; escribamos $\bar{\mathcal{A}} = hk(\mathcal{A})$.

Se verifica fácilmente que la aplicación $\mathcal{A} \to \bar{\mathcal{A}}$ es una clausura de KURATOWSKI en $\mathcal{P}$. La topología así definida se llamará topología de ZARISKI en $\mathcal{P}$.

Si en vez del conjunto $\mathcal{P}$ consideramos un subconjunto Q de $\mathcal{P}$, puede definirse en Q una topología de ZARISKI por el mismo procedimiento y se verifica fácilmente que esta topología coincide con la inducida por $\mathcal{P}$ en Q.

Consideraremos en particular los casos en que Q sea la familia $\mathcal{M}$ de todos los ideales maximales de A o E, espectro de A en el caso de un a.l.c.

En todo anillo con unidad $\mathcal{P}$ y $\mathcal{M}$ son compactos para la topología de ZARISKI (aunque en general no son HAUSDORFF).

Si $u : B \to A$ es un morfismo de anillos (transformando la unidad en la unidad), podemos asociar a cada ideal primo $\mathfrak{p}_A$ de A su antiimagen en B, que también es un ideal primo; tendremos entonces una aplicación $u^* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$, que es continua para las topologías de ZARISKI.

Si A es un a.l.c., su espectro de puntos puede dotarse de dos topologías, la de ZARISKI E_Z y la de GELFAND E_G; E_G es más fina que E_Z, pues todo cerrado de E es de la forma $h(I)$, conjunto de los puntos $x \in E$ en que se anulan todas las funciones de I (que por definición de E_G son continuas en E_G).

DEFINICIÓN. Un a.l.c. A se llama regular cuando $E_G(A)$ y $E_Z(A)$ son homeomorfos.

Esto significa que todo cerrado de E_G es intersección de ceros de funciones de A.

TEOREMA 5. La condición necesaria y suficiente para que A sea regular es que para cada punto $x_0 \in E_G$ y cada cerrado $F \subset E_G$ no conteniendo a x_0 exista $a \in A$ que tome valor 1 en x_0 y 0 en F.

DEMOSTRACIÓN. La condición anterior equivale a la existencia de $a \notin x_0$, $a \in k(F)$ y esto equivale a que $x_0 \not\supset k(F)$, o sea, que $x_0 \notin hk(F)$ y por tanto a que $hk(F) = F$, luego a que F sea cerrado en E_Z.

NOTAS 1) Si A es un álgebra de BANACH, $E = \mathcal{M}$ y la regularidad de A es equivalente a la condición de que $\mathcal{M}$ sea HAUSDORFF.

2) El teorema 5 permite computar en los casos habituales de álgebras de funciones la regularidad; para cada punto $x_0 \in E_G$ y cada vecindad $\mathcal{U}$ de x_0 debe existir una función de A que valga 1 en x_0 y 0 fuera de $\mathcal{U}$. Ahora bien, una vecindad de x_0 en E_G está definida por una familia finita de condiciones $|a_i(x) - a_i(x_0)| < \varepsilon$, o equivalentemente, por condiciones de la forma $|a_i(x)| < 1$. Si existe nua función $f: C \to C$ tal que $f(o) = 1$ y que $f(z) = 0$ para $|z| \geq 1$ y tal que para cada $a \in A$, la función compuesta $f \circ a$ pertenezca a A, A es regular.

TEOREMA 6. Si A es regular, I un ideal cerrado en A, $A/_I$ es regular.

DEMOSTRACIÓN. Basta observar que $E(A/_I) = h(I)$ (en $E(A)$) y aplicar el teorema 5.

2. LEMA DE URYSOHN PARA ÁLGEBRAS REGULARES

Se presenta el siguiente problema: dados dos cerrados disjuntos del espectro de un álgebra regular, ¿existe una función del álgebra que tome valores 0 en uno y 1 en el otro? Sean F y G estos cerrados y I, J, dos ideales tales que $F = h(I)$, $G = h(J)$, entonces $h(I + J) = \phi$, lo cual significa que ningún ideal maximal cerrado contiene a $I + J$ es decir: $I + J$ es denso; si A no tiene ideales densos será $I + J = A$ y existirán $a \in I$, $b \in J$ tales que $a + b = 1$; entonces a toma valor 0 en F y 1 en G.

Como se ve, la obstrucción al enunciado aparece en la existencia de ideales densos, que son inevitables en la teoría general, como muestra el siguiente teorema:

TEOREMA 7. Sea A un a.l.c. completa, tonelada y regular. Las tres condiciones siguientes son equivalentes:

1) A no tiene ideales densos.

2) $E(A)$ es compacto.

3) Existe un entorno de la unidad en A formado por elementos inversibles.

DEMOSTRACIÓN. 1) $\Rightarrow$ 2): puesto que todo ideal maximal debe ser cerrado $E(A) = \mathcal{M}(A)$; como la coincidencia es topológica y $\mathcal{M}$ es compacto, resulta 2); 2) $\Rightarrow$ 3). Pongamos $p(a) = \max\limits_{x \in E} |a(x)|$; como A es tonelada, p es una seminorma continua en A; es $p(1) = 1$ y si $p(1 - a) < 1$, a no tiene ceros en E, luego siendo A completa, a es inversible.

3) $\Rightarrow$ 1) Trivial.

TEOREMA 8. Sea A un a.l.c. satisfaciendo las condiciones del teorema 7. Si I y J son dos ideales tales que $h(I) \cap h(J) = \phi$, entonces $I + J = A$.

DEMOSTRACIÓN. Inmediata a partir de la observación inicial de este apartado.

