VERALLGEMEINERTE MORSE THEORIE

VON JÜRGEN ROHLFS
in Hamburg*

INHALTSVERZEICHNIS

EINLEITUNG

Unter dem Begriff «Morse Theorie (im klassischen Sinn)» versteht man zwei verschiedene aber ähnliche Systeme von Sätzen. In dem einen betrachtet man eine differenzierbare reelle Funktion f auf einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit, definiert für reelles r $f^r := \{x \in M / f(x) \leq r\}$ und beschreibt für ein Intervall $[a, b]$ den Homologie-, Homotopie-und Diffeomorphietyp des Paares (f^b, f^a) mit Hilfe der kritischen Punkte von f in $f^{-1}[a, b]$. In dem anderen bildet man auf einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit den Raum M der stückweise differenzierbaren Wege, die zwei vorgegebene Punkte verbinden. Auf M definiert man eine Funktion f,

* Diplomarbeit (Universitat Hamburg 1967)

die jedem Weg seine Länge zuordnet, und beschreibt wie oben den Homologie- und Homotopietyp von (f^b, f^a) durch die kritische Menge von f in $f^{-1}[a, b]$, dh.: durch die Menge der Geodätischen, deren Länge zwischen a und b liegt.

R. PALAIS (9) (und unabhängig S. SMALE) haben 1963 eine Morse Theorie für vollständige Riemannsche unendlich-dimensionale Mannigfaltigkeiten entwickelt, die beide oben erwähnten Zweige der Morse Theorie umfaßt.

Die zuerst erwähnte Art der Morse Theorie wurde 1954 von R. BOTT (1) noch in einer anderen Weise verallgemeinert. Grob gesagt ersetzte er die in der Morse Theorie nötige Vorraussetzung, daß die kritischen Punkte nichtentartet seien, durch die, daß die kritischen Punkte eine Vereinigung von «nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten» bilden. Er konnte dann verallgemeinerte Morse-Ungleichungen herleiten. Man findet diese Theorie in (2) dargestellt, wo R. BOTT sie zum Beweis der Periodizitätssätze für die klassischen Gruppen benutzt.

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die von R. PALAIS gegebene Verallgemeinerung der Morse Theorie so abzuändern, daß sie auch bei Vorliegen von nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten anwendbar bleibt.

Das Ergebnis dieser Arbeit, i.e. diese Verallgemeinerung, ist nicht neu: A. WASSERMAN hat 1965 eine solche Verallgemeinerung in seinem Research-Anouncement (13) angekündigt. Auf meine Anfrage, ob die Beweise zu seiner Arbeit (13) schon erschienen seien, war Herr A. WASSERMAN so freundlich, mir seine unveröffentlichte Dissertation (14) zuzuschicken, in der sich Beweise zu (13) befinden. Die ersten drei Paragraphen der vorliegenden Arbeit wurden durch die Dissertation nicht beeinflußt, wohl aber der Paragraph vier.

Der Aufbau der vorliegenden Arbeit ist folgender:

In §0 und §1 entwickeln wir die benötigten Hilfsmittel für die Beweise in §2. Die bewiesenen Sätze sind elementar. Die systematische Verwendung der in § 1 entwickelten Operationen im Endomophismenbündel eines Vektorraumbündels zum Beweis des «Morse-Lemmas» in § 2 ist neu. In § 2 beschreiben wir den Diffeomorphietyp eines Paares (f^b, f^a) durch «Henkel». Die Beweise werden durch Verallgemeinerung der von R. PALAIS in der Arbeit (9) gegebenen geführt. In § 3 leiten wir einfache Folgerungen aus dem Hauptsatz von § 2 ab. Sie sind in dem Fall, daß alle vorkommenden Mannigfaltigkeiten endlich-dimensional sind von R. BOTT in (2) bewiesen worden.

Das Ergebnis von § 4, i.e. die Existenz einer «Morse-Funktion», deren kritische Menge nur aus den Bahnen einer kompakten Lie-Gruppe besteht, und der Beweis dieser Existenzaussage stammt von A. WASSERMAN (14).

§ 0. NOTATIONEN, DEFINITIONEN, VORBEREITUNGEN ÜBER VEKTORRAUMBÜNDEL

Im Text werden wir gelegentlich neue Begriffe ohne sprachlichen Zusatz durch die Schreibweise $A := B$ einführen. (*d.h.*: der Begriff A wird durch den bekannten Begriff B definiert).

