DIE DIAMETRALE DIMENSION VON LOKALKONVEXEN RÄUMEN

TOSUN TERZIOGLU

EINLEITUNG

Wir betrachten in dieser Arbeit zwei Invarianten für lokalkonvexe topologische lineare Räume. Die eine Invariante ist die sogenannte diametrale Dimension von C. BESSAGA, A. PELCZYNSKI und S. ROLEWICZ, in der man den verallgemeinerten Durchmesser von Nullumgebungen benutzt. Wir nennen diese Invariante die Δ-diametrale Dimension. Wir führen den Begriff des Schnittes ein um eine zweite Invariante zu definieren, die wir hier die Γ-diametrale Dimension nennen.

In Abschnitt I werden die grundlegenden Eigenschaften von Durchmessern und Schnitten von Teilmengen eines lokalkonvexen Raumes zusammengefasst. Wir geben auch einen einfacheren Beweis für den Satz von TIKHOMIROW, der für die Anwendungen wichtig ist.

In Abschnitt II untersuchen wir die Permanenzeigenschaften von beiden, Dimensionen. Durch Anwendung der Dualität zwischen Schnitt und Durchmesser geben wir den Zusammenhang zwischen Δ-und Γ-Dimensionen und zeigen, dass für verallgemeinerte HILBERT Räume die beiden Begriffe übereinstimmen. Damit ist eine von A. PIETSCH ((1), 9.2.5), aufgeworfene Frage für diese Räume positiv beantwortet. B. S. MITIAGIN hat die nuklearen Räume mit Hilfe der Δ-diametralen Dimension charakterisiert. Hier geben wir eine Charakterisierung von SCHWARTZ Räumen bezüglich beider Dimensionen. Damit ist gezeigt, dass diese Begriffe nur für SCHWARTZ Räume interessant sind. Fasst man diese Charakterisierung der SCHWARTZ Räume und der nuklearen Räume mit den Permanenzeigenschaften unserer Dimensionen zusammen, dann kann man manche Permanenzeigenschaften Schwartzscher und nuklearer Räume gleichzeitig erhalten.

In Abschnitt III betrachten wir Folgenräume. Nach den grundlegenden Untersuchungen geben wir genau an, wann ein Folgenraum ein SCHWARTZ Raum ist. Diese Charakterisierung ist analog zu der Charakterisierung von nuklearen Folgenräumen, die von A. GROTHENDIECK und A. PIETSCH stammt. Wir zeigen, dass die beiden Dimensionen auch für Folgenräume übereinstimmen. Wir führen eine Klasse von Folgenräumen ein, die wir glatte Räume nennen, und berechnen ihre Dimensionen. Diese Räume sind eine Verallgemeinerung der Potenzreihenräume. Wegen des Zusammenhangs mit dem Basistheorem für nukleare Räume ist die Frage nach der Isomorphie von zwei Folgenräumen sehr wichtig. Hier kann der Begriff der diametralen Dimension eine Rolle spielen, in dem man durch den Vergleich der diametralen Dimensionen von zwei Folgenräumen zeigen kann, dass diese Räume nicht isomorph sind. Mit dieser Methode zeigen wir, dass zwei glatte Räume von verschiedenem Typus nicht isomorph sind.

In Abschnitt IV verallgemeinern wir einige Ergebnisse der Arbeit von Y. KOMURA und T. KOMURA (1). Damit beweisen wir einen allgemeineren Einbettungssatz für nukleare Räume. Als letztes berechnen wir die diametralen Dimensionen einiger Räume.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. G. KÖTHE für seine Unterstützung und Anregung bestens danken.

I. DURCHMESSER UND SCHNITT

1. DEFINITIONEN UND EIGENSCHAFTEN

Wir bezeichnen mit Raum einen lokalkonvexen topologischen linearen Raum. Wenn A eine Teilmenge des Raumes E ist, dann ist kA bzw. ΓA bzw. $\bar{A}$ die kreisförmige bzw. absolutkonvexe bzw. abgeschlossene Hülle von A. Mit p_B bezeichnen wir die von der absolutkonvexen Teilmenge B erzeugte Halbnorm, definiert auf dem Teilraum $E(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB$. B^i bzw. B^a ist der algebraische Kern bzw. die algebraische Hülle von B. Wir bezeichnen mit $d(L)$ bzw. $c(L)$ die algebraische Dimension bzw. Codimension eines Teilraumes L von E. Eine absolutkonvexe Teilmenge B *absorbiert* eine Teilmenge A, wenn für eine Zahl $\varrho > 0$ die Beziehung $A \subset \varrho B$ besteht. Dann schreiben wir $A < B$.

Sei $A < B$ und L ein Teilraum von E. Sei

$$\delta(A, B; L) = \inf \{\delta \geq 0: A \subset \delta B + L\}$$

Enthält A das Nullelement von E, dann sei

$$\gamma(A, B; L) = \inf \{\delta \geq 0: A \cap L \subset \delta B\}$$

Bezüglich der Hälbnorm p_B haben wir

(1) $\gamma(A, B; L) = \sup\limits_{x \in A \cap L} p_B(x)$ und $\delta(A, B, L) = \sup\limits_{x \in A} \inf\limits_{y \in L} p_B(x - y)$.

Sind B und C absolutkonvexe Teilmengen mit $B^i \subset C \subset B^a$, dann erzeugen B und C dieselbe Halbnorm. Ist $A < B$, dann auch $A < C$ und wir erhalten aus (1).

(2) $\gamma(A, B; L) = \gamma(A, C; L)$; $\delta(A, B; L) = \delta(A, C; L)$

Sind A und B Teilmengen von E mit $A < B$ und $n \epsilon N = \{0, 1, 2 \ldots,\}$, dann heisst

$$\delta_n(A, B) = \inf \{\delta(A, B, L): d(L) \leqq n\}$$

der n-te DURCHMESSER *von* A *bezüglich* B. Enthält die Menge A das Nullelement von E, dann heisst

$$\gamma_n(A, B) = \inf \{\gamma(A, B; L): c(L) = \leq n, \ L \text{ abgeschlossen}\}$$

der n-te SCHNITT *von* A *bezüglich B*. Hier ist B stets eine absolutkonvexe Teilmenge nach Definition der Relation $<$. $(\delta_n(A, B))$ und $(\gamma_n(A, B))$ sind absteigende Folgen nicht negativer Zahlen. In (3) und (4) fassen wir einige einfache Eigenschaften dieser Begriffe zusammen.

(3) (*a*) Sei $A \subset \varrho B$ *und* B *sei absolutkonvex*, $\varrho \geq 0$. *Dann gilt*

$$\delta_0(A, B) = \gamma_0(A, B) \leq \varrho$$

(*b*) Für $\lambda > 0$, $\mu > 0$ gelten

$$\frac{\lambda}{\mu} \delta_n(A, B) = \delta_n(\lambda A, \mu B)$$

$$\frac{\lambda}{\mu} \gamma_n(A, B) = \gamma_n(\lambda A, \mu B).$$

(c) *Ist* C *eine absolutkonvexe Teilmenge mit* $B^i \subset C \subset B^a$, *dann gelten*

$$\delta_n(A, B) = \delta_n(A, C)$$

$$\gamma_n(A, B) = \gamma_n(A, C)$$

(d) Sei $A < B < C$. *Dann bestehen die Ungleichungen*

$$\delta_{m+n}(A, C) \leq \delta_m(A, B)\ \delta_n(B, C)$$

$$\gamma_{m+n}(A, C) \leq \gamma_m(A, B)\ \gamma_n(B, C)$$

für $m, n \in N$.

Beweis: (a) ist trivial und (c) folgt aus (2).

(b) folgt aus $\delta(\lambda A, \mu B; L) = \dfrac{\lambda}{\mu}\ \delta(A, B; L)$ und

$$\gamma(\lambda A, \mu B; L) = \frac{\lambda}{\mu}\ \gamma(A, B; L)$$

(d) Ist $d(L_1) \leq m$ und $d(L_2) \leq n$, dann gilt $d(L_1 + L_2) \leq m + n$ und aus $A \subset \delta_1\ B + L_1$, $B \subset \delta_2\ C + L_2$ folgt $A \subset \delta_1\ \delta_2\ C + L_1 + L_2$.

Hat man $A_\cap M_1 \subset \varepsilon_1\ B$ und $B_\cap M \subset \varepsilon_2\ C$ für abgeschlossene Teilräume M_1 und M_2 mit $c(M_0) \leq m$ und $c(M_2) \leq n$, dann gilt

$$A_\cap M_{1\cap} M_2 \subset \varepsilon_1\ \varepsilon_2\ C$$

Aus der Formel $c(M_{1\cap} M_2) = c(M_1) + c(M_2) - c(M_1 + M_2)$ folgt $c(M_{1\cap} M_2) \leq m + n$.

(4) (a) *Aus* $A_1 \subset A_2$ *und* $A_2 < B$ *folgt* $\delta_n(A_1, B) \leq \delta_n(A_2, B)$ *und* $\gamma_n(A_1, B) \leq \gamma_n(A_2, B)$.

(b) *Aus* $A < B$ *und* $B \subset C$ *folgt* $\delta_m(A, C) \leq \delta_m(A, B)$ *und* $\gamma_m(A, C) \leq \gamma_m(A, B)$ *für jedes* $m \in N$.

Beweis:

(a) Für jeden Teilraum L gelten $\delta(A_1, B; L) \leq \delta(A_2, B; L)$, $\gamma(A_1, B, L) \leq \gamma(A_2, B, L)$.

(*b*) Nach (3) (*d*) gilt

$$\delta_m(A, C) \leq \delta_m(A, B)\ \delta_0(B, C)$$

und $\delta_0(B, C) \leq 1$ nach (3) (*a*).

Ist $A < B$, dann bestehen die Ungleichungen

$$\delta_n(A, B) \leq \delta_n(\Gamma A, B)$$

$$\gamma_n(A, B) \leq \gamma_n(kA, B)$$

nach (4) (*a*). Aus $A \subset \delta B + L$ erhält man $\Gamma A \subset \delta B + L$, weil die Menge $\delta B + L$ absolutkonvex ist. Daher gilt

(5) $$\delta_n(A, B) = \delta_n(\Gamma A, B)$$

Sei $A \cap L \subset \delta B$ für einen Teilraum L. Ist x ein Element von $(kA) \cap L$, dann $x = \alpha$ y für eine Zahl α mit $|\alpha| \leq 1$ und ein $y \in A$. Weil L ein Teilraum ist, gehört y auch zu L. Nach unserer Annahme liegt y und damit auch x in δB, denn B ist kreisförmig. Daraus folgt aber $(kA) \cap L \subset \delta B$ und damit haben wir

(6) $$\gamma_n(kA, B) = \gamma_n(A, B)$$

Beispiel: Sei $A = \{(\xi, 0) : -1 \leq \xi \leq 1\} \cup \{(0, \eta) : -1 \mid \leq \eta \leq 1\}$

A ist eine beschränkte Teilmenge von P^2, wo P die reelle Gerade ist. B sei die Einheitskugel von P^2 und $L = \{(\xi, \eta) : \xi = \eta\}$

Aus $A \cap L = \{0\}$ folgt $\gamma_1(A, B) = 0$, aber $\gamma_1(\Gamma A, B)$ ist echt grösser als 0. Da $\delta_1(A, B) = \delta_1(\Gamma A, B) = 1$, ist $\gamma_1(A, B)$ nicht gleich $\delta_1(A, B)$.

Wir geben jetzt eine äquivalente Definition des Durchmessers, in der man statt Teilräume kompakte Teilmengen benutzt.

(7) $\delta_n(A, B)$ *ist gleich dem Infimum aller* $\delta \geq 0$, *zu denen es höchstens* n *Punkte* $x_1 \ldots x_n$ *aus* $E(B)$ *gibt, für die Ungleichung*

$$A \subset \delta B + \Gamma\{x_1 \ldots x_n\}$$

besteht.

Beweis: Es gelte $A \subset \delta B + L$ für einen Teilraum L mit $d(L) \leq n$ und für eine Zahl $\delta \geq 0$. Man kann einen Teilraum G von L finden, so dass $L = N(B) \cap L \oplus G$. Hier bedeutet $N(B)$ den Kern der Halbnorm p_B. Aus der Annahme erhält man dann

(i) $$A \subset \delta B + N(B) + G \subset (\delta + \varepsilon) B + G$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Dabei gilt $d(G) \leq n$ und $G \cap N(B) = (0)$. Nach (i) gibt es zu jedem $x \in A$ ein $y \in B$ und ein $z \in G$ mit $z = x - (\delta + \varepsilon) y$ Folglich ergibt sich die Ungleichung

(ii) $$A \subset (\delta + \varepsilon) B + (\lambda + \delta + \varepsilon) (B \cap G)$$

wo $\lambda > 0$ irgendeine Zahl, mit $A \subset \lambda B$. Weil die Menge $B \cap G$ keine Gerade im endlich-dimensionalen Teilraum G enthält, ist sie beschränkt und infolgedessen kann man Punkte $x_1 \ldots x_n$ aus $E(B)$ finden, so dass $(\lambda + \delta + \varepsilon)(B \cap G) \subset \Gamma\{x_1 \ldots x_n\}$ gilt. Aus (ii) folgt darum

$$A \subset (\delta + \varepsilon) B + \Gamma\{x_1 \ldots x_n\}$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Besteht anderseits die Ungleichung $A \subset \delta B + \Gamma\{x_1 \ldots x_n\}$, dann gilt bestimmt $A \subset \delta B + L$, wo L der kleinste Teilraum, der $\{x_1 \ldots x_n\}$ enthält.

Mit $\mathfrak{A}(E)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller absolutkonvexen und abgeschlossenen Nullumgebungen des Raumes E. Wir geben jetzt eine Charakterisierung der präkompakten Teilmengen von E.

(8) *Eine beschränkte Teilmenge* A *von* E *ist genau dann präkompakt, wenn für jede Nullumgebung* $U \in \mathfrak{A}(E)$ *die Folge* $(\delta_n(A, U))$ *gegen Null konvergiert.*

Beweis: Wenn A präkompakt ist, dann kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{A}(E)$ eine Teilmenge $K_s = \Gamma\{x_1 \ldots x_s\}$ mit

$$A \subset \varepsilon\, U + K_s$$

finden. Nach (7) gilt dann aber $\delta_n(A, U) \leq \varepsilon$ für $n > s$.