COROLARIO 1. Si I es un ideal de A y F un cerrado de $E(A)$ tal que $h(I) \cap F = \phi$, entonces existe $a \in I$ que toma valor 1 sobre F.

COROLARIO 2. Si F y G son cerrados disjuntos en $E(A)$, existe un $a \in A$ que toma valor 1 en F y o en G.

COROLARIO 3. (Partición de la unidad). Si $F_1, \ldots, F_n$ son cerrados en $E(A)$ tales que $F_1 \cap \ldots \cap F_n = \phi$, existen elementos $a_1, \ldots, a_n$, de A tales que a_i es nulo en F_i y $a_1 + \ldots + a_n = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Sean ideales I_j; tales que $F_j = h(I_j)$ entonces $h(I_1 + \ldots, + I_n) = \phi$, luego $I_1 + \ldots + I_n = A$.

COROLARIO 4. Si A verifica las condiciones del teorema 7 y es semisimple, toda función f en $E(A)$ que localmente coincida con elementos de A, pertenece a A.

DEMOSTRACIÓN. Se deduce del corolario 3.

COLORARIO 5. En las condiciones del corolario 4, para cada cerrado F en $E(A)$ existe un mínimo ideal N_F entre los que verifican $h(I) = F$; N_F consiste en todas las $a \in A$ que se anulan en un entorno de F.

DEMOSTRACIÓN. Análoga al caso normado.

Como se ve, las demostraciones de las propiedades anteriores se basan más que en la no existencia de ideales densos en el hecho de que la suma de varios ideales no densos no puede ser densa sin coincidir con A.

LEMA. Sea A un a.l.c. completa I, J, dos ideales cerrados en A tales que $I \cap J = \{0\}$. Entonces o bien $I + J$ no es denso o bien $I + J = A$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $I + J$ es denso en A; sea $\widetilde{A} = A/_J \pi : A \to \widetilde{A}$ la proyección canónica, $\widetilde{I} = \pi I$. Si demostramos que $\widetilde{I}$ es completo, como $\widetilde{A}$ es separado, $\widetilde{I}$ debe ser cerrado en $\widetilde{A}$ luego $\pi^{-1}\widetilde{I} = I + J$ será cerrado en A, luego igual a A.

$\widetilde{I}$ es algebraicamente isomorfo a I y su topología es menos fina que la de I. Basta que demostremos que es más fina.

Si p es una seminorma en A, p define en $\widetilde{A}$ la seminorma $\widetilde{p}(\widetilde{a}) = \inf_{a \in \widetilde{a}} p(a) = \inf_{b \in J} p(a + b) \leq p(a)$. Bastará demostrar que existe una constante C (dependiendo de p) tal que para todo $a \in I$ sea

$p(a) \leq C\,\widetilde{p}(\widetilde{a})$. Si C no existiera, para cada número natural n podríamos encontrar $a_n \in I$ tal que $\widetilde{p}(\widetilde{a_n}) < \frac{1}{n} \cdot p(a_n)$, es decir, podríamos encontrar $a_n \in I$, $b_n \in J$ tales que $p(a_n) = 1$, $p(a_n + b_n) < \frac{1}{n}$.

Para cada $a \in I$ tendremos

$$p(a \cdot a_n) = p(a \cdot (a_n + b_n)) \leq p(a) \cdot p(a_n + b_n) < \frac{p(a)}{n}$$

Como $I + J$ es denso en A, existen $a \in J$, $b \in J$ tales que $p(1 - (a + b)) < \frac{1}{2}$; entonces

$$1 = p(a_n) = p(a_n - a_n a + a_n a) = p(a_n(1 - (a + b)) + a_n a) \leq$$
$$\leq p(a_n) \cdot p(1 - (a + b)) + p(a_n a) < \frac{1}{2} + \frac{p(a)}{n}$$

y pasando al límite con $n \to \infty$ llegamos a contradicción.

Teorema 9. Si A es un a.l.c. completa cuyos cocientes por ideales cerrados son a.l.c. completas (por ejemplo, si A es de Fréchet), entonces dados dos ideales cerrados I, J, tales que $I + J$ es denso en A, es $J + I = A$.

Demostración. Sea $\widetilde{A} = A/_{I \cap J}$, $\pi : A \to \widetilde{A}$, $\widetilde{I} = \pi I$, $\widetilde{J} = \pi J$: $\widetilde{A}$ es completa, $\widetilde{I}$ y $\widetilde{J}$ son cerrados en $\widetilde{A}$ (inmediato), además $\widetilde{I} \cap \widetilde{J} = \{0\}$ como $I + J$ es denso en A, $\widetilde{I} + \widetilde{J}$ lo es en $\widetilde{A}$ y por el lema anterior es $\widetilde{I} + \widetilde{J} = \widetilde{A}$, luego $I + J = A$.

Nótese que es esencial en el teorema anterior la estructura multiplicativa de A; incluso en espacios de Hilbert la suma de dos variedades lineales cerradas puede ser densa sin coincidir con el espacio total.

En lo que sigue de este capítulo «álgebra de cocientes completos» significará álgebra localmente convexa cuyos cocientes por ideales cerrados son álgebras completas.

Teorema 10. Sea A un álgebra de cocientes completos I, J, dos ideales cerrados tales que $h(I) \cap h(J) = \phi$. Entonces $I + J = A$.

Demostración. Inmediata a partir del teorema 9.

Corolario 1. Sea A de cocientes completos regular. Sea I un ideal cerrado en A, F un cerrado en $E(A)$ tal que $h(I) \cap F = \phi$. Entonces existe $a \in I$ que toma valor 1 sobre F.

