UN THEOREME EN ALGEBRE ET EN ANALYSE

par

J. Chacron

Si f est un homomorphisme du demi-groupe D sur le demi-groupe D', l'ensemble des relations d'équivalences régulières par rapport à la première opération et contenant l'équivalence associée à f, est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des relations d'équivalences régulières par rapport à la deuxième opération (1); tel est le théorème que nous nous proposons d'étendre d'abord aux ensembles, par suite aux ensembles munis d'une opération partielle, et enfin aux espace topologiques.

Cette extension qui est en fait une conséquence du passage général d'un homomorphisme à un isomorphisme ou à un homéomorphisme, est aussi fondamentale et donne un deuxième exemple de belle unification de l'Algèbre et l'Analyse.

A) Théorème en Théorie des ensembles

Soient; E et E' deux ensembles, f une application de E sur E'. Notons φ l'application de $E \times E$ dans $E' \times E'$ définie par:

$$\varphi[(a, b)] = (f(a), f(b))$$

Si $\mathfrak{R}$ est une relation binaire dans E (une partie de $E \times E$), $\varphi(\mathfrak{R})$ est donc une relation binaire dans E'.

Si $\mathfrak{R}'$ est une relation reflexive dans E', $\varphi^{-1}(\mathfrak{R}')$ est une relation binaire dans E qui contient l'équivalence associée à f (la relation $f(a) = f(b)$).

Il est facile de montrer que les propriétés usuelles comme la réflexivité, la transitivité ou la symétrie se transmettent par φ et φ^{-1}.

(1) P. Dubreil, Cours d'Algèbre 1965.

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS EXACTAS - BIBLIOTECA - MADRID

Un simple calcul montre que si $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{R}'$ sont deux relations de préordre et telles que $\varphi(\mathfrak{R}) = \varphi(\mathfrak{R}')$, et toutes deux contenant l'équivalence associée à f; alors $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}'$.

Le fait que si $\mathfrak{R}$ est une relation de préordre, $\varphi(\mathfrak{R})$ est une relation de préordre, et de même pour $\varphi^{-1}(\mathfrak{R}')$ et $\mathfrak{R}'$. Sachant aussi que,

$$\varphi[\varphi^{-1}(\mathfrak{R}')] = \mathfrak{R}'$$

on obtient le résultat suivant:

Théorème 1 : S'il existe une surjection de E vers E', l'ensemble des relations de préordre contenant l'équivalence associée à f est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des relations de préordre dans E'.

On a de même :

Théorème 2: Si f est une surjection de E vers E', l'ensemble des relations d'équivalence contenant l'équivalence associée à f, est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des relations d'équivalence dans E'.

Explicitons deux résultats qui nous seviront dans les deux parties qui suivent:

Proposition 3 : Si $\mathfrak{R}$ est une relation d'équivalence dans E, contenant v_f il existe doux applications h et g telles que $\varphi(\mathfrak{R})$ soit l'équivalence associée à $h \cdot g$.

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[r, "f"] \arrow[dl, "\bar{\mathfrak{R}}"'] \arrow[d, "\bar{v}_f"] & E' \arrow[dl, "g"] \\
E/\mathfrak{R} & E/v_f \arrow[l, "h"] &
\end{tikzcd}$$

Désignons par v_f l'équivalence associée à f, par $\bar{v}_f$ l'application canonique de E dans l'ensemble quotient E/v_f, g la bijection de E' sur E/v_f et par h l'application de E/v_f dans $E/\mathfrak{R}$ qui à la classe $v_f(x)$ associe la classe $\mathfrak{R}(x)$. Montrons que $\varphi(\mathfrak{R})$ est l'équivalence $v_{h \cdot g}$.

Supposons que $(a', b') \in \varphi(\mathfrak{R})$. Il existe $(a, b) \in \mathfrak{R}$ tel que:

$$a' = f(a) \quad \text{et} \quad b' = f(b)$$

En particulier $\overline{\mathfrak{R}}(a) = \overline{\mathfrak{R}}(b)$, et comme $\overline{\mathfrak{R}} = h \cdot \bar{\nu}_f$, ilvient:

$$h \cdot \bar{\nu}_f(a) = h \cdot \bar{\nu}_f(b)$$

Comme $\bar{\nu}_f = g \cdot f$;

$$h \cdot g(f(a)) = h \cdot g(f(b))$$

Ce qui revient à dire que $h \cdot g(a') = h \cdot g(b')$

Soit encore $(a', b') \in \nu_{h \cdot g}$

Supposons que $(a', b') \in \nu_{h \cdot g}$. Il existe a et $b \in E$ tels que:

$$h(g \cdot f(a)) = h(g \cdot f(b))$$

D'où; $h \cdot \nu_f(a) = h \cdot \nu_f(b)$

$$\overline{\mathfrak{R}}(a) = \overline{\mathfrak{R}}(b)$$

Ce qui revient à dire que $(a, b) \in \mathfrak{R}$. Par conséquent,

$$\varphi[(a, b)] = (f(a), f(b)) \in \varphi(\mathfrak{R})$$

Soit encore que $(a', b') \in \varphi(\mathfrak{R})$.