Sei $\delta_n(A, U) \to 0$. Man kann nach (7) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Teilmenge K mit

$$A \subset \frac{\varepsilon}{2} U + K$$

finden. Da K kompakt ist, gibt es Punkte $x_1 \dots x_m$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{x_i + \frac{\varepsilon}{2} U\}$ und daraus folgt

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{m} \{x_i + \varepsilon U\}$$

(9) Sei $\overline{A} < B$. *Dann gilt für jedes* $n \in N$

$$\delta_n(A, \overline{B}) = \delta_n(\overline{A}, \overline{B}) \leq \delta_n(A, B) \leq \delta_n(\overline{A}, B)$$

Aus der Stetigkeit der Halbnorm P_B *folgt dabei die Gletchheit.*

Beweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Teilmenge $K_n = \Gamma\{x_1 \dots x_n\}$ mit

$$A \subset (\delta_n(A, B) + \varepsilon) B + K_n$$

Daraus hat man unmittelbar

$$A \subset (\delta_n(A, B) + \varepsilon) \overline{B} + K_n$$

Weil K_n kompakt ist, ist die rechte Seite abgeschlossen. Folglich gilt

$$\overline{A} \subset (\delta_n(A, B) + \varepsilon) \overline{B} + K_n$$

Im Limes hat man daher

(i) $$\delta_n(\overline{A}, \overline{B}) \leq \delta_n(A, B)$$

Nach (4) haben wir auch

(ii) $$\delta_n(A, \overline{B}) \leq \delta_n(\overline{A}, \overline{B})$$

(iii) $$\delta_n(A, B) \leq \delta_n(\overline{A}, B)$$

Aus (i) für $B = \overline{B}$ und (ii) folgt $\delta_n(\overline{A}, \overline{B}) = \delta_n(A, \overline{B})$.

Ist die Halbnorm p_B stetig, dann gilt $B^a = \overline{B}$ und aus 3 (c) folgt $\delta_n(\overline{A}, \overline{B}) = \delta_n(\overline{A}, B)$.

Der Schnitt hängt im allgemeinen von der Topologie ab, da wir das Infimum über abgeschlossene Teilräume nehmen.

Für zwei Nullumgebungen ist dies nicht mehr der Fall.

(10) *Für zwei Nullumgebungen* V, U *aus* $\mathfrak{A}$ (E) *mit* V < U *gilt*

$$\gamma_n(V, U) = \inf \{\gamma(V, U; L) : c(L) \leq n\}$$

Beweis: Sei $x \in V \cap \overline{L}$ für einen Teilraum L. Es gibt dann ein Netz (x_α) von Elementen aus L mit $x_\alpha \to x$. Für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es ein α_0 mit

$$x_\alpha - x \in \varepsilon V$$

für $\alpha > \alpha_0$. Daher liegt x_α in $(1 + \varepsilon)(V \cap L)$ ab α_0 und folglich gilt

$$V \cap \overline{L} \subset (1 + \varepsilon)\, \overline{(V \cap L)}$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Im Limes besteht

$$V \cap \overline{L} \subset \overline{(V \cap L)}$$

Anderseits hat man $\overline{(V \cap L)} \subset V \cap \overline{L}$, da V abgeschlossen ist.

Wir haben jetzt

$$V \cap \overline{L} = \overline{(V \cap L)}$$

gezeigt.

Gilt $V \cap L \subset \delta\, U$ für eine Zahl $\delta \geq 0$, dann gilt nach dem Bewiesenen $V \cap \overline{L} \subset \delta\, U$, weil U abgeschlossen ist. Daher besteht die Ungleichung

$$\gamma(V, U; \overline{L}) \leq \gamma(V, U; L)$$

Weil $c(\overline{L}) \leq c(L)$, folgt

$$\gamma_n(V, U) \leq \inf \{\gamma(V, U; L) : c(L) \leq n\}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Ist t eine lineare Abbildung, die dem Raum E in den Raum F abbildet und sind A, B zwei Teilmengen von E mit $A < B$, fragen wir nach dem Beziehungen zwischen den Durchmessern von A bezüglich B und den von $t(A)$ bezüglich $t(B)$

(11) *Es gilt*

$$\delta_n(t(A), t(B)) \leq \delta_n(A, B).$$

Sind C *und* D *Teilmengen von* F *mit* C $<$ D *und ist* t *stetig, dann gilt*

$$\gamma_n(t^{-1}(C), t^{-1}(D)) \leq \gamma_n(C, D)$$

Beweis: Aus $A \subset \delta B + L$ folgt $t(A) \subset \delta t(B) + t(L)$. Weil $d(t(L)) \leq d(L)$ ist, gilt $\delta_n(t(A), t(B)) \leq \delta_n(A, B)$. Gilt $C \cap M \subset \delta D$ für eine Zahl $\delta \geq 0$ und für einen Teilraum M von F, dann gilt auch $t^{-1}(C) \cap t^{-1}(M) \subset \delta t^{-1}(D)$. Weil t stetig ist, ist $t^{-1}(L)$ ein abgeschlossener Teilraum von E mit $c(t^{-1}(L)) \leq c(L)$.

2. Durchmesser und Schnitt beschränkter Teilmengen in normierten Räumen

Ist E ein normierter Raum mit der abgeschlossenen Einheitskugel U und ist A eine beschränkte Teilmenge von E, dann sind $\gamma_n(A, U)$ und $\delta_n(A, U)$ wohl definiert. Wir schreiben $\gamma_n(A)$ bzw. $\delta_n(A)$ statt $\gamma_n(A, U)$ bzw. $\delta_n(A, U)$.

Das wichtigste Ergebnis in diesem Abschnitt ist (1), das für den Durchmesser von Tichomirow stammt. Dazu brauchen wir folgendes Lemma, das wir hier ohne Beweis erwähnen.

Lemma: L und M seien Teilräume des normierten Raumes E mit $d(L) > d(M)$. Es gibt dann ein x aus L *mit*

$$||x|| = \inf_{y \in M} ||x - y|| = 1$$

Der Beweis steht in Krasnoselski, Krein und Milman (1).

(1) A *sei eine beschränkte Teilmenge von* E *und* L *sei ein* $(n+1)$ *-dimensionaler Teilraum von* E. *Aus der Ungleichung*

$$\alpha (U \cap L) \subset A \quad \alpha \geq 0$$

folgt dann $\gamma_n (A) \geq \alpha$ und $\delta_n (A) \geq \alpha$.

Beweis: Der Fall $\alpha = 0$ ist trivial. Wir nehmen an, dass für eine Zahl $\alpha > 0$ und einen $(n+1)$ -dimensionalen Teilraum L

$$\alpha (U \cap L) \subset A$$

gilt.

Wäre $\gamma_n (A) < \beta$ für eine Zahl β mit $0 \leq \beta < \alpha$, dann gäbe es einen abgeschlossenen Teilraum M mit $c(M) \leq n$ und $A \cap M \subset \beta U$. Aus unserer Annahme hätte man dann

$$U \cap L \cap M \subset \alpha^{-1} \beta U.$$

$L \cap M \neq (0)$, weil $d(L) = n+1$ ist. Daher gibt es ein $x \in L \cap M$ mit $\| x \| = 1$. Da $\alpha^{-1} \beta < 1$ ist, ist dies aber ein Widerspruch und daher gilt $\gamma_n (A) \geq \alpha$.

Wäre $\delta_n (A) < \beta$ für eine Zahl β mit $0 \leq \beta < \alpha$, dann gäbe es einen Teilraum M mit $A \subset \beta U + M$ und $d(M) \leq n$. Nach unserer Annahme würde dann

$$(*) \qquad U \cap L \subset \alpha^{-1} \beta U + M$$

gelten. Nach unserem Lemma gibt es ein $x \in U \cap L$ mit

$$\| x \| = 1 = \inf_{y \in M} \| x - y \|$$

und nach (*) aber gäbe es ein $y \in M$ mit $\| x - y \| \leq \alpha^{-1} \beta < 1$.

Aus dem aufgetretenen Widerspruch folgt die Behauptung.

(2) *Eine beschränkte Teilmenge* A *eines normierten Raumes* E *liegt genau dann in einem höchstens n-dimensionalen Teilraum, wenn* $\delta_n (A) = 0$.

Beweis: Ist A enthalten in einem Teilraum L, dann gilt $\delta(A, U; L) = 0$. Wenn dieser Teilraum L von der Dimension n ist, dann hat man $\delta_n(A) = 0$.

Sei $B = \Gamma A$ und sei $d(E(B)) > n$. Der Raum $E(B)$ besitzt einen Teilraum L der Dimension $n + 1$ und die Topologie induziert auf L durch E ist äquivalent zu der Topologie induziert durch B, da L endlich dimensional ist. Daher gibt es eine Zahl $\alpha > 0$ mit

$$U \cap L \subset \alpha B$$

Aus (1) folgt dann die Ungleichung

$$\delta_n(B) \geq \alpha^{-1} > 0$$

und nach 1. (5) $\delta_n(B) = \delta_n(A)$.

Wenn eine beschränkte Teilmenge A von E in einem höchstens n-dimensionalen Teilraum enthalten ist, dann gilt wieder $\gamma_n(A) = 0$. Ist umgekehrt $\gamma_n(A) = 0$, dann folgt i.a. nicht, dass A in einem n-dimensionalen Teilraum enthalten ist, wie das Beispiel nach 1.(6) zeigt. Dies ist richtig, wenn A auch absolutkonvex ist.

(3) *Für die mit einer absteigenden Folge positiver Zahlen* (α_n) *gebildete beschränkte Teilmenge*

$$B = \{(\xi_n) : (\sum_0^\infty |\alpha_n^{-1} \xi_n|^p)^{1/p} \leq 1\}$$

von l^p, $1 \leq p < \infty$, *gelten die Identitäten* $\delta_n(B) = \gamma_n(B) = \alpha_n$

Beweis: Wir betrachten die Teilräume

$$L_s = \{(\xi_n) : \quad \xi_n = 0 \quad n \geq s\}$$

$$M_s = \{(\xi_n) : \quad \xi_n = 0 \quad n < s\}$$

von l^p. Dann gelten

$$B \subset \alpha_s U + L_s$$

$$B \cap M_s \subset \alpha_s U$$

wo U die abgeschlossene Einheitskugel von l^p ist. Folglich hat man $\delta_s(B) \leq \alpha_s$ und $\gamma_s(B) \leq \alpha_s$.

Sei $(\xi_n) \in \alpha_s (U \cap L_{s+1})$. Dann gilt

$$(\sum_0^\infty |\alpha_n^{-1} \xi_n|^p)^{1/p} = (\sum_0^s |\alpha_n^{-1} \xi_n|^p)^{1/p} \leq \frac{(\sum^s |\xi_n|^p)^{1/p}}{\alpha_s} \leq 1$$

und daraus ergibt sich

$$\alpha_s (U \cap L_{s+1}) \subset B.$$

Aus (1) folgt nun $\delta_s(B) \geq \alpha_s$ und $\gamma_s(B) \geq \alpha_s$.

II. DIE DIAMETRALE DIMENSION

1. — Definitionen

Für einen Raum E bezeichnen wir mit $\Delta(E)$ die Gesamtheit aller Zahlenfolgen (ξ_n), die die folgende Eigenschaft haben:

Zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{A}(E)$ gibt es eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{A}(E)$, $V < U$, mit

$$\lim_{n\to\infty} |\xi_n| \, \delta_n(V, U) = 0.$$

Wir nennen $\Delta(E)$ die *Δ-diametrale Dimension* von E. Dieser Begriff stammt von Bessaga, Pelczynski und Rolewicz (1). Ganz analog bezeichnen wir mit $\Gamma(E)$ die Gesamtheit aller Zahlenfolgen (ξ_n), die die folgende Eigenschaft haben:

Zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{A}(E)$ gibt es eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{A}(E)$, $V < U$, mit

$$\lim_{n\to\infty} |\xi_n| \, \gamma_n(V, U) = 0$$

$\Gamma(E)$ wird die *Γ-diametrale Dimension* von E genannt.

Sei $\mathfrak{A}'(E)$ irgendeine Nullumgebungsbasis von E aus absolutkonvexen Nullumgebungen und $U' \in \mathfrak{A}'(E)$. Dann gibt es eine Nullumgebung $U \in \mathfrak{A}(E)$ mit $U \subset U'$. Ist $V \in \mathfrak{A}(E)$ mit $V < U$, dann sei $V' \in \mathfrak{A}(E)$ mit $V' \subset V$. Es gilt

$$\delta_n(V', U') \leq \delta_n(V, U)$$

Konvergiert $(\xi_n, \delta_n (V, U))$ gegen Null, dann konvergiert auch $(\xi_n \delta_n (V', U'))$ gegen Null. Widerholt man dieselb Betrachtung mit $\mathfrak{A}' (E)$ und $\mathfrak{A} (E)$ vertauscht, sieht man leicht, dass $\Delta (E)$ von der Wahl der Nullumgebungsbasis unabhängig ist.

Genauso zeigt man, dass auch die Γ-diametrale Dimension von der Wahl der Nullumgebungsbasis unabhängig ist.

Man erwartet von einem Dimensionsbegriff dass er invariant gegenüber Isomorphismen ist, was wir nun zeigen.

(1) *Ist der Raum E topologisch isomorph zu F, dann gelten*

$$\Delta (E) = \Delta (F)$$

$$\Gamma (E) = \Gamma (F)$$

Beweis: $i : E \to F$ sei der topologische Isomorphismus. Dann bildet i^{-1} F in E ab; diese Abbildung ist auch stetig. Die Menge

$$\{ i (U) : U \in \mathfrak{A} (E) \}$$

ist eine Nullumgebungsbasis in F. Nach I, 1, (11) besteht die Ungleichung

$$\delta_n (V, U) \leq \delta_n (i (V), i (U)) \leq \delta_n (V, U)$$

da $V = i^{-1} i (V)$ ist. Daher hat man

$$\delta_n (V, U) = \delta_n (i (V), i (U))$$

und genauso ergibt sich die Gleichung

$$\gamma_n (V, U) = \gamma_n (i (V), i (U))$$

Daraus folgen die Behauptungen unmittelbar.

ω sei die Menge aller Zahlfolgen. Konvergiert die Folge (ξ_n) gegen Null, dann konvergieren die Folgen $(\xi_n \delta_n (U, U))$ auch gegen Null, wo U irgendeine Nullumgebung von E ist.

(2) $\Delta (E)$ *und* $\Gamma (E)$ *sind normale Folgenräume mit* $c_0 \subset \Delta (E) \subset \omega$ und $c_0 \subset \Gamma (E) \subset \omega$.