COROLARIO 2. En las condiciones del corolario 1, si F y G son cerrados tales que $F \cap G = \phi$, existe $a \in A$ que toma valor 1 en F y o en G.

COROLARIO 3. (Particiones finitas de la unidad). Sea A un álgebra en las condiciones del corolario 1. Si $F_1, ..., F_n$ son cerrados en $E(A)$ tales que $F_1 \cap ... \cap F_n = \phi$, existen elementos $a_1, ..., a_n$ tales que a_i es nulo en F_i y que $a_1 + ... + a_n = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Obsérvese que no vale la demostración del corolario 3 del teorema 8, en la que se utilizaba la no existencia de ideales densos. En el presente caso no podemos asegurar a priori que la suma de n ideales cerrados sea no densa.

Hacemos la demostración por recurrencia sobre n. Para $n = 2$ el teorema se reduce al corolario 2.

Sean, pues, cerrados $F_1, ..., F_{n-1}\ F_n$ con $F_1 \cap ... \cap F_n = \phi$.

Como E es normal (corolario 2) y el cerrado $F_1 \cap ... \cap F_{n-1}$, es disjunto del cerrado F_n, existe un abierto U tal que $F_n \subset U$ y que $(F_1 \cap ... \cap F_{n-1}) \cap \overline{U} = \phi$. El álgebra $A/_{k(\overline{U})}$ es de cocientes completos y regular (teorema 6) y su espectro es $\overline{U}$; $F_1 \cap \overline{U} ..., F_{n-1} \cap \overline{U}$ son cerrados en $E(A/_{k(\overline{U})})$ con intersección vacía. Por la hipótesis de inducción existen elementos $\tilde{a}_1, ..., \tilde{a}_{n-1} \in A/_{k(\overline{U})}$ tales que $\tilde{a}_i$, se anula en $F_i \cap \overline{U}$ y que $\tilde{a}_1 + ..., + \tilde{a}_{n-1} = \tilde{1}$

Elijamos representantes $a_i \in \tilde{a}_i$ y tendremos $n - 1$ elementos de A que se anulan respectivamente en $F_i \cap \overline{U}$ y cuya suma toma valor 1 en todo punto de $\overline{U}$.

Ahora bien, $F = CU$ y F_n son cerrados disjuntos en $E(A)$, luego existen $b \in k(CU) = k(F)$ y $b_n \in k(F_n)$ tales que $b + b_n = 1$.

Pongamos $c_i = a_i \cdot b\ (i = 1, ..., n - 1)$, $c_n = 1 - c_1 - ... - c_{n-1}$.

Tendremos $c_i(x) = a_i(x) \cdot b(x) = 0$, en $F_i\ (i = 1, ..., n - 1)$ y,

si
$$x \in F_n, \ \sum_{i=1}^{n-1} c_i(x) = b(x) \cdot \sum_{i=1}^{n-1} a_i(x) = b(x) = 1$$

(pues $b_n(x) = 0$ en F_n), luego $c_n(x) = 0$ en F_n.

Esto acaba la demostración.

TEOREMA 11. Sea A un álgebra de cocientes completos regular y semisimple, F un cerrado en $E(A)$. Existe un ideal N_F contenido en todos los ideales cerrados I tales que $h(I) = F$; N_F consta de todas las funciones $a \in A$ que se anulan en algún entorno de F. N_F se llamará ideal de nulidades de F.

DEMOSTRACIÓN. Análoga a la del caso normado teniendo en cuenta el corolario 1 del teorema 10.

TEOREMA 12. (generalización del teorema 9 para n ideales cerrados). En un álgebra de cocientes completos regular semisimple si la suma de n ideales cerrados es densa, coincide con A.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $J_1 + \dots + J_n$ es denso. Los cerrados $h(J_1) \dots h(J_n)$ son de intersección vacía.

Por la normalidad de E estos cerrados $h(J_i)$ pueden sumergirse en cerrados $F_i = \overline{U}_i$ donde U_i es un abierto conteniendo a $h(J_i)$ y tales que todavía $F_1 \cap \dots \cap F_n = \phi$.

Aplicando el corolario 3 del teorema 10, existen funciones

$$a_1 \in k(F_1), \dots, a_n \in k(F_n) \text{ tales que } a_1 + \dots + a_n = 1$$

Pero a_i se anula en un entorno de $h(J_i)$, luego pertenece al ideal de nulidades de $h(J_i)$ y, por tanto a J_i (teorema 11).

Los corolarios 1, 2, 3, 5 del teorema 8 han sido generalizados en lo esencial. El corolario 4 se apoyaba esencialmente en la compacidad del espectro. Su generalización para álgebras de FRÉCHET será dada en el capítulo III.

3. COMPACTIZACIÓN DEL ESPECTRO. CARACTERIZACIÓN DE LOS ESPECTROS LOCALMENTE COMPACTOS

Una $*$-álgebra es un álgebra sobre el cuerpo complejo dotada de una involución $a \to a^*$ tal que $(a + b)^* = a^* + b^*$, $(\lambda \cdot a)^* = \bar{\lambda} \cdot a^*$, $(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$.

DEFINICIÓN. Una $*$-álgebra localmente convexa completa se llama simétrica cuando para todo $a \in A$, $1 + a \cdot a^*$ es inversible.

Esta condición equivale a los dos siguientes

1) Para cada punto $x \in E(A)$ y cada $a \in A$ es $a^*(x) = \overline{a(x)}$.

2) Todo punto $x \in E(A)$ es invariante por involución.