On démontre d'une manière analogue le résultat suivant:

Proposition 4: Si $\mathfrak{R}'$ est une relation d'équivalence dans E', alors $\varphi^{-1}(\mathfrak{R}')$ est l'équivalence $\nu_{\overline{R'} \cdot f}$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & E' \arrow[d, "\overline{\mathfrak{R}}'"] \\ & E' / \mathfrak{R}' \end{tikzcd}$$

B) Théorèmer d'isomorphisme en Algèbre

Nous supposons que E et E' sont munis d'une loi partielle. Une relation d'équivalence dans E est dite compatible sur E si les conditions suivantes sont vérifiées:
Si (a, b) et $(c, d) \in \mathfrak{R}$, ac et bd sont définis alors;

$$(ac, \ bd) \in \mathfrak{R}$$

Un double homomorphisme de E vers E' est une application qui vérifie la double condition suivante:

— Si ab est défini, $f(a)f(b)$ est défini et; $f(ab) = f(a)f(b)$.

— Si $a'b'$ est défini, il existe a et $b \in E$ tels que:

$$a' = f(a), \quad b' = f(b) \quad \text{et} \quad a'b' = f(ab)$$

On sait que si f est un homomorphisme (c'est à dire remplissant la première condition, l'équivalence ν_f associée à f est compatible sur E). En outre que si f est un double homomorphisme, avec les notations de la proposition 3, l'application g est alors un homomorphisme de E' dans E/ν_f.

Théorème 5: *S'il existe un double homomorphisme f de E vers E', l'ensemble des relations d'équivalence compatibles sur E et contenant l'équivalence associée à f, est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des relations d'équivalence compatibles sur E'.*

Soit en effet une relation $\mathfrak{R}$ compatible sur E. D'après la proposition 3, $\varphi(\mathfrak{R}) = \nu_{h \cdot g}$. Ce qui montre que $\varphi(\mathfrak{R})$ est compatible sur E'.

Soit $\mathfrak{R}'$ une relations compatible sur E'. D'après la proposition 4, $\varphi^{-1}(\mathfrak{R}') = \nu_{\overline{R}' \cdot f}$. Donc $\varphi^{-1}(\mathfrak{R}')$ est compatible sur E.

D'après le théorème 2, on obtient le résultat à montrer.

C) Théorèmes d'isomorphisme en Analyse

Nous supposons que E et E' sont deux espaces topologiques.

Une relation d'équivalence sur E est dite ouverte [2], si le saturé par $\mathfrak{R}$ de tout ouvert est un ouvert, fernée si le saturé de tout fermé est un fermé.

---

[2] N. Bourbaki, Topologie génerale, livreIII, chap. 1, § 5.

Il revient eu même de dire que l'image par l'application canonique $\overline{\mathfrak{R}}$ de tout ouvert de E est un ouvert dans l'espace quotient $E/\mathfrak{R}$ (espace où les ouverts sont les ensembles $\mathfrak{U} \subset \mathfrak{P}(E)$, tels que $[\overline{\mathfrak{R}}]^{-1}(\mathfrak{U})$ soit un ouvert de E) et que l'image par $\overline{\mathfrak{R}}$ d'un fermé de E est un fermé de $E/\mathfrak{R}$.

Une application f de E dans E' est dite ouverte ([3]) si l'image d'un ouvert de E est un ouvert de E', et si l'image inverse par f d'un ouvert de E' est un ouvert de E.

f est fermée si l'image d'un fermé de E est un fermé de E', et si l'image inverse d'un fermé de E' est un fermé de E.

On sait que le produit de deux applications ouvertes (repec. fermées) est ouverte (repec. fermée). Il est facile de montrer que si f est ouverte (repec. fermée), l'équivalence associée à f est ouverte (respec. fermée) (car $[\bar{\nu}_f]^{-1} \cdot \bar{\nu}_f(X) = f^{-1} \cdot f(X)$ pour tout sous ensemble X de E).

THÉORÈME 6: *S'il existe une application ouverte de E sur E', l'ensemble des relations d'équivalences ouvertes dans E et contenant l'équivalence associée à f, est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des relations d'équivalences ouvertes dans E'.*

D'après le théorème 2, il suffit de montrer que si $\mathfrak{R}$ est ouverte, $\varphi(\mathfrak{R})$ est ouverte; et de même pour $\mathfrak{R}'$ et $\varphi^{-1}(\mathfrak{R}')$.

Supposons que $\mathfrak{R}$ soit ouverte dans E. D'après la proposition 2;

$$\overline{\mathfrak{R}} = h \cdot \bar{\nu}_f$$

Or $\bar{\nu}_f$ est une surjection. Par conséquent;

$$h = \overline{\mathfrak{R}} \cdot [\bar{\nu}_f]^{-1} \quad \text{sur} \quad E/\nu_f$$

Ce qui montre que l'image d'un ouvert de E/ν_f par h est un ouvert de $E/\mathfrak{R}$ et que h est ouverte.

Or $\varphi(\mathfrak{R}) = \nu_{h \cdot g}$. Comme g est un homéomorphisme, $h \cdot g$ est ouverte, et $\varphi(\mathfrak{R})$ est ouverte comme équivalence associée à une application ouverte.

Supposons que $\mathfrak{R}'$ soit ouverte dans E'. D'après la proposition 3, $\varphi^{-1}(\mathfrak{R}')$ est l'équivalence associée à $\overline{\mathfrak{R}}' \cdot f$, et est donc ouverte comme équivalence associée à une application ouverte.

On démontre de la même manière que précédemment que:

---

[3] Bourbaki, Topologie générale, livreIII, chap. 1, § 5.

Si f est une application fermée de E sur E', les relations d'équivalences fermées et contenant l'équivalence associée à f, sont en correspondance biunivoque avec les relations d'équivalence fermées dans E'.

Questions

a) Que devient le théorème lorsque E et E' sont des graphes multiplicatifs ou des catégories.

b) Etendre le théorème aux structures algébriques et topologiques.