Beweis: Wir brauchen nur zu zeigen dass $\Delta(E)$ und $\Gamma(E)$ normale Teilräume von ω sind.

(a_n) und (b_n) seien Folgen aus $\Delta(E)$. Zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{A}(E)$ kann man Nullumgebungen V_1, V_2 aus $\mathfrak{A}(E)$ finden, so dass

$$\lim |a_n| \delta_n(V_1, U) = 0, \lim |b_n| \delta_n(V_2, U) = 0.$$

V sei irgendeine Nullumgebung aus $\mathfrak{A}(E)$ mit $V \subset V_1 \cap V_2$. Nach I, 1, (4) gilt

$$\delta_n(V, U) \leq \min \{\delta_n(V_1, U), \delta_n(V_2, U)\}$$

Aus der Ungleichung

$$|a_n + b_n| \delta_n(V, U) \leq |a_n| \delta_n(V, U) + |b_n| \delta_n(V, U)$$

folgt dass $(a_n) + (b_n)$ zu $\Delta(E)$ gehört.

Ist (a_n) eine Folge aus $\Delta(E)$, dann gehört auch (λa_n) zu $\Delta(E)$ für eine Zahl λ.

Wir haben jetzt gezeigt dass $\Delta(E)$ ein Teilraum von ω ist. $\Delta(E)$ ist auch normal; denn wenn (a_n) aus $\Delta(E)$ ist, dann gehört jede Folge (b_n) mit $|b_n| \leq |a_n|$ zu $\Delta(E)$, was unmittelbar aus der Definition von $\Delta(E)$ folgt. Der Beweis für $\Gamma(E)$ läuft genau wie der Beweis für $\Delta(E)$.

(3) *$< E_1, E_2 >$ sei ein Dualsystem. Dann gilt.*

$$\Delta(E_1[T_s]) = \Gamma(E_1[T_s]) = \omega.$$

Beweis: Die Mengen

$\varepsilon U = \{x : |< u_i, x >| \leq \varepsilon\ i = 1, \ldots, s,\ u_i \in E_2,\ \varepsilon > 0\}$ u_i linear unabhängig, bilden eine Nullumgebungsbasis der schwachen Topologie T_s. Der Kern $N(U)$ von p_u hat Codimension s und er ist ein abgeschlossener Teilraum. L sei ein Komplementärraum zu $N(U)$. Dann bestehen die Ungleichungen

$$U \subset N(U) + L \subset \delta U + L$$

$$U \cap N(U) \subset \delta \mathbf{U}$$

für jede Zahl $\delta > 0$. Daher sind die Folgen $(\delta_n(U, U))$, $(\gamma_n(U, U))$ gleich Null ab $n = s$. Für irgendeine Folge (ξ_n) konvergieren $(\xi_n \, \delta_n(U, U))$, $(\xi_n \, \gamma_n(U, U))$ gegen Null.

2) *Permanenzeigenschaften.*

Eine lineare Abbildung t von E in F heisst *fast offen,* wenn für jede Nullumgebung U von E, $\overline{t(U)}$ eine Nullumgebung von F ist. Jede stetige lineare Abbildung auf einen tonnelierten Raum ist stets fast offen.

(1) *Gibt es eine stetige, fast offene lineare Abbildung* t *von* E *in* F, *dann gilt*

$$\Delta(E) \subset \Delta(F).$$

Beweis: Sei $(\xi_n) \in \Delta(E)$ und $U' \in \mathfrak{A}(F)$. Dann ist $U = t^{-1}(U')$ eine Nullumgebung aus $\mathfrak{A}(E)$. Es gibt eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{A}(E)$ mit $V < U$ und

$$\lim_{n \to \infty} \xi_n \, \delta_n(V, U) = 0.$$

Man hat $\delta_n(t(V), t(U)) \leq \delta_n(V, U)$ nach I, 1, (11). Weil $t(U)$ in U' enthalten ist, besteht die Ungleichung

$$\delta_n(t(V), U') \leq \delta_n(V, U)$$

U' absorbiert $\overline{t(V)}$, weil U' abgeschlossen ist. Ausserdem ist die Halbnorm $p_{u'}$. stetig. Daher folgt aus I, 1, (9)

$$\delta_n(V', U') = \delta_n(t(V), U') \leq \delta_n(V, U)$$

wo $V' = \overline{t(V)}$ eine Nullumgebung aus $\mathfrak{A}(F)$ ist. Die Folge $(\xi_n \, \delta_n(V', U'))$ konvergiert gegen Null und daher liegt (ξ_n) in $\Delta(F)$.

Unmittelbar aus (1) haben wir

(2) *Gibt es eine stetige lineare Abbildung von* E *auf einen tonnelierten Raum* F, *dann gilt*

$$\Delta(E) \subset \Delta(F).$$

F sei ein abgeschlossener Teilraum von E. Die kanonische Abbildung von E auf den Quotientenraum E/F ist stetig und offen. Aus (1) folgt daher

$$(3) \qquad \Delta(E) \subset \Delta(E/F).$$

(4) *Für* $E = \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$ *und* $F = \bigoplus_{\alpha \in A} F_\alpha$ *gelten*

$$\Delta(E) \subset \bigcap_{\alpha \in A} \Delta(E_\alpha)$$

$$\Delta(F) \subset \bigcap_{\alpha \in A} \Delta(F_\alpha)$$

Beweis: Für jedes $\alpha \in A$ sind die Projektionen $P_\alpha : E \to E_\alpha$, $Q_\alpha : F \to F_\alpha$ stetig und offen. Aus (1) folgt daher die Behauptung.

Ist F ein Teilraum von E, der einen Komplementärraum besitzt, dann folgt aus (4) die Ungleichung

$$(5) \qquad \Delta(E) \subset \Delta(F)$$

Die Frage ob diese Ungleichung für jeden Teilraum gilt, ist noch offen.

$\tilde{E}$ sei die vollständige Hülle von E. Für Nullumgebungen V, U aus $\mathfrak{A}(E)$ mit $V < U$ seien $\tilde{V}$, $\tilde{U}$ die abgeschlossenen Hüllen in $\tilde{E}$. Dann gilt

$$(6) \qquad \delta_n(V, U) = \delta_n(\tilde{V}, \tilde{U})$$

Beweis: Nach I, 1, (9) besteht

$$\delta_n(\tilde{V}, \tilde{U}) = \delta_n(V, \tilde{U}) \leq \delta_n(V, U)$$

Man kann zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ Punkte $z_1 \dots z_n$ aus $\tilde{E}$ finden, so dass

$$V \subset \left(\delta_n(V, U) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \tilde{U} + \Gamma\{z_1 \dots z_n\}$$

gilt. Wenn man zu jedem z_i einen Punkt x_i aus E mit $x_i - z_i \in \dfrac{\varepsilon\, \tilde{U}}{2^n}$ wählt, dann hat man

$$\Gamma\{z_1 \dots z_n\} \subset \Gamma\{x_1 \dots x_n\} + \frac{\varepsilon}{2} \tilde{U}$$

und daraus ergibt sich

$$V \subset (\delta_n(V, \widetilde{U}) + \varepsilon)\ \widetilde{U} + \Gamma\{x_1 \dots x_n\}$$

Es gibt daher zu jedem $x \in V$ ein $y \in \Gamma\ \{x_1 \dots x_n\}$ mit

$$p_{\tilde{u}}(x - y) \leq (\delta_n(V, U) + \varepsilon)$$

Da $(x - y)$ ein Punkt von E ist, gilt $p_u(x - y) = p_{\tilde{u}}(x - y)$ und daraus folgt

$$V \subset (\delta_n(V, \widetilde{U}) + \varepsilon)\ U + \Gamma\{x_1 \dots x_n\}$$

Im Limes erhält man die Ungleichung

$$\delta_n(V, U) \leq \delta_n(V, \widetilde{U})$$

Weil die Mengen $\widetilde{U}$ eine Nullumgebungsbasis von $\widetilde{E}$ bilden, haben wir

$$(7) \qquad \Delta(E) = \Delta(\widetilde{E}).$$

Wir untersuchen jetzt die Permanenzeigenschaften der Γ-Dimension. Wir haben den Schnitt als Dualbegriff zum Durchmesser eingeführt und daraus die Γ-diametrale Dimension abgeleitet. Um diese Dualität klar zu machen, brauchen wir zuerst ein Lemma.

LEMMA: $< E_1, E_2 >$ sei ein Dualsystem. A bzw. L sei eine absolutkonvexe Teilmenge bzw. ein Teilraum von E_1. Dann gilt

$$(A + L)^0 = A^0 \cap L^\perp$$

Wenn zusätzlich A und L, $T_s(E_2)$-abgeschlossen sind, dann gilt

$$(A \cap L)^0 = (\overline{A^0 + L^\perp})$$

Beweis: Sei $u \in (A + L)^0$ und x sei aus A oder aus L. Dann liegt $x = x + 0$ in $A + L$ und daher gilt $| < u, x > | \leq 1$. Also $(A + L)^0 \subset A^0 \cap L^\perp$

Sei $u \in A^0 \cap L^\perp$. Für $x \in A$, $y \in L$ haben wir

$$| < u\ x + y > | \leq | < u, x > | + | < u, y > | \leq 1$$

Daher gilt $A^0 \cap L^\perp \subset (A + L)^0$.

Sind A und L abgeschlossen, dann haben wir $A = A^{00}$ und $L = L^{\perp\perp}$ nach Bipolarensatz. Aus dem ersten Teil folgt daher

$$(A \cap L)^0 = (A^{00} \cap L^{\perp\perp})^0 = (A^0 + L^\perp)^{00}$$

und $(A^0 + L^\perp)^{00} = (\overline{A^0 + L^\perp})$ nach dem Bipolarensatz.

(8) *Für absolutkonvexe abgeschlossene Teilmengen* A *und* B *von* E *mit* A < B *gilt*

$$\gamma_n (A, B) \leq \delta_n (B^0, A^0)$$

Beweis: Sei $B^0 \subset \delta A^0 + L$ für einen Teilraum L von E mit $d(L) \leq n$. Nach unserem Lemma haben wir

$$A \cap L^\perp \subset \delta B$$

$L^\perp$ ist abgeschlossen und $c(L^\perp) \leq n$. Daher gilt

$$\gamma_n (A, B) \leq \delta_n (B^0, A^0).$$

(9) A *und* B *seien absolutkonvexe Teilmengen von* E *mit* A < B. A^0 *sei* T_s (E)*-kompakt. Dann gilt*

$$\gamma_n (A, B) = \delta_n (B^0, A^0)$$

Beweis: Aus (8) haben wir $\gamma_n (A, B) \leq \delta_n (B^0, A^0)$. Sei $A \cap L \subset \delta B$ für einen abgeschlossenen Teilraum L von E mit $c(L) \leq n$. Durch Polarenbildung erhalten wir nach unserem Lemma

$$B^0 \subset \delta (\overline{A^0 + L^\perp})$$

Weil A^0, $T_s(E)$-kompakt ist, ist die Summe $A^0 + L^\perp$ abgeschlossen und $d(L^\perp) \leq n$. Daher gilt

$$B^0 \subset \delta A^0 + L^\perp$$

und wir haben $\delta_n (B^0, A^0) \leq \gamma_n (A, B)$.

Sind V, U Nullumgebungen aus $\mathfrak{U}(E)$, dann gilt nach (9)

(10) $$\gamma_n(V, U) = \delta_n(U^0, V^0)$$

weil V^0 nach dem Satz von ALAOGLU-BOURBAKI schwach kompakt ist.

Ist $\widetilde{E}$ die vollständige Hülle von E, dann ist sein dualer Raum wieder E' und die Polare von $\widetilde{U}$ ist wieder U^0. Nach (10) besteht die Identität

$$\gamma_n(V, U) = \delta_n(U^0, V^0) = \gamma_n(\widetilde{V}, \widetilde{U})$$

für Nullumgebungen V, U aus $\mathfrak{A}(E)$. Daraus folgt unmittelbar

(11) $$\Gamma(E) = \Gamma(\widetilde{E})$$

(12) *Für einen Teilraum* F *von* E *gilt*

$$\Gamma(E) \subset \Gamma(F)$$

Beweis: Die Mengen $U \cap F$, $U \in \mathfrak{A}(E)$, bilden eine Nullumgebungsbasis der induzierten Topologie auf F. Es gelte

$$V \cap L \subset \delta U$$

für V, $U \in \mathfrak{A}(E)$ und einen Teilraum L von E mit $c(L) \leq n$. Nach Köthe (1), 7, 6. (5) gibt es einen Teilraum H von E, der algebraisch komplementär zu L ist, mit

$$F = (H \cap F) \oplus (L \cap F),$$

Die Dimension von $H \cap F$ ist gleich der Codimension von $L \cap F$ in F und daher $c(L \cap F) \leq d(H) = c(L) \leq n$. Nach unserer Annahme gilt

$$(V \cap F) \cap (L \cap F) \subset \delta(U \cap F)$$

Damit haben wir die Ungleichung

$$\gamma_n(V \cap F, U \cap F) \leq \gamma_n(V, U)$$

bewiesen. Daraus ergibt sich die Behauptung.

(13) *E_n'' sei der biduale Raum von E mit der natürlichen Topologie. Dann gilt*

$$\Gamma(E) = \Gamma(E_n'')$$

Beweis: Die Mengen U^{00}, $U \in \mathfrak{A}(E)$, bilden eine Nullumgebungsbasis der natürlichen Topologie auf E''.

Es gelte $U^0 \subset \delta V^0 + L$ für eine Zahl $\delta > 0$ und für einen Teilraum L von E' mit $d(L) \leq n$. Durch Polarenbildung in E'' erhalten wir nach unserem Lemma

$$V^{00} \cap L^{\perp} \subset \delta U^{00}.$$

Damit haben wir

$$\gamma_n(V^{00}, U^{00}) \leq \delta_n(U^0, V^0)$$

und weil nach (10) $\delta_n(U^0, V^0) = \gamma_n(V, U)$ gilt, ist $\Gamma(E)$ enthalten in $\Gamma(E_n'')$. Anderseits kann man E als Teilraum von E_n'' betrachten. Dann gilt $\Gamma(E_n'') \subset \Gamma(E)$ nach (12).