En todo este apartado A será un álgebra simétrica, B la subálgebra de A consistente en los $a \in A$ acotados en $E(A)$, es decir, de radio espectral finito. Un elemento a de B es inversible en B cuando lo es en A y $|a(x)|$ está acotado inferiormente en $E(A)$ por un $\varepsilon > 0$. En particular todo elemento de la forma $1 + a \cdot a^*$, $a \in B$ es inversible en B.

Dotamos a B de la topología reunión de la inducida por A y la norma (o seminorma si A no es semisimple) $|a| = \sup\limits_{x \in E(A)} |a(x)|$,

Con esta topología B es completa: si F es un filtro de CAUCHY en B lo es en A, luego converge hacia un cierto elemento $a \in A$ para la topología de A; F como filtro de funciones acotadas en $E(A)$ converge uniformemente hacia una función continua y acotada f en $E(A)$. Claramente para cada punto x, $f(x) = a(x)$, luego $a \in B$ y trivialmente $F \to a$ para la topología de B.

B será, pues, una $*$-álgebra simétrica.

En B hay un entorno de la unidad formado por elementos inversibles: los a tales que $|1 - a| < 1$; pues si $|1 - a| = 1 - \alpha$, tenemos para todo $x \in E(A)$, $|1 - a(x)| \leq 1 - \alpha$, $1 - |a(x)| \leq 1 - \alpha$, luego $|a(x)| \geq \alpha$, por lo que a es inversible en B. Se deduce que en B no hay ideales densos. Además, toda funcional lineal multiplicativa en B está mayorada por la norma de la convergencia uniforme en $E(A)$: si no fuera así, para una cierta funcional multiplicativa ω existiría $a \in B$ tal que $|a| = 1$, $\omega(a) = 1 + \alpha$ con $\alpha > 0$; entonces para todo $x \in E(A)$ sería $|1 + \alpha - a(x)| \geq 1 + \alpha - |a(x)| \geq \alpha$ y por tanto $1 + \alpha - a$ sería inversible en B, cosa imposible siendo $1 + \alpha - a \in ker(\omega)$.

Por tanto $E(B)$ está contenido en la bola unidad en B' de la seminorma $|\ \ |$, y como esta bola unidad es débilmente compacta y $E(B)$ es débilmente cerrado en B', resulta que $E(B)$ es compacto para la topología de GELFAND. Entonces la condición necesaria y suficiente para que B sea regular es que $E(B) = \mathcal{M}(B)$ sea separado para la topología de ZARISKI.

LEMA 1. $E(B)$ es una compactización de $E(A)$ dotados ambos espacios de sus topologías de GELFAND respectivas.

DEMOSTRACIÓN. Basta ver que $E(A)$ es un subespacio topológico denso en $E(B)$.

Que $E(A)$ está sumergido en $E(B)$ es claro, pues toda funcional multiplicativa en A lo es en B y dos funcionales distintas en A son funcionales distintas en B, claramente. Hay que ver ahora que la topología de $E(A)$ está inducida por $E(B)$: si $x \in E(A)$, un entorno de x en $E(A)$ está definido por condiciones $|a_1(x) - a_1(y)| < 1$, ..., $|a_n(x) - a_n(y)| < 1$; sustituyendo a_i por $b_i = a_i - a_i(x)$ las condiciones anteriores son $|b_i(y)| < 1$ que son equivalentes a las $b_i b_i^*(y) < 1$

y éstas a su vez son equivalentes a las $\frac{b_i b_i^*}{1 + b_i b_i^*}(y) < \frac{1}{2}$ siendo los elementos $c_i = \frac{b_i b_i^*}{1 + b_i b_i^*}$ de B.

Veamos, finalmente, que $E(A)$ es denso en $E(B)$: sea $x \in E(B)$; una vecindad de x puede definirse por condiciones $c_i c_i^*(z) < 1$; llamando $c = \Sigma c_i c_i^*$, la vecindad de x definida por $c(z) < 1$ está contenida en la anterior. Como $c(x) = 0$, c no es inversible en B, luego $\inf\limits_{y \in E(A)} c(y) = 0$, y, por tanto: algún $y \in E(A)$ verifica $c(y) < 1$. Esto acaba la demostración.

LEMA 2. Supongamos que B es regular y semisimple. Entonces existe una retracción continua de $\mathcal{P}(B)$ en $\mathcal{M}(B)$ (ambos espacios con sus topologías de ZARISKI).

DEMOSTRACIÓN. La condición de regularidad de B significa que $\mathcal{M}(B) = E(B)$ es HAUSDORFF para la topología de ZARISKI. Esto equivale a decir que dados dos puntos x_1, x_2 en $E(B)$ existen sendos ideales J_1, J_2, tales que $x_1 \notin h(J_1)$, $x_2 \notin h(J_2)$ y que $J_1 \cap J_2 = \{0\}$. A su vez equivale a la existencia de elementos a_1, a_2, de B tales que $a_1 \notin x_1$, $a_2 \notin x_2$, $a_1 \cdot a_2 = 0$. De esta condición se deduce que todo ideal primo de B está contenido en un solo maximal: si $\mathfrak{p}$ (ideal primo) estuviera contenido en dos puntos distintos x_1, x_2, tomando a_1, a_2 como antes y siendo $a_1 \cdot a_2 = 0$ debería ser $a_1 \in \mathfrak{p}$ ó $a_2 \in \mathfrak{p}$, cosa imposible por ser $\mathfrak{p} \subset x_1$, $\mathfrak{p} \subset x_2$ y $a_1 \notin x_1$, $a_2 \notin x_2$.