Die Zeichen **N**, **Z**, **Q**, **R** und **C** benennen der Reihe nach die natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen. I_X (oder wenn kein Mißverständnis zu erwarten ist I) bezeichnet die identische Abbildung des Raumes X in X. Zur Definition der Begriffe Mannigfaltigkeit und Vektorraumbündel siehe (5). Unter einer Nulldimensionalen Mannigfaltigkeit verstehen wir einen Punkt. Untermannigfaltigkeiten tragen immer die induzierte Topologie. Wenn nicht ausdrücklich durch den Zusatz «berandet» angekündigt, bedeutet «Mannigfaltigkeit» immer «unberandete Mannigfaltigkeit». Wir betrachten nur Mannigfaltigkeiten der Klasse C^∞. Seien X und Y Mannigfaltigkeiten. Dann bezeichnen wir mit $C^\infty(X, Y)$ die Menge der Abbildungen von X in Y der Klasse C^∞. Die Elemente von $C^\infty(X, Y)$ heißen einfach auch differenzierbare Abbildungen. Ein Vektorraumbündel bezeichnen wir mit (E, π, M). E steht für den Totalraum, π für die Bündelprojektion und M für die Basis. Häufig identifizieren wir M mit dem Nullschnitt in E. Sei $e \in E$, $p := \pi(e)$. Dann schreiben wir statt e auch e_p, $E_p := \pi^{-1}(p)$. Eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ von M heißt trivialisierend für (E, π, M), wenn jedes U_α im Definitionsbereich einer Karte für M enthalten ist, und $E|_{U_\alpha}$ trivial ist. Zu solcher Überdeckung gibt es einen Atlas $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ für E mit $\varphi_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\simeq} V_\alpha \times B_\alpha$. Dabei ist B_α ein Banachraum, V_α eine offene Teilmenge eines Banachraumes, φ_α ein Diffeomorphismus, und es gilt $\varphi_\alpha(e_p) = (x_\alpha(p), \varphi_\alpha(p)(e_p))$, wobei $\varphi_\alpha(p) : \pi^{-1}(p) \to B_\alpha$ linear und x_α eine Karte für U_α ist. Unter einem Atlas für ein Vektorraumbündel werden wir immer solch einen speziellen Atlas verstehen. Eine Riemannsche oder Hermitesche Metrik für (E, π, M) wird mit $\langle\ ,\ \rangle$ bezeichnet, die zugehörige Norm mit $\|\ \|$. $\langle\ ,\ \rangle_p$,

$p \in M$, bezeichnet das durch $<\ ,\ >$ gegebene Skalarprodukt in $\pi^{-1}(p)$. $E(r) := \{e \in E / \| e \| \leq r,\ 0 \leq r \in \mathbf{R}\}$.

Sei G eine Liegruppe, die differenzierbar auf der Mannigfaltigkeit M operiert. Dann heißt M eine G-Mannigfaltigkeit. Wir schreiben die Operation $G \times M \to M$ in der Form $(g, x) \mapsto gx$ und fassen G als Teilmenge von $C^\infty(M, M)$ auf. Sei N eine weitere G-Mannigfaltigkeit. $f \in C^\infty(M, N)$ heißt equivariant (invariant) wenn für alle $g \in G$ $f \circ g = g \circ f$ $(f \circ g = f)$ gilt. $C^\infty_G(M, \mathbf{R})$ bezeichnet die Menge der invarianten reellen Funktionen auf M.

Sei (E, π, M) ein Vektorraumbündel und E eine G-Mannigfaltigkeit, so daß für alle $g \in G$ $g : E \to E$ ein Vektorraumbündelmorphismus ist. Dann heißt (E, π, M) ein G-Vektorraumbündel. Wenn (E, π, M) außerdem noch eine Metrik trägt, und G bezüglich dieser als Gruppe von Isometrien operiert, so heißt (E, π, M), ein Riemannsches G-Vektorraumbündel. Sei M eine G-Mannigfaltigkeit. Dann ist das Tangentialbündel durch die Operation $G \times TM \to TM$ mit $(g, v) \mapsto g_*(v)$ in natürlicher Weise ein G-Vektorraumbündel. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt Riemannsche G-Mannigfaltigkeit, wenn das Tangentialbündel von M ein Riemannsches G-Vektorraumbündel ist.