Wenn man diese Ergebnisse vergleicht, sieht man leicht dass auch die Permanenzeigenschaften dieser Dimensionen einigermassen dual zueinander sind. Es fehlen noch allgemeine Beziehungen wie die zwischen $\Delta(E)$ und $\Delta(F)$ oder zwischen $\Gamma(E)$ und $\Gamma(E/F)$, wenn F irgendein Teilraum von E ist. Gagegen sind $\Delta(E) \subset \Delta(E/F)$ und $\Gamma(E) \subset \Gamma(F)$ einfache Folgerungen.

3) *Der Zusammenhang zwischen Δ und Γ.*

Für eine Nullumgebung $U \in \mathfrak{A}(E)$ bezeichnen wir mit E_u den normierten Raum $E/N(U)$, mit Norm $\|x(U)\| = p_u(x)$. Der duale zu E_u ist der normierte Raum $E'(U^0)$. Mit K_u bezeichnen wir die stetige kanonische Abbildung von E auf E_u. Ist V eine andere Nullumgebung aus $\mathfrak{A}(E)$ mit $V < U$, dann schreiben wir K_u^v für die stetige kanonische Abbildung von E_v auf E_u. Es gilt $K_u = K_u^v K_v$. Für eine Teilmenge A von E schreiben wir $K_u(A) = A(U)$.

U und V seien Nullumgebungen aus $\mathfrak{A}(E)$ mit $V < U$. Wir zeigen zuerst, dass man die Durchmesser und die Schnitte von V bezüglich U in normierten Räumen berechnen kann.

(1) *δ_n (U^0, V^0) ist gleich dem n-ten Durchmesser der beschränkten Teilmenge U^0 von E' (V^0), d.h. δ_n (U^0).*

Der Beweis folgt unmittelbar aus I, 1, (7). Wir haben schon $\delta_n (U^0, V^0) = \gamma_n (V, U)$ gezeigt.

(2) $$\delta_n (V, U) = \delta_n (V (U))$$

Beweis: Nach I, 1,(11) gilt

$$\delta_n (V (U)) \leq \delta_n (V, U).$$

Es gelte

$$V (U) \subset \delta U (U) + L$$

für einen Teilraum L von E_u mit $d(L) \leq n$. Bilden $x_1 (U) \ldots x_k (U)$ eine algebraische Basis von L, dann sei M die lineare Hülle von $x_1 \ldots x_k$ in E. Aus unserer Annahme folgt dann

$$V \subset \delta U + N (U) + M = \delta U + M$$

und daher gilt

$$\delta_n (V, U) \leq \delta_n (V (U))$$

Wir geben folgendes Lemma ohne Beweis.

LEMMA: (Auerbach). Ist L ein n-dimensionaler Teilraum eines normierten Raumes E, dann gibt es eine Projektion P auf L mit $|| P || \leq n$.

Ein lokalkonvexer Raum E heisst ein *verallgemeinerter Hilbert Raum*, wenn man die Topologie von E durch skalare Produkte $(,)_\alpha$ erklären kann, so dass die Mengen U,

$$U_\alpha = \{ x : | (x, x)_\alpha |^{1/2} \leq 1 \}$$

eine Nullumgebungsbasis $\mathfrak{A}_h (E)$ bilden. In diesem Fall ist E_{u_α} ein prähilbertischer Raum.

Insbesondere ist jeder nukleare Raum ein verallgemeinerter Hilbert Raum.

(3) V *und* U *seien Nullumgebungen aus* $\mathfrak{A}(E)$ *mit* V < U. *Dann besteht die Ungleichung*

$$\frac{1}{n+1}\,\gamma_n(V,\ U) \leq \delta_n(V,\ U) \leq (n+1)\ \gamma_n(V,\ U)$$

Ist E *ein verallgemeinerter Hilbert Raum und sind* V, U *aus* $\mathfrak{A}_h(\mathrm{E})$, *dann gilt*

$$\delta_n(V,\ U) = \gamma_n(V,\ U).$$

Beweis: Sei $\delta_n(V,\ U) < \delta$. Nach (2) gibt es einen Teilraum $L(U)$ von E_u mit $d(L(U)) \leq n$ und es gilt

$$\text{(i)}\qquad V(U) \subset \delta\, U(U) + L(U).$$

P sei die in dem Lemma angegebene Projektion auf $L(U)$. M sei der Nullraum von P, und Q sei die Projektion I-P auf M. Dann ist $\|Q\| \leq n+1$ und $c(M) \leq n$. Es gilt nach (i)

$$V(U) \cap M \subset Q(V(U)) \subset \delta(\|Q\| + \varepsilon)\, U(U)$$

für jedes $\varepsilon > 0$.

Weil $K_u(V \cap K_u^{-1}(M)) = V(U) \cap M$ gilt, bekommt mann

$$V \cap K^{-1}(M) \subset \delta(n+1+\varepsilon)\, U + N(U) = \delta(n+1+\varepsilon)\, U$$

Die Codimension von $K_u^{-1}(M)$ in E ist kleiner oder gleich als die Codimension von M in E_u und $K_u^{-1}(M)$ ist abgeschlossen, da M als der Nullraum der stetigen Projektion P abgeschlossen ist. Daher gilt im Limes

$$\gamma_n(V,\ U) \leq \delta(n+1)$$

für jedes δ mit $\delta_n(V,\ U) < \delta$, und so ergibt sich die Ungleichung

$$\gamma_n(V,\ U) \leq (n+1)\ \delta_n(V,\ U).$$

Ist E ein verallgemeinerter Hilbert Raum und sind U und V aus $\mathfrak{A}_h(E)$, dann gibt es eine orthogonale Projektion P auf den endlich-dimensionalen Teilraum $L(U)$ des prähilbertischen Raumes E_u. Dann hat die komplementäre Projektion Q die Norm 1. Daher gilt in diesem Fall

$$\gamma_n(V, U) \leq \delta_n(V, U).$$

Sei $\delta_n(U^0, V^0) = \gamma_n(V, U) < \delta$. Nach (1) gibt es einen Teilraum L von $E'(V^0)$ mit

(ii) $$U^0 \subset \delta V^0 + L$$

und $d(L) \leq n$. P sei die in Lemma angegebene Projektion von $E'(V^0)$ auf L. Q sei die zu P komplementäre Projektion. Dann gilt $\|Q\| = \|I - P\| \leq (n+1)$.

Wenn E ein verallgemeinerter Hilbert Raum ist, wählt man P als die orthogonale Projektion von dem Hilbert Raum $E'(V^0)$ auf L, und Q sei dann die Projektion auf $L^\perp$ wo $L \oplus L^\perp = E'(V^0)$ ist. Dann ist $\|Q\| = 1$.

Nach (ii) gilt für jedes $\varepsilon > 0$

(iii) $$U^0 \cap M \subset Q(U^0) \subset \delta(\|Q\| + \varepsilon) V^0$$

wo der Teilraum $M = Q(E'(V^0))$ als Kern der Projektion P abgeschlossen ist. Die Abbildung K_v ist stetig. Die adjungierte Abbildung zu K_v ist die Einbettung von $E'(V^0)$ in E'. Es gilt

$$[U(V)]^0 = K_v(U)^0 = K_v^{-1}(U^0) = U^0 \cap E'(V^0) = U^0$$

Unter Verwendung von II, 2, Lemma erhalten wir aus (iii) die Aussage

$$V(V) \subset \delta(\|Q\| + \varepsilon)\ (\overline{U(V) + M^\perp})$$

Weil $V(V)$ die Einheitskugel von E_v ist, gilt

$$V(V) \subset \delta(\|Q\| + \varepsilon)\ (U(V) + M^\perp + \varepsilon V(V))$$

Ist δ_0 eine Zahl für die $V \subset \delta_0 U$ gilt, dann hat man

(iv) $$V(V) \subset \delta(\|Q\| + \varepsilon)\ (\delta_0 \varepsilon + 1)\ U(V) + M^\perp$$

Sei $x_1(V) \dots x_k(V)$ eine allgebraische Basis von $M^\perp$. Sei L die lineare Hülle von $x_1 \dots x_k$ in E. Aus (iv) folgt dann

$$V \subset \delta\,(\|Q\| + \varepsilon)\;(\delta_0\,\varepsilon + 1)\;U + L$$

Weil $d(L) = d(M^\perp) \leq n$ ist, gilt

$$\delta_n(V,\;U) \leq \delta\,(n + 1 + \varepsilon)\,(\delta_0\,\varepsilon + 1)$$

Durch Grenzübergang ergibt sich die Ungleichung

$$\delta_n(V,\;U) \leq (n + 1)\;\delta_n(U^0,\;V^0)$$

Wenn E ein verallgemeinerter Hilbert Raum ist, wählt man P als die orthogonale Projektion des Hilbert Raumes $E'(V^0)$ auf L, und Q sei dann die Projektion auf $L^\perp$, wo $L \oplus L^\perp = E'(V^0)$ ist. Dann ist $\|Q\| = 1$.

Mit denselben Betrachtungen erhält man in diesem Fall die Ungleichung

$$\delta_n(V,\;U) \leqq \delta_n(U^0,\;V^0)$$

Wir erhalten aus (3) die folgenden Ergebnisse:

(4) *Ist* (ξ_n) *eine Folge aus* Δ (E), *dann gehört die Folge* $\left(\dfrac{1}{n+1}\,\xi_n\right)$ *zu* Γ (E).

Ist (ξ_n) *eine Folge auss* Γ (E), *dann gehört die Folge* $\left(\dfrac{1}{n+1}\,\xi_n\right)$ zu Δ (E).

(5) *Für einen verallgemeinerten Hilbert Raum* E *gilt*

$$\Delta(E) = \Gamma(E).$$

4) *Charakterisierung von* SCHWARTZ- *und von nuklearen Räumen.*

Ein Raum E heisst ein SCHWARTZ RAUM, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{A}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{A}(E)$ mit $V < U$ gibt, so dass die Abbildung K_u^v präkompakt ist.

(1) K_u^v *ist genau dann präkompakt, wenn die Folge* $(\delta_n(V,\,U))$ *gegen Null konvergiert.*

Beweis: K_u^v ist genau dann präkompakt, wenn $V(U)$ eine präkompakte Teilmenge von E_u ist, denn $V(U)$ ist das Bild der Einheitskugel $V(V)$ von E_v.

Nach I, 1, (8) ist die beschränkte Teilmenge $V(U)$ genau dann präkompakt, wenn die Folge $(\delta_n(V(U)))$ gegen Null konvergiert. Es gilt aber nach 3, (2) $\delta_n(V, U) = \delta_n(V(U))$.

(2) *Die Abbildung K_u^u ist genau dann präkompakt, wenn die Folge $(\gamma_n(V, U))$ gegen Null konvergiert.*

Beweis: Die Abbildung K_u^v ist genau dann präkompakt, wenn die adjungierte Einbettung von dem Banach Raum $E'(U^0)$ in $E'(V^0)$ kompakt ist. Nach I, 1, (8) ist die Teilmenge U^0 von $E'(V^0)$ genau dann präkompakt, wenn $\delta_n(U^0)$ gegen Null konvergiert, und aus (1) und aus 2, (10) erhält man

$$\delta_n(U^0) = \gamma_n(V, U) = \gamma_n(V, U)$$

Wir charakterisieren jetzt SCHWARTZ Räume bezüglich beider Dimensionen.

(3) *Für einen Raum E sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(*a*) E *ist ein* SCHWARTZ Raum,

(*b*) $l^\infty \subset \Delta(E)$,

(*c*) $c_0 \neq \Delta(E)$,

(*d*) $l^\infty \subset \Gamma(E)$,

(*e*) $c_0 \neq \Gamma(E)$.

Beweis: $(a) \Rightarrow (b)$: Ist E ein SCHWARTZ Raum, dann gehört die Folge $(1, 1, \ldots)$ zu $\Delta(E)$ nach (1). Weil $\Delta(E)$ ein Folgenraum ist, liegt damit jede beschränkte Folge in $\Delta(E)$.

$(b) \Rightarrow (c)$ und $(d) \Rightarrow (e)$ sind trivial. $(a) \Rightarrow (d)$ ist genau wie $(a) \Rightarrow (b)$.

$(c) \Rightarrow (a)$: Sei (ξ_n) eine Folge aus $\Delta(E)$ die nicht gegen Null konvergiert. Es gibt dann eine Teilfolge (ξ_{k_n}) von (ξ_n) mit

$$\inf |\xi_{k_n}| = \lambda > 0$$

Weil (ξ_n) aus $\Delta(E)$ ist, gibt es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{A}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{A}(E)$, $V < U$, so dass $(\xi_n\, \delta_n(V, U))$ gegen Null konvergiert. Aus der Ungleichung

$$\lambda\ \delta_{kn}(V, U) \leq |\xi_{k_n}|\, \delta_{k_n}(V, U)$$

folgt, dass $(\delta_{k_n}(V, U))$ gegen Null konvergiert. Weil $(\delta_n(V, U))$ eine absteigende Folge ist, konvergiert sie daher gegen Null und nach (1) ist E ein SCHWARTZ Raum.

$(e) \Rightarrow (a)$: Der Beweis läuft genauso wie $(c) \Rightarrow (a)$. Statt (1) benutzt man (2).

Mit (3) haben wir gezeigt, dass unsere Dimensionen nur für SCHWARTZ Räume interessant sein Können denn falls ein Raum kein SCHWARTZ Raum ist, ist seine Dimension stets gleich c_0.

Insbesondere haben wir:

(4) *Für einen unendlich dimensionalen normierten Raum* E *gilt*

$$\Delta(E) = \Gamma(E) = c_0.$$

Eine andere Folgerung aus (3) ist die Tatsache, dass es keinen Raum E mit $c_0 \subset \Delta(E) \subset l^\infty$ oder $c_0 \subset \Gamma(E) \subset l^\infty$ gibt, wobei die Inklusionen echt sind.

E und F seien zwei Hilberträume mit den abgeschlossenen Einheitskugeln U und V. Ist T eine kompakte lineare Abbildung von E in F, dann gibt es orthonormierte Systeme (e_n) bzw. (f_n) in E bzw. F und eine absteigende Folge positiver Zahlen (λ_n) aus c_0, so dass T die Form

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (x, e_n) f_n$$

besitzt. Rechnet man n-ten Durchmesser von $T(U)$ in F wie in I, 2, (3), dann bekommt man

$$\delta_n(T(U)) = \lambda_n \tag{5}$$

T sei eine stetige lineare Abbildung von dem normierten Raum E in den normierten Raum F. Die Abbildung T heisst *nuklear*, wenn es Elemente $u_n \in E'$, $y_n \in F$ mit $\Sigma \|u_n\| \|y_n\| < \infty$ existiert, so dass T die Form

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, x \rangle y_n \tag{6}$$

besitzt. Ist U die abgeschlossene Einheitskugel von E, dann folgt aus der Ungleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \, \delta_n (T(U)) < \infty$$

die Nuklearität von T. (Mitiagin (1) oder (2)).