Podemos definir, pues una retracción $p\colon \mathcal{P}(B) \to \mathcal{M}(B)$ asociando a cada ideal primo $\mathfrak{p}$ el ideal máximo $p(\mathfrak{p})$ que lo contiene. Veamos que p es continua.

Como B es regular, semisimple y no tiene ideales densos, para cada cerrado $F \subset E(B)$ su ideal de nulidades N_F está contenido en todos los ideales I (cerrados o no) tales que $h(I) = F$. La condición $F_1 \subset F_2$ equivale a $N_{F_1} \supset N_{F_2}$ y en particular $x \in F$ si y sólo si $N_X \supset N_F$.

Quedará demostrada la continuidad de p si vemos que para cada cerrado F de $\mathcal{M}$, $p^{-1} F$ consiste en todos los ideales primos que contienen a N_F (recuérdese que este conjunto de ideales primos es cerrado en $\mathcal{P}(B)$). Si $\mathfrak{p} \supset N_F$ trivialmente $p(\mathfrak{p}) \supset N_F$ luego $p(\mathfrak{p}) \in F$.

Recíprocamente, si $p(\mathfrak{p}) \in F$, $N_{p(\mathfrak{p})} \supset N_F$ y como $h(\mathfrak{p}) = p(\mathfrak{p})$ resulta que $\mathfrak{p} \supset N_{p(\mathfrak{p})}$, luego $\mathfrak{p} \supset N_F$. Esto acaba la demostración.

TEOREMA 13. Sea A una $*$-álgebra completa, semisimple y simétrica, B la subálgebra de los elementos acotados de A. Si B es regular, A es regular y $\mathcal{M}(A)$ es homeomorfo a $E(B)$ y por tanto, una compactización de $E(A)$.

DEMOSTRACIÓN. En virtud del lema 1 es claro que lo único que hay que demostrar es que $\mathcal{M}(A)$ es homeomorfo a $E(B) = \mathcal{M}(B)$.

La inyección $B \to A$ da una aplicación $u : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ continua para las topologías de ZARISKI. Entonces $p \circ u : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{M}(B)$ es una aplicación continua. La inyección $i : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{P}(A)$ también es continua, luego $\pi = p \circ u \circ i : \mathcal{M}(A) \to \mathcal{M}(B)$ es continua. Por otra parte, π deja fijos los puntos de $E(A)$ claramente; como $E(A)$ es denso en $\mathcal{M}(B)$ y $\pi \mathcal{M}(A)$ es compacto por serlo $\mathcal{M}(A)$ y como $\mathcal{M}(B)$ es compacto HAUSDORFF, debe ser $\pi \mathcal{M}(A) = \mathcal{M}(B)$.

Veamos que π es inyectiva: sean $x_1, x_2 \in \mathcal{M}(A)$; si $\pi x_1 = \pi x_2$ entonces $x_1 \cap B$ y $x_2 \cap B$ están contenidos en un ideal maximal Z de B y por consiguiente $(x_1 \cap B) + (x_2 \cap B)$ no contiene la unidad. Ahora bien, si $x_1 \neq x_2$ existen $a_1 \in x_1$, $a_2 \in x_2$ tales que $a_1 + a_2 = 1$; se deduce que para ningún ideal maximal cerrado x de A es simultáneamente $a_1(x) = 0$, $a_2(x) = 0$, luego $a_1 a_1^* + a_2 a_2^*$ no tiene ceros en $E(A)$ y por tanto, es inversible; por otra parte

$$\frac{a_1 a_1^*}{a_1 a_1^* + a_2 a_2^*}, \qquad \frac{a_2 a_2^*}{a_1 a_1^* + a_2 a_2^*}$$

son elementos acotados de x_1, x_2, respectivamente, y su suma es la unidad, luego siempre que es $x_1 \neq x_2$ es $\pi x_1 \neq \pi x_2$.

Entonces $\mathcal{M}(A)$ es homeomorfo a $\mathcal{M}(B) = E(B)$.

TEOREMA 14. Bajo las condiciones del teorema 13 la condición necesaria y suficiente para que $E(A)$ sea localmente compacto es que entre los ideales densos de A haya uno mínimo.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $E(A)$ es localmente compacto Sea J_∞ el ideal de las funciones de A con soporte compacto; por la regularidad de A, J_∞ no está contenido en ningún punto, luego es denso.

Veamos que J_∞ está contenido en todo ideal maximal denso z; si no fuera así existirían $a \in J_\infty$, $b \in z$ tales que $a + b = 1$, luego $b(x) = 1$ en todo punto x fuera del soporte $\overline{U}$ de a; ahora bien, para cada punto $y \in \overline{U}$ existe $a_y \in z$ tal que $a_y(y) \neq 0$, luego $a_y a_y^*(y) > 0$: esto ocurrirá en todos los puntos de un entorno de y; recubriendo $\overline{U}$

por un número finito de estos entornos y sumando las funciones, existirá $c \in z$ tal que $c(x) \geq 0$ para todo $x \in E(A)$ y $c(x) > 0$ si $x \in \bar{U}$; entonces tomando λ suficientemente grande positivo, $b + \lambda c$ no tiene ceros en $E(A)$, luego es inversible. Pero esto es imposible por ser $b + \lambda c \in z$.

Si llamamos $F_\infty = \mathcal{M}(A) - E(A)$ y tomamos «hulls» en $\mathcal{M}(A)$ tenemos $h(J_\infty) = F_\infty$, conjunto de los «puntos del infinito» de $E(A)$.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{M}(A)$ y $E(B)$ son homeomorfos y considerando J_∞ como ideal en B, es claro que J_∞ es el ideal de nulidades de F_∞.