Ein Raum E heisst *nuklear*, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathfrak{U}(E)$ eine Nullumgebung $V \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V < U$ gibt, so dass die Abbildung K_u^v nuklear ist. Weil die Adjungierte einer nuklearen Abbildung wieder nuklear ist, ist die Einbettung von $E'(U^0)$ in $E'(V^0)$ auch nuklear, wenn K_u^v nuklear ist.

Wir geben jetzt eine Charakterisierung nuklearer Räume, die für die Δ-Dimension von Mitiagin (1) stammt.

(7) *Für einen Raum* E *sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(a) E ist nuklear.

(b) $((n+1)^\alpha) \in \Delta(E)$ für jede Zahl $a > 0$.

(c) $((n+1)^\beta) \in \Delta(E)$ für eine Zahl $\beta > 0$.

(d) $((n+1)^\alpha) \in \Gamma(E)$ für jede Zahl $\alpha > 0$.

(e) $((n+1)^\beta) \in \Gamma(E)$ für eine Zahl $\beta > 0$.

Beweis: (c) $\Rightarrow$ (b): Zu jeder Zahl $\alpha > 0$ wählt man eine ganze Zahl N mit $N\beta \geq 2\alpha$. Sei $U_0 = U \in \mathfrak{U}(E)$. Nach Voraussetzung kann man $U_1 \ldots U_N$ aus $\mathfrak{U}(E)$ wählen, so dass

$$\delta_n (U_{k+1}, U_k) \leq \frac{1}{(n+1)^\beta}$$

gilt. Aus I, 1,(3), (d) erhält man

$$\delta_{Nn} (U_N, U) \leq \prod_{k=0}^{N-1} \delta_n (U_{k+1}, U_k) \leq \frac{1}{(n+1)^{N\beta}} \leq \frac{1}{(n+1)^{2\alpha}}$$

Für jede ganze Zahl $m \geq N$ wählt man $n \in N$ mit $Nn < (m+1) \leq \leq 2N\ (n+1)$ Es gilt dann

$$\delta_m (U_N, U) \leq \delta_{Nn} (U_N, U) \leq \frac{1}{(n+1)^{2\alpha}} \leq \left[\frac{2N}{m+1}\right]^{2\alpha}.$$

Man kann eine Nullumgebung $W \in \mathfrak{A}(E)$ finden, so dass für $i = 0,1 \ldots N$

$$\delta_i(W, U) \leq \frac{1}{(i+1)^{2\alpha}}$$

gilt. Sei $V = W \cap \frac{1}{(2N)^{2\alpha}} U$. Dann gilt für jedes n

$$(n+1)\,\delta_n(V, U) \leq \frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$$

und daraus folgt die Behauptung.

$(e) \Rightarrow (d)$: Genau wie $(c) \Rightarrow (b)$.

$(b) \Rightarrow (a)$: Nach Voraussetzung kann man zu jedem $U \in \mathfrak{A}(E)$ ein $V \in \mathfrak{A}(E)$ finden, so dass $\Sigma\,(n+1)^2\,\delta_n(V, U) < \infty$ gilt. Nach (6) ist K_n^v dann eine nukleare Abbildung und daher ist der Raum E nuklear.

$(d) \Rightarrow (a)$: Zu jedem U gibt es ein $V \in \mathfrak{A}(E)$, so dass für $n \in N$, $(n+1)^5\,\gamma_n(V, U) \leqq 1$ gilt. Aus II, 3 (4) folgt dann $\Sigma\,(n+1)^2\,\delta_n(V, U) \leq \Sigma \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1$ und danach ist K_n nuklear.

$(a) \Rightarrow (e)$ und $(a) \Rightarrow (c)$: Da jeder nukleare Raum ein verallgemeinerter Hilbert Raum ist, gilt $\Delta(E) = \Gamma(E)$ nach 3, (5). Man braucht daher nur $(a) \Rightarrow (e)$ zu beweisen.

Weil E nuklear ist, gibt es zu jedem $U \in \mathfrak{A}(E)$ ein $V \in \mathfrak{A}(E)$ mit $V < U$, so dass K_u^v eine nukleare Abbildung ist. Dann ist die kanonische Einbettung $E'(U^0) \to E'(V^0)$ auch nuklear. Man kann die Nullumgebungen V, U so wahlen, dass $E'(U^0)$ und $E'(V^0)$ Hilberträume sind. Nach (5) gilt $\delta_n(U^0) = \gamma_n(V, U) = \lambda_n$ und (λ_n) ist eine absteigende Folge aus l^1. Daher gilt $\Sigma\,\gamma_n(V, U) = K < \infty$. Aus der Ungleichung

$$(s+1)\;\gamma_s(V, U) \leq \sum_{n=0}^{s} \gamma_n\,(V, U) \leq K$$

folgt dann, dass die Folge $((n+1)^{1/2})$ in $\Gamma(E)$ liegt.

Durch Zusammenfassung der Ergebnisse von 3 und von diesem Paragraph kann man ohne jede Schwierigkeit einige Permanenzeigenschaften von SCHWARTZ- und nuklearen Räumen erhalten. Als Beispiel geben wir die folgenden Ergebnisse.

(8) *Es gebe eine stetige, fast offene, lineare Abbildung von* E *in* F. *Ist* E *ein* SCHWARTZ *Raum bzw. ein nuklearer Raum, so ist* F *ein* SCHWARTZ *Raum bzw. ein nuklearer Raum.*

Beweis: Nach 3, (2) gilt in diesem Fall $\Delta(E) \subset \Delta(F)$. Ist E ein SCHWARTZ Raum, dann gilt nach (3)

$$l^{\infty} \subset \Delta(E) \subset \Delta(F)$$

und aus demselben Satz folgt, dass F ein SCHWARTZ Raum ist.

Ist E nuklear, dann liegt die Folge $((n+1))$ in $\Delta(E)$ und damit in $\Delta(F)$. Aus (7) folgt daher die Nuklearität von F.

(9) *Ein Raum* E *ist genau dann ein* SCHWARTZ *Raum bzw. ein nuklearer Raum, wenn die vollständige Hülle* $\tilde{\mathrm{E}}$ *ein* SCHWARTZ *Raum bzw. ein nuklearer Raum ist.*

Der Beweis folgt aus (3) bzw. aus (7), weil nach 3, (7) $\Delta(\tilde{E}) = \Delta(E)$ gilt.

Nach 3, (13) gilt $\Gamma(E) = \Gamma(E_n'')$. Daraus erhält man unmittelbar den folgenden Satz.

(10) *Ein Raum* E *ist genau dann ein* SCHWARTZ Raum *bzw. ein nuklearer Raum, wenn der biduale Raum* E_n'' *ein* SCHWARTZ Raum *bzw ein nuklearer Raum ist.*

III. FOLGENRÄUME

1. — DEFINITIONEN

Wir erwähnen hier einige Definitionen und Ergebnisse aus der Theorie der Folgenräume, die man in KÖTHE (1) § 30 finden kann.

Eine Teilmenge P von ω heisst ein *Stufensystem,* wenn sie den folgenden Eigenschaften genügt:

(i) Jede Folge $\varrho = (\varrho_n) \in P$ ist positiv. (d.h. $\varrho_n \geq 0$ für $n \in N$).

(ii) Zu jeder Zahl $s \in R$ gibt es eine Folge $\varrho \in P$ mit $\varrho_s > 0$.

(iii) Zu endlich vielen Folgen $\varrho_1 \dots \varrho_k \in P$ existiert stets eine Folge $\varrho \in P$ mit

$$\varrho_n \geq \sup \{\varrho_{1n} \dots \varrho_{kn}\}$$

für alle $n \in N$.

Wenn P ein Stufensystem ist, ist die Gesamtheit aller Folgen $x = (x_n)$ mit

$$p_\varrho(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \varrho_n < \infty$$

für $\varrho \in P$ ein linearer Teilraum von ω, auf dem man aus den Halbnormen p_ϱ eine lokalkonvexe Topologie erzeugen kann. Wir bezeichnen diesen Raum mit $\lambda(P)$. Die Mengen

$$\varepsilon\, U_\varrho = \{(x_n) : \Sigma \,|x_n|\, \varrho_n \leq \varepsilon\}$$

bilden eine Nullumgebungsbasis in $\lambda(P)$.

Für eine Teilmenge M von ω bezeichnen wir mit M^n die *normale Hülle* von M. M^n besteht aus allen Folgen (y_n) mit $|y_n| \leq |x_n|$ $n \in N$, für eine geeignete Folge (x_n) aus M. Ist $M^n = M$, so heisst M normal. $\lambda(P)$ ist immer normal und $\lambda(P) \supset \varphi$, wo φ der Raum aller Folgen mit nur endlich vielen von Null verschiedenen Koordinaten bedeutet.

Zu jedem Teilraum μ von ω, mit $\mu \supset \varphi$, ordnet man seinen *α-dualen Raum* $\mu^\times$, definiert als die Menge aller Folgen $u = (u_n)$ deren skalare Produkte

$$< u, x > = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x_n$$

mit allen $x \in \mu$ absolut konvergieren. Man kann mit den Halbnormen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_n x_n|$$

$u \in \mu^\times$ eine lokalkonvexe Topologie auf μ einführen. Diese Topologie heisst die *normale Topologie*. Der Folgenraum $\mu^{\times\times}$ versehnen mit der normalen Topologie ist die vollständige Hülle von μ und $\mu^{\times\times}$ ist isomorph zu $\lambda(P_\mu{}^\times)$, wo $P_\mu{}^\times$ die Menge aller positiven Folgen von $\mu^\times$ ist. Daher gilt $\Delta(\mu) = \Delta(\lambda(P_{\mu\times}))$ und $\Gamma(\mu) = \Gamma(\lambda(P_{\mu\times}))$. Vom Standpunkt der diametralen Dimension kann man daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit nur die Folgenräume $\lambda(P)$ betrachten.

Ist $\lambda = \lambda(P)$, dann ist die normale Topologie auf λ im allgemeinen stärker als die von P erzeugte Topologie.

Für eine positive Folge ϱ bezeichnen wir mit λ_ϱ die Gesamtheit aller Folgen x mit $\Sigma\,|\,x_n\,|\,\varrho_n < \infty$, versehnen mit der normalen Topologie. Ist $\lambda = \lambda(P)$, dann gilt $\lambda(P) = \bigcap_{\varrho \in P} \lambda_\varrho$ und $\lambda(P)$ ist der lokalkonvexe Kern $K\,I_\varrho^{-1}(\lambda_\varrho)$, wenn I_ϱ die Einbettung von λ in λ_ϱ ist. Nach einem Satz über lokalkonvexe Kerne (KÖTHE (1) 22.6 (3)) ist λ' gleich der Hülle $\sum_{\varrho \in P} \lambda_\varrho{}^\times$.

Der *s-te Abschnitt* einer Folge $x = (x_n)$ ist die Folge $x^s = (x'_n)$, $x'_n = x_n$ für $0 \leq n < s$ und $x_n = 0$ für $n \geq s$.

2. *Die diametrale Dimension der Folgenräme.*

P sei ein Stufensystem und $\lambda = \lambda(P)$. v und u seien aus P mit $v \geq u$. Mit (α_n) bezeichnen wir die Folge

$$\alpha_n = \begin{cases} u_n/v_n, & v_n \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und wir schreiben $u_n = 0\,(v_n)$ wenn die Folge (α_n) gegen Null konvergiert.

(1) *Es gelten*

$$\delta_s(U_v, U_u) \leq \sup_{n \geq s} \alpha_n$$

$$\gamma_s(U_v, U_u) \leq \sup_{n \geq s} \alpha_n$$

Beweis: $L_s = \{x : x = x^s\}$ ist ein s-dimensionaler Teilraum von λ. Sei $x = (x_n) \in U_v$. Aus der Ungleichung

$$(*) \qquad p_u(x - x^s) = \sum_{n=s}^{\infty} |\,x_n\,|\,u_n = \sum_{n=s}^{\infty} |\,x_n\,|\,v_n\,\alpha_n \leq \sup_{n \geq s} \alpha_n$$

ergibt sich

$$U_v \subset (\sup_{n \geq s} \alpha_n)\ U_u + L_s$$

Sei M_s der Teilraum von λ definiert durch

$$M_s = \{x \in \lambda :\ x^s = 0\}$$

Es gilt nach (*)

$$U_v \cap M_s \subset (\sup_{n \geq s} \alpha_n)\ U_u.$$

(2) *Ist* $u_n > 0$ *für jedes* $n \in N$, *dann gelten*

$$\inf_{n \leq s} \alpha_n \leq \delta_s (U_v,\ U_u)$$

$$\inf_{n \leq s} \alpha_n \leq \gamma_s (U_v,\ U_u)$$

Beweis: Nach der Annahme erzeugt U_u eine Norm auf λ und $\alpha_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ für jedes n. Sei $(x_n) \in (\inf_{n \leq s} \alpha_n)\ (U_u \cap L_{s+1})$.

Aus der Ungleichung

$$\sum_{n=s}^{\infty} |\, x_n \,|\, v_n = \sum_{n=o}^{s} |\, x_n \,|\, u_n\, \alpha_n^{-1} \leq (\inf_{n \leq s} \alpha_n)\ (\sup_{n \leq s} \alpha_n^{-1}) \leq 1$$

erhält man die Aussage

$$(\inf_{n \leq s} \alpha_n)\ (U_u \cap L_{s+1}) \subset U_v$$

und dann folgt die Behauptung nach I, 2, (1).

(3) *Die Folge* $(\delta_n (U_v,\ U_u))$ *konvergiert genau dann gegen Null, wenn* $u_n = 0\ (v_n)$ gilt.

Beweis: Ist $(\alpha_n) \in c_0$, dann ist $\overline{\lim}\ \alpha_n = 0$. Nach (1) gilt daher

$$\lim\ \delta_n\ (U_v,\ U_u) = 0$$

Sei $\lim\ \delta_n\ (U_v,\ U_u) = 0$. Wir definieren eine stetige, lineare Abbildung A von λ in l^1 durch den Ansatz

$$A\ (x_n) = (x_n\ u_n)$$

Weil $A\,(U_u)$ in der Einheitskugel von l' liegt, erhält man

$$\delta_n\,(A\,(U_v)) \to 0$$

nach I, 1, (11). Aus I, 1, (8) folgt dann, dass $A(U_v)$ eine kompakte Teilmenge von l^1 ist.

Sei $\theta_s = (\alpha_s\,\delta_{ns})$. (θ_s) ist eine Folge in l^1 und weil θ_s ein Element aus $A\,(U_v)$ ist, hat die Folge (θ_s) mindestens einen Behrürungspunkt, der wegen der Konstruktion von θ_s nur das Nullelment von l^1 sein kann. Folglich konvergiert die Folge (θ_s) gegen Null in l^1 und daher gilt $u_n = 0\,(v_n)$.

(3) und II, 4, (3) liefern uns die folgende Charakterisierung von SCHWARTZ Räumen.

(4) *Ein Folgenraum* $\lambda(\mathrm{P})$ *ist genau dann ein* SCHWARTZ *Raum wenn es zu jeder Folge* $\mathrm{u} = (\mathrm{u}_n)$ *aus P eine andere Folge* $\mathrm{v} = (\mathrm{v}_n) \in \mathrm{P}$ *mit*

$$u_n = 0\,(v_n)$$

gibt.

Ganz analog ist die folgende Charakterisierung der nuklearen Folgenräume.

(5) $\lambda(\mathrm{P})$ *ist genau dann nuklear, wenn es zu jeder Folge* $\mathrm{u} \in \mathrm{P}$, *Folgen* $\mathrm{v} \in \mathrm{P}$ *und* $(\xi_n) \in \mathrm{l}^1$ *mit*

$$u_n \leq \xi_n\,v_n$$

gibt.

Der Beweis steht in PIETSCH (1).

(6) *u und v seien Elemente von* P *mit* $v \geq u$ *und sei*

$$\lim\ \delta_n\,(U_v,\ U_u) = 0.$$

Sei $\mathrm{N}' = \{\mathrm{n} \in \mathrm{N} : \mathrm{u}_n \neq 0\}$. *Es gibt eine Permutation* $\{\mathrm{n}_0\,\mathrm{n}_1 \ldots \mathrm{n}_s \ldots\}$ *von* N', *so dass*

$$\alpha_{n_s} = \delta_s\,(U_v,\ U_u) = \gamma_s\,(U_v,\ U_u)$$

gilt.

Hat N′ *nur* s *Elemente, dann gilt*

$$\delta_k (U_v, U_u) = \gamma_k (U_v, U_u) = 0$$

ab $k = s$.

Beweis: Hat N' nur s Elemente, dann ist die Codimension des Nullraumes M von U_u gleich s. Ist L ein Komplementärraum von M in $\lambda = \lambda(P)$, dann gelten

$$U_v \subset \delta U_u + L$$

$$U_v \cap M \subset \delta U_u$$

für jedes $\delta > 0$, und es folgt daraus dass $\delta_k (U_v, U_u)$ und $\gamma_k (U_v, U_u)$ ab s gleich Null sind.

Es gilt $N' = \{n \in N : \alpha_n > 0\}$. Die Folge (α_n) konvergiert gegen Null nach (3). π' sei eine Permutation von N', so dass für $n \geq s$, $n, s \in N'$

$$\alpha_{\pi'(n)} \leq \alpha_{\pi'(s)}$$

gilt. Mit $\{n_0 n_1 \dots n_s \dots\}$ bezeichnen wir $\pi'(N')$. Für jede Folge $x = (x_n)$ aus λ definieren wir eine Folge $x_s = (x'_n)$ durch den Ansatz

$$x'_n = \begin{cases} x_n & n = n_0 \dots n_{s-1} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $L_s = \{x \in \lambda : x = x_s\}$. L_s ist ein s-dimensionaler Teilraum von λ. Sei $x \in U_v$. Aus der Ungleichung

$$p_u (x - x_s) = \sum_{k=s}^{\infty} |x_{n_k}| u_{n_k} = \sum_{k=s}^{\infty} |x_{n_k}| v_{n_k} \alpha_{n_k} \leq \left(\sum_{k=s}^{\infty} |x_{n_k}| v_{n_k}\right) \alpha_{n_s} \leq \alpha_{n_s}$$

erhält man

$$U_v \subset (\alpha_{n_s}) U_u + L_s$$

$$U_v \cap M_s \subset (\alpha_{n_s}) U_u$$

wo M_s derjenige Teilraum von λ, der aus $x \in \lambda$ mit $x_s = 0$ besteht. Daraus ergeben sich die folgenden Ungleichungen

(i) $$\delta_s(U_v,\ U_u) \leq \alpha_{n_s}$$

(ii) $$\gamma_s(U_v,\ U_u) \leq \alpha_{n_s}$$

A sei die lineare Abbildung von λ in l^1, definiert durch den Ansatz $A(x_n) = (x_n u_n)$

Sei $L'_{s+1} = \{(\xi_n) : \xi_n = 0 \ n \neq n_0 \ldots n_s\}$. L'_{s+1} ist ein $(s+1)$-dimensionaler Teilraum von l^1. Sei $(\xi_n) \in S \cap L'_{s+1}$, wobei S die Einheitskugel von l^1 bedeutet. Aus der Ungleichung

$$\sum_{k=0}^{s} |\xi_{n_k}| \, v_{n_k}/u_{n_k} \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\xi_n|\right) \frac{1}{\alpha_{n_s}} \leq \frac{1}{\alpha_{n_s}}$$

folgt, dass $\alpha_{n_s}(S \cap L'_{s+1})$ in $A(U_v)$ enthalten ist. Nach I, 2, (1) erhalten wir dann die Ungleichung

$$\alpha_{n_s} \leq \delta_s(A(U_v)) \leq \delta_s(U_v,\ U_u)$$

die mit (i) die Aussage

$$\alpha_{n_s} = \delta_s(U_v,\ U_u)$$

liefert.

Wir brauchen noch nur $\alpha_{n_s} \leq \delta_s(U_u^0,\ U_v^0)$ zu zeigen, denn es gilt $\delta_s(U_u^0,\ U_v^0) = \gamma_s(U_v,\ U_u)$.

Sei

$$L_{s+1} = \{(\eta_n) \in \lambda'(U_v^0) : \eta_n = 0 \ n \neq n_0 \ldots n_s\}$$

Sei $(\eta_n) \in U_v^0 \cap L_{s+1}$, das heisst $|\eta_{n_i}| \leq v_{n_i}$ für $i = 0, \ldots, s$.

Für $i \leq s$ besteht die Ungleichung

$$\frac{|\eta_{n_i}|}{u_{n_i}} = \frac{|\eta_{n_i}|}{v_{n_i}} \frac{1}{\alpha_{n_i}} \leq \frac{1}{\alpha_{n_s}}$$

und daraus folgt

$$\alpha_{n_s}(U_v^0 \cap L_{s+1}) \subset U_u^0.$$

Nach I, (2), 1 ergibt sich die gesuchte Ungleichung.

Unser nächstes Ergebnis ist deswegen wichtig, weil es zeigt, dass der Begriff der diametralen Dimension für die Untersuchung der Folgenräume anwendbar ist.

(7) *Es gilt* $\Delta(\lambda) = \Gamma(\lambda)$ *für jeden Folgenraum* $\lambda = \lambda(P)$.

Beweis: Ist λ kein SCHWARTZ Raum, dann gilt nach II, 4 (3) $\Delta(\lambda) = \Gamma(\lambda)$.

λ sei ein SCHWARTZ Raum und (a_n) sei aus $\Gamma(\lambda)$. Nach II, 4 (3) gibt es zu jeder Folge $u \in P$, Folgen $v^1, v^2 \in P$ mit $v^1 \geq u$, $v^2 \geq u$ so dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n \gamma_n(U_{v^1}, U_u) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(U_{v^2}, U_u) = 0$$

gelten. Wählt man $v \in P$ mit $v_n \geq \sup\{v_n^1, v_n^2\}$, dann gelten

(i) $$\lim_{n\to\infty} a_n \gamma_n(U_v, U_u) = 0$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \delta_n(U_v, U_u) = 0$$

weil $U_v \subset U_{v^1} \cap U_{v^2}$ gilt. Nach (6) ist $\gamma_n(U_v, U_u)$ gleich $\delta_n(U_v, U_u)$ und daher gehört die Folge (a_n) zu $\Delta(\lambda)$.

Genauso kann man zeigen, dass $\Delta(\lambda)$ in $\Gamma(\lambda)$ enthalten ist.

Das nächste Ergebnis ist eine Verallgemeinerung von (4).

(8) (ξ_n) *sei eine Folge mit* $\xi_n \neq 0$. *Gibt es zu jedem* $\mathrm{u} \in \mathrm{P}$ *ein* $\mathrm{v} \in \mathrm{P}$ *mit*

$$u_n \,|\, \xi_n \,| = 0\,(v_n)$$

dann liegt die Folge $(\inf_{n\geq s} |\,\xi_n\,|)$ *in* $\Delta(\lambda)$.

Beweis: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $k \in N$ mit

$$\alpha_n < \frac{\varepsilon}{|\,\xi_n\,|}$$

für $n \geq k$. Daher gilt für $s \geq k$

$$(\inf_{n \geq s} |\xi_n|)(\sup_{n \geq s} \alpha_n) < \varepsilon$$

und nach (1) konvergiert die Folge $(\inf_{n \geq s} |\xi_n| \delta_s(U_v, U_u))$ gegen Null.

(9) P *bestehe aus Folgen* (u_n) *mit* $u_n \neq 0$ *für jedes* n. (ξ_n) *sei eine Folge aus* $\Delta(\lambda)$ *mit* $\xi_n \neq 0$ *für jedes* n.

Dann gibt es zu jedem u ϵ P *ein* v ϵ P, *so dass die Folge* $\left(\xi_n \frac{u_n}{v_n}\right)$ *eine gegen Null konvergente Teilfolge hat.*

Beweis: Ist λ kein SCHWARTZ Raum, dann ist die Behauptung trivial, weil jede Folge in $\Delta(\lambda)$ gegen Null konvergiert.

λ sei ein SCHWARTZ Raum. Ist die Folge (ξ_n) beschränkt, wählt man zu jeden $u \epsilon P$ ein $v \epsilon P$ mit $u_n = 0\,(v_n)$. Dann konvergiert $\left(\xi_n \frac{u_n}{v_n}\right)$ gegen Null.

(ξ_n) sei eine unbeschränkte Folge aus $\Delta(\lambda)$. Zu jedem $s \epsilon N$ gibt es ein $k(s) \epsilon N$ mit

$$|\xi_{k(s)}| = \sup_{n \leq s} |\xi_n|$$

und $(k(s))$ ist unbeschränkt. Zu jedem $u \epsilon P$ gibt es ein $v \epsilon P$ mit

$$\lim_{n \to \infty} |\xi_n| \delta_n(U_v, U_u) = 0.$$

Speziell konvergiert $(\xi_{k(s)} \delta_{k(s)}(U_v, U_n))$ gegen Null mit $s \to \infty$.

Weil $k(s) \leq s$ ist, gilt $\delta_s(U_v, U_u) \leq \delta_{k(s)}(U_v, U_u)$ und daraus folgt

$$\lim_{s \to \infty} |\xi_{k(s)}| \delta_s(U_v, U_u) = 0.$$

Nach (2) konvergiert die Folge $\left(\xi_{k(s)} \inf_{n \leq s} \frac{u_n}{v_n}\right)$ gegen Null.

Weil die Folge $(|\xi_{k(s)}|)$ aufsteigend ist, gilt

$$\inf_{n\leq s}\left(|\xi_{k(s)}|\frac{u_n}{v_n}\right)\leq|\xi_{k(s)}|\inf_{n\leq s}\frac{u_n}{v_n}$$

und daher konvergiert die Folge $\left(\inf_{n\leq s}|\xi_{k(n)}|\frac{u_n}{v_n}\right)$ gegen Null. Da $\xi_{k(n)}\neq 0$, muss $\left(\xi_{k(n)}\frac{u_n}{v_n}\right)$ eine gegen Null konvergente Teilfolge haben. Daher hat die Folge $\left(\xi_n\frac{u_n}{v_n}\right)$ eine Teilfolge, die gegen Null konvergiert.

3. Glatte Folgenräume

(β_n) sei eine unbeschränkte, aufsteigende Folge positiver Zahlen. Sei $P=\{(k^{\beta_n}):k=1,2,\ldots\}$. Der vom Stufensystem P erzeugte Folgenraum ist ein *Potenzreihenraum vom unendlichen Typus* und er wird mit $\lambda_\infty(\beta_n)$ bezeichnet. Ist Q das Stufensystem $\left\{\left(1-\frac{1}{k}\right)^{\beta_n}: k=1,2,\ldots\right\}$, dann ist $\lambda(Q)$ ein *Potenzreihenraum vom endlichen Typus*, bezeihnet mit $\lambda_1(\beta_n)$.

Die wichtigsten Potenzreihenräume von endlichem oder unendlichem Typus erhält man aus den Folgen (n), $\log(n+1)$. $\lambda_\infty(\log(n+1))$ ist der Raum aller schnell fallenden Folgen s, der aus den Folgen (ξ_n) mit

$$\lim_{n\to\infty}|\xi_n|(n+1)^k=0,\ k=1,2,\ldots$$

besteht.

P sei ein Stufensystem, das den folgenden Eigenschaften genügt:

(i) Jede Folge (ϱ_n) aus P ist aufsteigend und $\varrho_0>0$.

(ii) Zu jeder Folge $(\varrho_n)\in P$ gibt es eine Folge $(\sigma_n)\in P$ mit $\varrho_n{}^2\leq\sigma_n$ für jedes n.

$\lambda(P)$ wird dann ein *glatter Raum vom unendlichen Typus* genannt. Wir schreiben kurz ein G_∞-Raum.

Jeder Potenzreihenraum vom unendlichen Typus ist ein G_∞-Raum.

Q sei ein Stufensystem, das den folgenden Eigenschaften genügt.

(i) Für alle Folgen $(q_n) \in Q$ gilt $0 < q_n \leq q_{n-1}$

(ii) Zu jeder Folge $(q_n) \in Q$ gibt es eine Folge $(q'_n) \in Q$ mit $\sqrt{q_n} \leq q'_n$ für jedes n.

Wir nennen den Folgenraum $\lambda(Q)$ *glatt vom endlichen Typus* und wir werden kurz G_1 -Raum schreiben.

Jeder Potenzreihenraum vom endlichen Typus ist ein G_1 -Raum.