Si I es un ideal denso en A, $I \cap B$ no está contenido en ningún punto de $E(A)$, luego $h(I \cap B) \subset F_\infty$ (tomamos h en $\mathcal{M}(B)$) y por tanto $J_\infty \subset I \cap B \subset I$.

Recíprocamente, si en A existe un ideal denso mínimo J_∞ es claro que $h(J_\infty) = \mathcal{M}(A) - E(A)$, lo cual prueba que $E(A)$ es abierto en $\mathcal{M}(A)$, luego localmente compacto.

Nota. En las condiciones del teorema 13, la normalidad del espectro expresada en el teorema 10 significa que dos ideales cerrados que no tienen puntos comunes en $E(A)$ tampoco tienen puntos comunes en F_∞.

III. LOCALIZACION EN ABIERTOS DEL ESPECTRO

1. Unicidad de la topología para álgebras de Fréchet simétricas semisimples

Teorema 15 (Michael). Si A es un álgebra de Fréchet simétrica, toda funcional lineal multiplicativa en A es continua.

Demostración. Por comodidad del lector hacemos una ligera adaptación de la demostración de Michael.

Sea ω una funcional lineal multiplicativa en A.

Denotemos con B la subálgebra de A de los elementos acotados, con la topología del capítulo II; ω sobre B es continua, pues B no tiene ideales densos.

Si ω no fuera continua en A, $\bigcap_{a \in ker(\omega)} h(a)$ sería vacío en $E(A)$. Como $E(A)$ es reunión numerable de compactos por ser A de Fréchet, existiría una familia numerable $\{a_n\} \subset ker(\omega)$ tal que $\bigcap h(a_n)$ es vacío en $E(A)$.

Podemos suponer que la familia de seminormas de A está ordenada: $p_1 \leq p_2 \leq \ldots$ Pongamos:

$$b_n = \frac{a_n a_n^*}{1 + a_n a_n^*}, \qquad c_n = \frac{b_n}{2^n (1 + p_n (b_n))}$$

La serie $\sum_{1}^{\infty} c_n$ es absolutamente sumable en B y su suma c pertenece a $ker(\omega)$. Pero por otra parte c no tiene ceros en $E(a)$. luego es inversible en A, contradicción.

TEOREMA 16 (MICHAEL). Si A es un álgebra simétrica semisimple, dos topologías que hagan de A un álgebra de FRÉCHET son idénticas.

DEMOSTRACIÓN. Sean τ_1, τ_2, dos tales topologías, A_i el álgebra A dotado de la topología τ_i $(i = 1, 2)$. Para la topología $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ A es metrizable. Utilizando el hecho de que $E(A_1) = E(A_2)$, según demuestra el teorema anterior, vamos a ver que A con la topología τ es completa: si $\{a_n\}$ es una sucesión de CAUCHY en A para τ, lo es para τ_1 y τ_2, luego $a_n \underset{\tau_2}{\to} a$, $a_n \underset{\tau_1}{\to} b$; para cada punto $x \in E$ tenemos $a(x) = \lim_{n \to \infty} a_n(x) = b(x)$, luego $a = b$; pero entonces $a_n \to a$ para la topología τ, lo cual prueba que A con topología τ es de FRÉCHET En virtud del teorema de los homomorfismos, τ equivale τ_1 y también a τ_2.

2. LOCALIZACIÓN EN ABIERTOS DEL ESPECTRO

DEFINICIÓN. Una seminorma p en un a.l.c. A se dice que está localizada en un compacto $K \subset E(A)$ cuando para toda $a \in A$ nula en K es $p(a) = 0$. Un a.l.c. cuya topología esté definida por una familia fundamental de seminormas localizadas en compactos se llamará álgebra de seminormas localizadas en compactos.

LEMA. Sea A un álgebra de FRÉCHET regular semisimple. La condición necesaria y suficiente para que A sea de seminormas localizadas en compactos es que sea límite proyectivo estricto de una familia numerable de álgebras de FRÉCHET regulares semisimples de espectro compacto.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que A es de FRÉCHET regular con una familia fundamental de seminormas $\{p_n\}$ localizadas en compactos $\{K_n\}$. Podemos suponer $p_1 \leq p_2 \leq \ldots$; $K_1 \subset K_2 \subset \ldots$. Pongamos $J_n = k(K_n)$, $A_n = A/_{J_n}$, $\pi_n : A \to A_n$ la proyección canónica. A_n es de FRÉCHET regular y su espectro es $E(A_n) = h(J_n) = K_n$ por la regularidad de A. Además, A_n es semisimple, trivialmente.

Si $n \geq m$ existe un epimorfismo continuo $\pi_m^n : A_n \to A_m$ tal que $\pi_m^n \circ \pi_n = \pi_m$; podemos formar $\varprojlim_{\pi_m^n} A_n$ y definir un morfismo continuo $\pi : A \to \varprojlim_{\pi_m^n} A_n$.

El morfismo π es inyectivo, pues si $\pi a = 0$ es $a(x) = 0$ sobre todo compacto K_n, luego $p_n(a) = 0$ para todo n y $a = 0$.