(1) *a) Ein G_∞ -Raum λ (P) ist genau dann ein* Schwartz *Raum, wenn* P *eine unbeschränkte Folge besitzt.*

b) λ (P) ist genau dann nuklear, wenn es ein $\varrho \in P$ mit $(1/\varrho_n) \in 1^1$ gibt.

Beweis:

(*a*) Ist λ (*P*) ein Schwartz Raum, dann gibt es zu jedem $\varrho \in P$ ein $\sigma \in P$ mit $(\varrho_n/\sigma_n) \in c_0$ nach 2, (4). Aus $\frac{\varrho_0}{\sigma_n} \leq \frac{\varrho_n}{\sigma_n}$ folgt, dass die Folge $\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)$ gegen Null konvergiert.

ϱ' sei eine unbeschränkte Folge aus P. Sei $\varrho = (\varrho_n) \in P$. Es gibt eine Folge $\sigma \in P$ mit $\sigma_n \geq \max(\varrho_n, \varrho'_n)$ und daher ist $\sigma = (\sigma_n)$ unbeschränkt. Weil die Folge $\left(\frac{\varrho_n}{\sigma_n}\right)$ beschränkt ist, konvergiert die Folge $\left(\frac{\varrho_n}{\sigma_n^2}\right)$ gegen Null und nach 2, (4) ist $\lambda(P)$ ein Schwartz Raum.

(*b*) Ist λ (*P*) nuklear, dann gibt es zu jedem $\varrho \in P$ ein $\sigma \in P$ mit $\left(\frac{\varrho_n}{\sigma_n}\right) \in l^1$ nach 2, (5). Aus $\frac{\varrho_0}{\sigma_n} \leq \frac{\varrho_n}{\sigma_n}$ folgt, dass die Folge $\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)$ in l^1 liegt.

ϱ' sei eine Folge aus P mit $\left(\frac{1}{\varrho'_n}\right) \in l^1$. Sei $\varrho \in P$. Es gibt ein $\sigma \in P$ mit $\sigma_n \geq \max(\varrho_n, \varrho'_n)$ und daher liegt $\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)$ in l^1. Die Folge (ϱ_n/σ_n^2) liegt dann in l^1.

Ist ein G_∞-Raum $\lambda(P)$ kein SCHWARTZ Raum, dann besitzt P keine unbeschränkte Folge. In diesem Fall ist $\lambda(P)$ isomorph zu l^1.

Weil jeder Potenzreihenraum vom unendlichen Typus ein G_∞ Raum ist, erhält man folgendes Ergebnis aus (1).

(2) *Ein Potenzreihenraum von unendlichem Typus* $\lambda_\infty(\beta_n)$ *ist stets ein* SCHWARTZ *Raum.*

$\lambda_\infty(\beta_n)$ *ist genau dann nuklear, wenn für eine Zahl* q, $0 < q < 1$ *die Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{\beta_n}$ *konvergiert.*

Der duale Raum λ' zu $\lambda = \lambda(P)$ besteht aus allen Folgen (ξ_n) mit $|\xi_n| \leq C\varrho_n$ für eine geeignete Folge $(\varrho_n) \in P$ und eine Zahl $C > 0$. λ' ist im allgemeinen ein Teilraum des α-dualen Raumes $\lambda^\times$. Ist P ein abzählbares Stufensystem, dann ist $\lambda = \lambda(P)$ ein *gestufter Raum* und $\lambda' = \lambda^\times$. (Köthe (1), 30.8)

(3) *Ist ein* G_∞*-Raum* $\lambda = \lambda(P)$ *ein* SCHWARTZ *Raum, dann gilt*

$$\lambda' = \Delta(\lambda).$$

Beweis: ϱ und ϱ' seien aus P. Es gibt eine Folge $\sigma' \in P$ mit

$$\varrho_n = 0(\sigma'_n), \; \varrho'_n = 0(\sigma_n'),$$

weil $\lambda(P)$ ein SCHWARTZ Raum ist. Dann gilt $\varrho_n\varrho'_n = 0(\sigma_n)$ für eine Folge $\sigma \in P$ mit $\sigma_n \geq (\sigma'_n)^2$. Nach 2, (8) liegt die ausfteigende Folge (ϱ_n) in $\Delta(\lambda)$. Es gilt daher $P \subset \Delta(\lambda)$ und λ' besteht aus allen Folgen (ξ_n) mit $|\xi_n| \leq C\varrho_n$ für eine Folge (ϱ_n) aus P, $C > 0$. Daher ist λ' ein Teilraum von $\Delta(\lambda)$.

(ξ_n) sei aus $\Delta(\lambda)$. Nach 2, (2) gibt es zu jedem $\varrho \in P$ ein $\sigma \in P$ mit

$$|\xi_s| \inf_{n \leq s} \frac{\varrho_n}{\sigma_n} \leq 1.$$

Aus der Ungleichung

$$\frac{\varrho_0}{\sigma_s} \leq \inf_{n \leq s} \frac{\varrho_n}{\sigma_n}$$

folgt $|\xi_s| \leq \dfrac{\sigma_s}{\varrho_0}$ und daher liegt (ξ_s) in λ'.

Die Behauptung gilt nicht mehr, wenn $\lambda(P)$ kein SCHWARTZ Raum ist, denn $\Delta\,(l^1) = c_0$.

Nach (2) wird jeder G_∞-Raum $\lambda = \lambda\,(P)$ durch seine diametrale Dimension eindeutig bestimmt, denn der Raum $\lambda\,(\lambda')$ stimmt stets mit dem Raum $\lambda = \lambda\,(P)$ überein und $\lambda' = \Delta\,(\lambda')$, wenn λ ein SCHWARTZ Raum ist. Ist λ kein SCHWARTZ Raum, d.h. $\Delta(\lambda) = c_0$, dann ist λ isomorph zu l^1.

(4) *Ein G_1-Raum $\lambda = \lambda(Q)$ ist genau dann ein* SCHWARTZ *Raum, wenn jede Folge (q_n) aus Q gegen Null konvergiert.*

Beweis: Konvergiert jede Folge $(q_n) \in Q$ gegen Null, dann aus $q_n = \sqrt{q_n}\,\sqrt{q_n}$ folgt $q_n = 0\,(q'_n)$ für eine Folge $(q'_n) \in Q$ mit $\sqrt{q_n} \leq q'_n$. Nach 2, (4) ist λ ein SCHWARTZ Raum.

Ist λ ein SCHWARTZ Raum, dann folgt aus demselben Satz, dass es zu jedem $q \in Q$ ein $q' \in Q$ mit $q_n = 0\,(q'_n)$ gibt. Aus der Ungleichung

$$q'_n/q'_0 \leq q_n/q'_n$$

folgt danach, dass (q_n) gegen Null konvergiert.

Unmittelbar aus (3) erhalten wir:

(5) *Jeder Potenzreihenraum vom endlichen Typus ist ein* SCHWARTZ *Raum.*

Wir berechnen jetzt die diametrale Dimension eines G_1-Raumes.

(6) *Ist der G_1-Raum $\lambda = \lambda\,(Q)$ ein* SCHWARTZ *Raum, dann gilt*

$$\Delta\,(\lambda) = \{(\xi_n) : (\xi_n\, q_n) \in c_0,\ \forall\, q \in Q\} = \{(\xi_n) : (\xi_n\, q_n) \in l^\infty,\ \forall\, q \in Q\}$$

Beweis: Sei $(\xi_n) \in \Delta\,(\lambda)$. Nach 2, (2) gibt es zu jedem $q \in Q$ ein $q' \in Q$ mit

$$\lim_{s\to\infty} |\,\xi_s\,| \inf_{n\leq s} q_n/q'_n = 0.$$

Aus der Ungleichung $q_s/q'_0 \leq \inf q_n/q'_n$ folgt $(\xi_s\, q_s) \in c_0$. Wir haben jetzt die folgende Inklusion:

$$\Delta\,(\lambda) \subset \{(\xi_n) : (\xi_n\, q_n) \in c_0,\ \forall\, q \in Q\} \subset \{(\xi_n) : (\xi_n\, q_n) \in l^\infty,\ \forall\, q \in Q\}$$

Sei $(\xi_n q_n) \in l^\infty$ für jedes $q \in Q$. Sei $q'' \in Q$ mit $\sqrt{q_n} \leq q''_n$. Wählt man nach 2, (4) ein $q' \in Q$ mit $q''_n = 0\,(q'_n)$, dann gilt $\sqrt{q_n} = 0\,(q'_n)$. Nach der Annahme gibt es eine Zahl $C > 0$ mit $q''_n \mid \xi_n \mid \leq C$ für jedes n. Weil die Folge (q'_n) absteigend ist, gilt

$$\sqrt{q_s} \sup_{n \leq s} \mid \xi_n \mid \leq q''_n \sup_{n \leq s} \mid \xi \mid \leq C.$$

Aus der Ungleichung

$$q_s \sup_{n \leq s} \mid \xi_n \mid \leq \frac{\sqrt{q_s}\, q'_s\, C}{q'_s}$$

folgt $q_s \sup\limits_{n \leq s} \mid \xi_n \mid = 0\,(q'_s)$. Weil die Folge $(\sup\limits_{n \leq s} \mid \xi_n \mid)$ aufsteigend ist, gehört sie zu $\Delta\,(\lambda)$ nach 2, (8). Deshalb gehört auch (ξ_n) zu $\Delta\,(\lambda)$.

(7) *Für einen G_1-Raum $\lambda = \lambda\,(Q)$ sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

(*a*) *$\lambda\,(Q)$ ist nuklear,*

(*b*) $Q \subset s$,

(*c*) $Q \subset l^1$.

Beweis: (*a*) $\rightarrow$ (*b*): Ist λ nuklear, dann gehören die Folgen $((n + 1)^k)$, $k = 1, 2, \ldots$ zu $\Delta\,(\lambda)$ nach II, 4, (7). Aus (6) folgt dann, dass jede Folge (q_n) aus Q schnell fallend ist. Daher gilt $Q \subset s$.

(*b*) $\rightarrow$ (*c*) ist trivial.

(*c*) $\rightarrow$ (*a*): Ist $(q_n) \in Q$, dann $(\sqrt{q_n}) \in Q^u \subset l^1$. Sei $(q'_n) \in Q$ mit $q'_n \geq \sqrt{q_n}$. Aus der Ungleichung $q_n \leq \sqrt{q_n}\, q'_n$ folgt nach 2, (5) die Nuklearität von λ.

Weil jeder Potenzreihenraum vom endlichen Typus ein G_1-Raum ist, erhalten wir aus (*c*) die folgende Charakterisierung nuklearer Potenzreihenräume vom endlichen Typus.

(8) *$\lambda_1\,(\beta_n)$ ist genau dann nuklear, wenn für jede Zahl q, $0 < q < 1$, (q^{β_n}) in l^1 liegt.*

Beispiel: (β_n) sei die Folge 1, 1, 2, 2, ... $\overbrace{k \ldots k}^{k!}$ ... Die Reihe $\Sigma\, q^{\beta_n} = \Sigma\, n!\; q^n$ konvergiert nur für $q = 0$. Daher ist $\lambda_1(\beta_n)$ oder $\lambda_\infty(\beta_n)$ ein Beispiel eines nicht nuklearen gestuften Raunes, der ein SCHWARTZ Raum ist.

$\lambda = \lambda(\{a^k\})$ sei ein gestufter G_∞-Raum. Für jede ganze Zahl k definieren wir eine Folge b^k mit

$$b_n^k = \sup\,\{a'_n \ldots a^k_n\}$$

Aus der Definition von b_1 erhält man

$$b_n^{k+1} \geq b_n^k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \; n \in N$$

Daher ist $\{b^k\}$ ein *monoton wachsendes Stufensystem.* Weil jede Folge a^k aufsteigend ist, so auch jede Folge b^k. Da λ ein G_∞-Raum ist, kann man zu jedem k ein m_k finden, so dass $(a_n^k)^2 \leq a_n^{m_k}$, $n \in N$, gilt. Aus der Ungleichung

$$(b_n^k)^2 \leq \sup\,\{a_n^{m_1} \ldots a_n^{m_k}\}$$

folgt $(b_n^k)^2 \leq b_n^{j_k}$, $n \in N$, $j_k = \max\,\{m_1 \ldots m_k\}$. Danach ist $\lambda(\{b^k\})$ ein G_∞-Raum. Es ist unmittelbar ersichtlich, dass $\{b_k\}$ wieder den Raum λ erzeugt.

Man kann genauso zeigen, dass jeder gestufte G_1-Raum von einem monoton wachsenden Stufensystem erzeugt werden kann.

A. PIETSCH (1) zeigte, dass zwei Potenzreihenräume mit verschiedenem Typus niemals isomorph sein können. Das letzte Ergebnis ist eine Verallgemeinerung dieser Tatsache.

(9) *$\lambda = \lambda$ (P) bzw. $\mu = \lambda$ (Q) sei ein gestufter G_∞-Raum bzw. ein gestufter G_1-Raum. Ist einer der beiden Raume ein Schwartz Raum, dann können sie nicht isomorph sein.*

Beweis: Nach den vorangehenden Betrachtungen nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $P = \{a^k\}$ und $Q = \{b^k\}$ monoton wachsende Stufensysteme sind.

Wäre λ isomorph zu μ, dann hätten sie dieselbe diametrale Dimension und es würde nach (1) und (6)

$$\lambda' = \{(\xi_n) : (\xi_n\, b_n^k) \in l^\infty, \; k = 1, 2, \ldots\}$$

gelten. Danach wären die Zahlen

$$\varrho_k = \sup_n \; a_n^k \; b_n^k$$

wohl definiert mit $\varrho_k > 0$. Aus der Ungleichung

$$a_n^k \; \varrho_k^{-1} \leq (b_n^k)^{-1} \leq (b^1{}_n)^{-1}$$

würde dann folgen, dass die Zahlen

$$\delta_n = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \; \varrho_k^{-1} \; a_n^k$$

wohl definiert wären. Wir hätten

$$b^j{}_n \; \delta_n \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{a^k{}_n \; b^j{}_n}{2^k \; \varrho_k} + \sum_{k=j}^{\infty} \frac{a_n^k \; b_n^k}{2^k \; \varrho_k}$$

Aus den Ungleichungen

$$\sum_{k=j}^{\infty} \frac{a_n^k \; b_n^k}{2^k \; \varrho_k} \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} \leq 2$$

$$\sum_{k=1}^{j-1} \frac{a_n^k \; b_n^j}{2^k \; \varrho_k} \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{a^j{}_n \; b^j{}_n}{2^k \; \varrho_k} \leq \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\varrho_j}{2^k \; \varrho_k} \leq M_j$$

würde dann die Ungleichung

$$\delta_n \; b^j \leqq 2 + M_j$$

folgen. Weil die Folge (δ_n) danach in $\Delta\,(\mu) = \lambda'$ liegen würde, gäbe es ein m' mit $\delta_n \leq M \; a_n^{m'}$, $M > 0$. Es gibt ein m mit $a_n^{m'} = 0\;(a_n^m)$, denn λ ist ein Schwartz Raum. Daher hätte man $\delta_n = 0\;(a_n^m)$. Aus der Definition von δ_n folgt aber

$$\delta_n \; (a_n^m)^{-1} \geq \frac{1}{2^m \; \varrho_m}$$

Aus dem aufgetretenen Widerspruch folgt die Behauptung.