Mostremos que π es epiyectivo: sea $(\widetilde{a}_n) \in \varprojlim_{\pi_m^n} A_n$; para cada n existe un $b_n \in A$ tal que $\pi_n b_n = \widetilde{a}_n$; consideremos la sucesión $\{b_n\}$; esta sucesión es de CAUCHY: sea p_m una seminorma de la familia fundamental, $n_1, n_2, \geq m$; entonces

$$\pi_m(b_{n_1} - b_{n_2}) = \pi_m^{n_1} \circ \pi_{n_1} b_{n_1} - \pi_m^{n_2} \circ \pi_{n_2} b_{n_2} = \pi_m^{n_1} \widetilde{a}_{n_1} - \pi_m^{n_2} \widetilde{a}_{n_2} =$$
$$= \widetilde{a}_m - \widetilde{a}_m = 0, \text{ luego } b_{n_1} - b_{n_2} \in k(K_n) \text{ y por tanto, } p_m(b_{n_1} - b_{n_2}) = 0;$$

esto prueba que $\{b_n\}$ es de CAUCHY. Como A es de FRÉCHET, existe $b = \lim b_n$ y por la continuidad de las proyecciones π_m es

$$\pi_m b = \lim_{n \to \infty} \pi_m b_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \geq m}} \pi_m^n \circ \pi_n b_n = \lim_{\substack{n \to \infty \\ n \geq m}} \pi_m^n \widetilde{a}_n = \lim_{n \to \infty} \widetilde{a}_m = \widetilde{a}_m;$$

por tanto, $\pi b = (\widetilde{a}_m)$; así, π es un epimorfismo. En virtud del teorema de los homomorfismos, $A = \varprojlim_{\pi_m^n} A_n$ también topológicamente.

Recíprocamente, si $A = \varprojlim_{\pi_m^n} A_n$, donde las A_n son regulares semisimples y de espectro compacto, las seminormas de A están localizadas en compactos (los $E(A_n)$).

TEOREMA 17. Si A es un álgebra de FÉCHET regular semisimple con seminormas localizadas en compactos y f es una función en $E(A)$ que localmente pertenece a A, entonces $f \in A$. (*)

DEMOSTRACIÓN. Si $E(A)$ es compacto, el teorema es el corolario 4 del teorema 8. Pasemos al caso general. Pongamos $A = \varprojlim_{\pi_m^n} A_n$ como

(*) Ver al final del artículo.

en el lema anterior. Si f coincide en una vecindad de cada punto de $E(A)$ con un elemento de A, en la vecindad de cada punto de K_n coincide con un elemento de A_n, luego f restringida a cada K_n pertenece a A_n. Existe entonces una sucesión $\{a_n\} \subset A$ tal que a_n restringida a K_n coincide con f. La sucesión $\{a_n\}$ es de CAUCHY (el mismo argumento que para el lema). Su límite a coincide con f en todo punto de $E(A)$.

Pasamos a considerar ahora un sugestivo problema en la teoría de funciones: una función continua (resp. diferenciable, C^∞) en el segmento abierto ¿puede expresarse como cociente de dos funciones del mismo tipo en el segmento cerrado? El problema en general es el siguiente: dada un álgebra de funciones A y un abierto $\mathcal{U} \subset E(A)$, ¿bajo qué condiciones las funciones de $\mathcal{U}$ que localmente coinciden con funciones de A son cocientes de dos funciones de A?

Diremos que un álgebra está definida por condiciones locales cuando verifica la tesis del teorema 17.

TEOREMA 18. Sea A una $*$-álgebra de FRÉCHET simétrica, regular, semisimple definida por condiciones locales. Sea F un cerrado de $E(A)$ tal, que su ideal de nulidades N_F tenga una familia numerable de generadores. Sea $\mathcal{U} = C\,F$; entonces la condición necesaria y suficiente para que una función f definida en $\mathcal{U}$ coincida localmente con elementos de A es que sea cociente de dos funciones de A (con denominador sin ceros en $\mathcal{U}$).

DEMOSTRACIÓN. Observemos en primer lugar que si N_F está generado por la familia $\{a_n\}$ se tiene $F = \cap\, h(a_n)$ donde $h(a_n)$ es un cerrado en cuyo interior está contenido F.

Supongamos que f coincide localmente en $\mathcal{U}$ con elementos de A. Consideremos la función — que denotaremos $a_n a_n^* f$ — igual a:

$$\begin{cases} a_n(x)\, a_n^*(x) f(x) & \text{en } \mathcal{U} \\ 0 \text{ en } F \end{cases}$$

Por la hipótesis hecha sobre f, la función que acabamos de definir coincide en un entorno de dada punto de $\mathcal{U}$ con un elemento de A, y como $h(a_n)$ contiene a F en su interior, coincide también en un entorno de cada punto de F con elementos de A. Como A está definida por condiciones locales, resulta $a_n a_n^* f \in A$.

Suponemos que las seminormas de A están ordenadas:

$$p_1 \leq p_2 \leq \dots$$

Consideremos las series

$$a = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n a_n^* f}{2^n (1 + p_n (a_n a_n^* f)) \cdot (1 + p_n (a_n a_n^*))},$$

$$b = \sum_{1}^{\infty} \frac{a_n a_n^*}{2^n (1 + p_n (a_n a_n^* f)) \cdot (1 + p_n (a_n a_n^*))}$$

Estas series son absolutamente sumables. Luego a y b pertenecen a A. Claramente, b sólo es cero en los puntos de F y se tiene $f = \frac{a}{b}$ en $\mathcal{U}$.

Recíprocamente, consideremos la función $f = \frac{a}{b}$ donde b no tiene ceros en $\mathcal{U}$. Cada punto x de $\mathcal{U}$ tiene un entorno cerrado $\overline{W} \subset U$. En el álgebra cociente $A/_{k(W)}$ la imagen de b no tiene ceros y por consiguiente es inversible, es decir, $\frac{1}{b}$ coincide con la restricción a $\overline{W}$ de una función de A, luego $\frac{a}{b}$ coincide en $\overline{W}$ con una función de A.