IV. EIN EINBETTUNGSSATZ

T. KOMURA und Y. KOMURA haben in (1) bewiesen, dass ein lokalkonvexer Raum genau dann nuklear ist, wenn er mit einem Teilraum eines topologischen Produkts $(s)^A$ von s identifiziert werden kann. Damit war eine von A. GROTHENDIECK stammende Frage positiv beantwortet. Wir werden in diesem Abschnitt die Methode von T. KOMURA und Y. KOMURA benutzen, um einen allgemeineren Einbettungssatz anzugeben.

E bezeichne in diesem Abschnitt einen verallgemeinerten Hilbert Raum.

(1) E *sei ein Schwartz Raum und* (γ_n) *sei aus* Δ (E). *Für jedes* $U \in \mathfrak{U}_h$ (E) *gibt es eine orthonormierte Basis* (e_n) *des Hilbert Raumes* $E'(U^0)$, *so dass die Menge*

$$\left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \gamma_n e_n : \sum_{n=0}^{\infty} |\xi|^2 \leq 1 \right\}$$

gleichstetig in E' *ist.*

Beweis: Sei $U \in \mathfrak{U}_h(E)$. Es gibt eine Nullumgebung $V_1 \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V_1 \subset U$ und $|\gamma_n|\ \delta_n(V_1, U) \leq 1$. Weil E ein Schwartz Raum ist, gibt es eine andere Nullumgebung $V_2 \in \mathfrak{U}(E)$ mit $V_2 \subset U$, so dass die Einbettung $E'(U^0) \to E'(V_2^0)$ kompakt ist. V sei eine andere Nullumgebung aus $\mathfrak{U}_h(E)$ mit $V \subset V_1 \cap V_2$. Dann gilt

(i) $$|\gamma_n|\ \delta_n(V, U) \leq 1,$$

(ii) Die Einbettung I: $E'(U^0) \to E'(V^0)$ ist kompakt.

Weil $E'(U^0)$ und $E'(V^0)$ Hilbert Räume sind, gibt es orthonormierte Systeme (e_n) bzw. (f_n) in $E'(U^0)$ bzw. $E'(V^0)$ und eine absteigende Folge nicht negativer, reeller Zahlen (λ_n), so dass die Einbettung I die folgende Gestalt hat:

$$I\ u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n\ (u,\ e_n)\ f_n = u$$

Das System (e_n) ist eine orthonormierte Basis in $E'(U^0)$, denn I ist eineindeutig. Ausserdem gilt $p_{v^0}(e_n) = \lambda_n$.

Aus II, 4, (5) folgt dann

$$\lambda_n = \delta_n (U^0)$$

$\delta_n (V, U)$ ist gleich $\delta_n (U^0)$ und nach (i) gilt daher

$$\lambda_s \mid \gamma_s \mid \leq 1.$$

Ist (ξ_n) eine Folge mit $\sum_{n=0}^{\infty} \mid \xi_n \mid^2 \leq 1$, dann gilt

$$p_{v^0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \gamma_n e_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mid \xi_n \mid^2 \mid \gamma_n \mid^2 \lambda_n^2 \leq 1$$

und aus dieser Ungleichung folgt, dass die Menge

$$\{ \Sigma \xi_n \gamma_n e_n : \Sigma \mid \xi_n \mid^2 \leq 1 \}$$

in der gleichstetigen Menge V^0 enthalten ist.

(2) *Ein abzählbares Stufensystem* $\{a^k\}$ *bestehe aus Folgen, die den folgenden Ungleichungen genügen:*

$$a_n^k \geq a_n^{-1} > 0 \qquad k, n \in N$$

$$a_n^k \geq a^k_{n-1} \qquad k, n \in N$$

E *sei ein Schwartz Raum und sei* $(a^k_{(n+1)^2}) \in \Delta(\mathrm{E})$ *für jede Zahl* $\mathrm{k} \in \mathrm{N}$. *Sei* $\mathrm{U} \in \mathfrak{A}_h(\mathrm{E})$. *Es gibt eine orthonormierte Basis* (e_n) *von* $\mathrm{E}'(\mathrm{U}^0)$, *so dass die Teilmengen*

$$B_{u,k} = \{ a_n^k e_n : n = 0, 1, 2, \dots \}$$

von E' *gleichstetig sind.*

Beweis: Nach (1) gibt es zu jedem k eine orthonormierte Basis (e_n^k) von $E'(U^0)$, so dass die Mengen

$$A_k = \{ \Sigma \xi_n a^k_{(n+1)^2} e^k_n : \Sigma \mid \xi_n \mid^2 \leq 1 \}$$

gleichstetig sind. Ordnet man alle Vektoren e_n^k wie folgt $e^0_0\ e^1_0\ e^1_1\ e^0_1\ e^2_0\ e^2_1\ e^2_2\ e^1_2 \ldots$, dann liefert die GRAM-SCHMIDT Orthogonalisierungsmethode eine Basis (e_m) von $E'(U^0)$ und es gilt $(e_m, e_n^k) = 0$ für $(k+1)^2$, $(n+1)^2 < m+1$. Für $m+1 > (k+1)^2$ gilt dann

$$e_m = \sum_{(n+1)^2 \geq m+1} \xi_n^{m,k}\, e_n^k$$

wobei $\xi_n^{m,k} = (e_m, e_n^k)$ ist. Aus der Ungleichung

$$\sum_{(n+1)^2 \geq m+1} \left| \frac{\xi_n^{k,m}}{a^k_{(n+1)^2}} \right|^2 \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} |\, \xi_n^{m,k} |^2 \right) \left(\frac{1}{a^k_{m+1}} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{a^k_m} \right)^2$$

folgt, dass für $m+1 = (k+1)^2 + 1$, $(k+1)^2 + 2 \ldots$, $a^k_m\, e_m$ in A_k liegt.

Weil eine endliche Teilmenge gleichstetig ist, folgt daraus dass die Teilmengen

$$B_{u,k} = \{ a^k_m\, e_m : m = 0, 1, 2, \ldots \}$$

gleichstetig sind.

(3) *$P = \{a^k\}$ sei ein abzählbares Stufensystem wie in (2). $\lambda = \lambda(\mathrm{P})$ sei nuklear. Liegt jede Folge $(a^k_{(n+1)^2})$ in der diametralen Dimension $\Delta(\mathrm{E})$ eines Schwartz Räumes E, dann ist E isomorph zu einem Teilraum von $(\lambda)^A$.*

Der Beweis folgt aus (2) mit demselben Wortlaut wie der Einbettungssatz in der Arbeit von T. KOMURA und Y. KOMURA.

(4) *Ein Raum E ist genau dann nuklear, wenn er sich mit einem Teilraum von $(s)^A$ identifizieren lässt.*

Beweis: Der nukleare Folgenraum s kann durch das Stufensystem $\{(n+1)^k : k = 1, 2, \ldots\}$ definiert werden. Weil das Produkt nuklearer Räume und ein Teilraum eines nuklearen Raumes wieder nuklear sind, ist jeder Teilraum von $(s)^A$ nuklear.

Sei E nuklear. Nach II, 4, (7) liegen die Folgen $((n+2)^{2k})$ in $\Delta(E)$. Aus (3) folgt dann, dass E isomorph zu einem Teilraum von $(s)^A$ ist.

V. BEISPIELE

1) Wir berechnen zuerst die diametrale Dimension des Folgenraumes φ. P sei die Menge aller positiven Folgen aus ω. Dann gilt $\varphi = \lambda(P)$. Sei (ϱ_n) eine beliebige aufsteigende Folge positiver Zahlen. Sei $u \in P$. Dann gilt

$$u_n \varrho_n = 0 \, (v_n)$$

für die Folge $v = (v_n)$, $v_n = n \, u_n \, \varrho_n$. Nach III, 2, (8) liegt die Folge (ϱ_n) in $\Delta(\varphi)$, und weil die diametrale Dimension ein normaler Folgenraum ist, haben wir $\Delta(\varphi) = \omega$.

Nach II, 1, (3) hat jeder Raum E $(T_s(E'))$ die diametrale Dimension ω. φ ist ein Beispiel eines Raumes mit der diametralen Dimension ω, der toneliert ist.

Ist d eine Kardinalzahl mit $d > \aleph_0$ dann ist der Raum φ_d nicht nuklear und nach II, 4, (7) enthält $\Delta(\varphi_d)$ die Folge $(n+1)$ nicht. Daher ist die diametrale Dimension von φ_d kleiner als die diametrale Dimension von φ.

2) Nach II, 4, (7) ist ein Raum E genau dann nuklear, wenn die Folgen $((n+1)^k)$, $k = 1, 2, \ldots$, in $\Delta(E)$ liegen. Weil die diametrale Dimension ein normaler Folgenraum ist, kann man diesen Satz auch so formulieren: E ist genau dann nuklear, wenn $s^\times \subset \Delta(E)$.

Wir berechnen hier die diametrale Dimension des topologischen Produkts $(s)^A$, A eine beliebige Indexmenge. Nach II, 2, (4) haben wir $\Delta((s)^A) \subset \Delta(s)$ und nach III, 3, (3) gilt $\Delta(s) = s^\times$.

Weil das Produkt nuklearer Räume wieder nuklear ist, gilt $s^\times \subset \Delta((s)^A)$ Daraus ergibt sich die Identität

$$s^\times = \Delta((s)^A),$$

B. S. Mitiagin (2) hat gezeigt, dass der Raum $\mathscr{E}$ zu dem N-fachen topologischen Produkt $(s)^N$ des Folgenraumes s isomorph ist.

Daher gilt

$$s^\times = \Delta(\mathscr{E}).$$

3) Der Raum der schnell fallenden Funktionen S ist isomorph zu dem Folgenraum s. Daher gilt

$$s^{\times} = \Delta\,(S).$$

4) $A(S)$ sei der Raum aller in der Einheitskreisscheibe S analytischen Funktionen mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von S. $A\,(\mathbf{C})$ sei der Raum der ganzen Funktionen mit der Topologie der gleichmässigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen der komplexen Ebene $\mathbf{C}$. $A\,(S)$ ist topologisch isomorph zu dem Folgenraum $\lambda_1\,(n)$. Daher gilt nach III, 3, (6).

$$\Delta\,(A\,(S)) = \{\,(\xi_n) : (\xi_n\, q^n) \in l^{\infty},\ 0 < q < 1\,\}.$$

$A(\mathbf{C})$ ist topologisch isomorph zu $\lambda_{\infty}\,(n)$: so gilt nach III, 3, (3)

$$\Delta\,(A\,(\mathbf{C})) = (\lambda_{\infty}\,(n))^{\times}.$$

Nach III, 3, (9) ist $A\,(S)$ nicht isomorph zu $A\,(\mathbf{C})$. $A\,(\mathbf{C})$ ist nicht isomorph zu einem Raum mit diametraler Dimension $s^{\times}$: denn $s^{\times}$ ist ein echter Teilraum von $(\lambda_{\infty}\,(n))^{\times}$. In dem Beweis von III, 3, (9) haben wir gezeigt, dass zwei Potenzreihenräume von verschiedenem Typus nicht dieselbe diametrale Dimension haben. Daher ist $s^{\times} = \Delta\,(s)$ ein echter Teilraum von $\Delta\,(\lambda_1\,(n))$. $A\,(S)$ ist daher nicht isomorph zu einem Raum mit diametraler Dimension $s^{\times}$.

LITERATUR

BESSAGA, C., A. PEŁCZYNSKI and S. ROLEWICZ

(1) *On diametral approximative dimension and linear homogeneity of F-spaces.* — Bull. Acad. Polon. Sci. **9,** 677-683, (1961).

(2) *Approximative dimension of linear topological spaces and some of its applications.* — Reports of the Conference on Functional Analysis, Warsaw 1960: Studia Math. Seria specjalna **1,** 27-29, (1963).

BESSAGA, C. and J. R. RETHERFORD

(1) *Lectures on nuclear spaces and related topics.* — Louisiana State University, 1967.

GROTHENDIECK, A.

(1) *Espaces vectoriels topologiques.* — Sao Paulo (1954).

(2) *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaries.* — Mem. Am. Math. Soc. **16** (1955).

HORVATH, J.

(1) *Topological Vector Spaces and Distributions.* — I. Addison-Wesley Co. (1966).

KÖTHE, G.

(1) *Topologische lineare Räume, I.* — Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1960).

(2) *Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume.* — Math. Z. **51,** 317-345, (1948).

KOMURA, T. und Y. KOMURA

Über die Einbettung der nuklearen Räume in $(s)^A$. — Math. Ann. **162,** 284-288. (1966).

KRASNOSELSKI, M. A., M. G. KREIN und D.P. MILMAN

(1) *Über die Defektzahlen von linearen Operatoren in einem Banach Raum und einige geometrische Fragen. Sb.* — Inst. Mat. Akad. Nauk. Ukr. S.S.R. **11,** 97-112, (1948). (Russisch).

MITIAGIN, B.S.

(1) *Der Zusammenhang zwischen ε-Entropie, Approximierbarkeit und Nuklearität von kompakten Mengen in einem linearen Raum.* — Doklady **134,** 765-768, (1960). (Russisch).

(2) *Die approximative Dimension und Basen in nuklearen Räumen.* Uspechi **16,** (4), 63-132, (1961). (Russisch).

PIETSCH, A.

(1) *Nukleare lokalkonvexe Räume.* — Berlin, Akademie-Verlag. (1965).

TICHOMIROW, B.M.

(1) *Über die n-dimensionalen Durchmesser von kompakten Mengen.* — Doklady, **130,** 734-737, (1960).

(2) *Durchmesser von Mengen in Funktionalräumen und die Theorie der besten Approximation.* — Uspechi **15** (3) (1960) 81-120.