NOTA. Es claro que en el enunciado del teorema 18 puede sustituirse la hipótesis sobre N_F por la siguiente (la que se usa en la demostración): existe una familia numerable de elementos $\{a_n\}$ tal que $\bigcap h(a_n) = F$ y que F sea interior al conjunto de los ceros de cada a_n, es decir, a cada $h(a_n)$.

COROLARIO. Sea A una $*$-álgebra de FÉCHET simétrica, regular separable, semisimple y definida por condiciones locales. Sea F un cerrado cualquiera de $E(A)$; toda función en $\mathcal{U} = C F$ que localmente coincida con elementos de A es cociente de dos funciones de A.

DEMOSTRACIÓN. N_F contiene una familia numerable densa $\{a_n\}$; claramente los a_n están en las condiciones de la nota anterior.

NOTA. En el caso separable, todo cerrado de $E(A)$ es cero de una función de A.

Ejemplo: Las funciones C^∞ sobre la recta se pueden representar como cocientes de funciones C^∞ sobre la circunferencia, con denominador nulo a lo más en un punto (el punto cuyo complementario es la recta).

Dada el álgebra A y un abierto $\mathcal{U}$ de $E(A)$ en las condiciones del teorema 18, denotaremos con A_u el álgebra de todas las funciones en $\mathcal{U}$ que localmente coinciden con elementos de A.

Vamos a dotar a A_u de una topología de FRÉCHET.

Es fácil ver que A_u es semisimple y tiene una involución simétrica, luego esta topología de FRÉCHET será única (teorema 16).

Sea $F = C\,\mathcal{U}$, $\{a_n\}$ funciones tales que $\cap\, h(a_n) = F$ y que F sea interior a $h(a_n)$ para cada n.

$E(A) - h(a_n)$ es un abierto cuya clausura no corta a F. Sea $\bar{w}_n$ esta clausura. No hay inconveniente en suponer que $\bar{w}_1 \subset \bar{w}_2 \subset \ldots$ sustituyendo $a_1, a_2, \ldots$ por $a_1 a_1^*$, $a_1 a_1^* + a_2 a_2^*, \ldots$. Sea $J_n = k(\bar{w}_n)$, $A_n = A/_{J_n}$.

A_n es una $*$-álgebra de FRÉCHET simétrica, semisimple y regular (por serlo A) y existe un morfismo de restricción $A_n \xrightarrow{\pi^n_{n-1}} A_{n-1}$ que es epiyectivo. Podemos formar $\mathcal{A} = \varprojlim_{\pi^n_{n-1}} A_n$, que es una $*$-álgebra de FRÉCHET simétrica semisimple de espectro $\mathcal{U}$. La aplicación canónica $A \to \mathcal{A}$ lleva los elementos de A que no tiene ceros en $\mathcal{U}$ a elementos inversibles de $\mathcal{A}$; por tanto toda función $\frac{a}{b}$ de A_u tiene imagen en $\mathcal{A}$. Recíprocamente todo elemento de $\mathcal{A}$ coincide en $\mathcal{U}$ localmente con elementos de A, pues cada punto de $\mathcal{U}$ está contenido en un w_n. Por tanto, en virtud del teorema 18, $\mathcal{A} = A_u$.

TEOREMA 19. Sea A una $*$-álgebra de FRÉCHET semisimple, regular definida por condiciones locales. Sea F un cerrado como en el teorema 18, $\mathcal{U} = C\,F$, A_u el álgebra de funciones en $\mathcal{U}$ que localmente coinciden con elementos de A. Entonces A_u es una $*$-álgebra simétrica, regular, semisimple dotada de topología de FRÉCHET, definida por condiciones locales, y su espectro es $\mathcal{U}$.

Algunos de los resultados sobre álgebras de funciones continuas o C^∞ sobre variedades numerables al infinito pueden extenderse a $*$-álgebras de FRÉCHET simétricas semisimples regulares definidas por condiciones locales y de espectro localmente compacto. Así, por ejemplo, el teorema de partición de la unidad subordinado a un recubrimiento cualquiera del espectro. Resulta también que todo ideal cerrado I tiene la siguiente propiedad: si f es una función que localmente está en I, $f \in I$.

BIBLIOGRAFIA

1. GELFAND, RAIKOV, CHILOV: *Les anneaux normés commutatifs*. Gauthier Villars. París, 1964.

2. E. MICHAEL: *Locally Multiplicatively-convex topological algebras*. Memoirs of the A.M.S. 11, 1952.

3. R. ARENS: *A generalization of normed rings*. Pacific Journal of Mathematics. Diciembre 1952.

4. R. ARENS: *Dense inverse limit rings*. Michigan Math. J. Vol. 5, N.º 2, 1958.

Añadido durante la corrección de pruebas

5. R. M. BROOKS: *The Structure Space of a commutative locally M-convex algebra*. Pacific S. of Math, Vol. 25, N.º 3, 1968.

6. R. M. BROOKS: *Partitions of Unity in F-Algebras*. Math. Ann. 177-4, 1968.

El teorema 2, 5. de BROOKS muestra que la hipótesis de «*Seminormas localizadas en compactos*» que hacemos en el teorema 17 es superflua. En consecuencia nuestros teoremas 18 y 19 valen para toda $*$-álgebra de FRÉCHET semisimple y regular.

7. M. ROSENFELD: *Commutative - algebras*. Pacific J. of Math, Vol. 16, N.º 1, 1966.