Sei (E, π, M) ein reelles Vektorraumbündel (d.h., die Fasern sind reelle Banachräume). Das Tensorprodukt dieses Bündels mit dem Bündel $(\mathbf{C} \times M, p_{r_2}, M)$ bezeichnen wir mit $(E \otimes \mathbf{C}, \pi_{\mathbf{C}}, M)$. Es heißt die Komplexifizierung von (E, π, M) und ist ein komplexes Vektorraumbündel mit Faser $\pi_{\mathbf{C}}^{-1}(p) = \pi^{-1}(p) \otimes \mathbf{C}$ über $p \in M$. $(E \otimes \mathbf{C}, \pi_{\mathbf{C}}, M)$ können wir als reelles Vektorraumbündel auffassen. Dann ist (E, π, M) in natürlicher Weise ein abgeschlossenes Untervektorraumbündel seiner Komplexifizierung. Wenn es klar ist, wie die Projektion und die Basis eines Bündels aussehen, so identifizieren wir es mit seinem Totalraum, etwa: TM bezeichnet das Tangentialbündel von M, $E \otimes \mathbf{C}$ die Komplexifizierung von E.

Seien (E, π, M), $(\acute{E}, \acute{\pi}, M)$ Vektorraumbündel. Dann gibt es in natürlicher Weise ein Bündel $HOM(E, \acute{E})$ über M, dessen Faser über $p \in M$ gerade die stetigen linearen Abbildungen von $\pi^{-1}(p)$ in $\acute{\pi}^{-1}(p)$ sind. Die C^∞ Schnitte dieses Bündels sind die fasertreuen Vektorraumbündelmorphismen von E in E. Wir schreiben $HOM(E, \mathbf{R})$ statt $HOM(E, \mathbf{R} \times M)$.

Wir übertragen nun einige einfache Sätze aus der Kategorie der Vektorräume in die der Vektorraumbündel.

0.1. SATZ. Sei (E, π, M) ein Vektorraumbündel und $P : E \to E$ eine differenzierbare, fasertreue, faserweise lineare Abbildung mit $P \circ P = P$.

Dann sind $P(E)$ und $(I - P)(E)$ in natürlicher Weise Untervektorraumbündel von E und die Abbildung $E \to P(E) \oplus (I - P)(E)$ mit $e \mapsto (P(e)) \oplus (I - P)(e)$ ist ein Diffeomorphismus.

Beweis: Sei $p \in M$. Dann gilt $E_p = P(E_p) \oplus (I - P)(E_p)$ und $P(E_p)$ und $(I - P)(E_p)$ sind abgeschlossene Banachräume. Nach ((5), III §3 Prop. 5,6) sind daher $P(E)$ und $(I - P)(E)$ in natürlicher Weise Untervektorraumbündel von E und die Sequenz

$$0 \to P(E) \hookrightarrow E \xrightarrow{I-P} (I - P)(E) \to 0$$

ist exakt. Die Abbildung $P : E \to P(E)$ zeigt, daß die Sequenz zerfällt, d.h.: es gilt die behauptete Summendarstellung.

q.e.d.

0.2. KOROLLAR. 1. $SYM(\overbrace{E \oplus \ldots \oplus E}^{r}, \mathbf{R})$, die Menge der symmetrischen Elemente von $HOM(\overbrace{E \oplus \ldots \oplus E}^{r}, \mathbf{R})$, ist ein Untervektorraumbündel von $HOM(E \oplus \ldots \oplus E, \mathbf{R})$.

2. Besitze (E, π, M) eine Riemannsche Metrik $< , >$. Dann ist $SAD(E, E)$, die Menge der bezüglich $< , >$ selbstadjungierten Elemente von $HOM(E, E)$, ein Untervektorraumbündel von $HOM(E, E)$.

3. $< , >$ induziert einen fasertreuen, faserweise linearen Diffeomorphismus $SAD(E, E) \to SYM(E \oplus E, \mathbf{R})$ der Form $T \mapsto < T(.), (.) >$.

Beweis: Zu 1. Setze $P(h)(e_1 \ldots, e_n) := \sum_{\sigma \in S_n} \frac{1}{n!} h(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ für $h \in HOM(E \oplus \ldots \oplus E, \mathbf{R})$, $(e_1, \ldots, e_n) \in E \oplus \ldots \oplus E$, so daß h darauf definiert ist, und S_n, die Gruppe der Permutationen von n Elementen. Dann folgt mit 0.1. die erste Behauptung.

Zu 2. Setze $P(T)(X) = T^*(X)$ für $T \in HOM(E, E)$ und $X \in E_{pr(T)}$ wobei p_r die Projektion in $HOM(E, E)$ bezeichnet und T^* das bezüglich $< , >_{pr(T)}$ in $HOM(E_{pr(T)}, E_{pr(T)})$ zu T adjungierte Element.

Es ist noch die Differenzierbarkeit von P nachzuweisen.

Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein Atlas für E, $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to V_\alpha \times B_\alpha$. Dann gibt es eine differenzierbare Abbildung (*) $G: V_\alpha \to SAD(B_\alpha, B_\alpha)$, so daß gilt: $< e_1, e_2 > = < G(x_\alpha(q)) \circ \varphi_\alpha(q)(e_1), \varphi_\alpha(q)(e_2) >_\alpha$ wobei $< , >_\alpha$ das innere Produkt von B_α bezeichnet, $\pi(e_1) = \pi(e_2) =: q$, und $G(p)$ für $p \in V_\alpha$ invertierbar ist. Sei $p_r(T) = q$, $A := \varphi_\alpha(q) \circ T \circ \varphi_\alpha^{-1}(q)$. Dann gilt: $< Te_1, e_2 > = < G(x_\alpha(q)) \circ A \circ \varphi_\alpha(q)(e_1), \varphi_\alpha(q)(e_2) >_\alpha =$ $< G(x_\alpha(q)) \circ \varphi_\alpha(q)(e_1), G(x_\alpha(q))^{-1} \circ A^* \circ G(x_\alpha(q)) \circ \varphi_\alpha(q)(e_2) >_\alpha =$ $< e_1, T^* e_2 >$. Die Abbildung $(p, A) \mapsto G(p)^{-1} \circ A^* \circ G(p)$ wobei "$*$" bezüglich $< , >_\alpha$ genommen wird, ist differenzierbar, denn Inversion ist eine C^∞-Abbildung und "$*$" linear. Daher ist auch P differenzierbar und wir können 0.1. anwenden.

Zu 3. Fasertreue und Linearität der von $< , >$ induzierten Abbildung sind klar. Lokal ist sie von der Form $g: V_\alpha \times SAD(B_\alpha, B_\alpha) \to$ $\to V_\alpha \times SYM(B_\alpha \times B_\alpha, \mathbf{R})$ mit $(p, T) \mapsto (p, < G(p) \circ T(.), (.) >_\alpha)$ und daher auch differenzierbar. Das Skalarprodukt induziert bekanntlich einen linearen Homöomorphismus $R: SAD(B_\alpha, B_\alpha) \to$ $SYM(B_\alpha \times B_\alpha, \mathbf{R})$. $(p, h) \mapsto (p, G(p)^{-1} \circ R^{-1}(h))$ ist die inverse Abbildung zu g. q.e.d.

Bemerkung: R. S. Palais ((9), § 9) definiert eine Metrik gerade so, daß sie die Eigenschaft (*) hat. Aus der üblichen Definition von $< , >$ läßt sich (*) leicht herleiten. Unter dem Diffeomorphismus in 3 entsprechen sich offenbar gerade die invertierbaren und nichtentarteten Elemente.

0.3. Satz (Taylorformel in Vektorraumbündeln).

Sei (E, π, M) ein Vektorraumbündel, $f \in C^\infty(E, \mathbf{R})$.

1. Dann gilt für alle $v, w \in E$ mit $\pi(v) = \pi(w)$ und alle $n \in \mathbf{N}$:

$$f(v+w) = f(v) + \frac{1}{1!} G_1(v)(w) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} G_{n-1}(v)(w, .., w) +$$

$+ R_n(v+w)(w, .., w)$, wobei die $G_i: E \to SYM(\overbrace{E \oplus \ldots \oplus E}^{i}, \mathbf{R})$ und $R_n: E \to SYM(\overbrace{E \oplus \ldots \oplus E}^{n}, \mathbf{R})$ differenzierbar und fasertreu sind.

2. Ferner gilt: $G_1(v)(w) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(f(v+tw) - f(v)\right)$ und

$$G_i(v)(w_1, \ldots w_i) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(G_{i-1}(v + tw_i)(w_1, \ldots, w_{i-1}) - G_{i-1}(v)(w_1, \ldots, w_{i-1})\right).$$

3. Wenn (E, π, M) ein G-Vektorraumbündel ist, und f invariant unter G ist, so gilt für alle $g \in G$:

$$G_i(g(v))(g(w_1), \dots g(w_i)) = G_i(v)(w_1, \dots, w_i)$$

und

$$R_n(g(v))(g(w_1), \dots, g(w_n)) = R_n(v)(w_1, \dots w_n).$$

Beweis: Die Faser durch v in E ist ein Banachraum. Daher gibt es eine Taylorformel der behaupteten Art, und G_i steht mit G_{i-1} in der behaupteten Relation 2. Hieraus folgt schon unmittelbar die Richtigkeit von 3. Es bleibt nur noch die Differenzierbarkeit der Abbildungen G_i und R_n nachzurechnen.

Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ein Atlas für E, $\varphi_\alpha(v) = (p, x)$, $\varphi_\alpha(w_i) = (p, y_i)$, $\varphi_\alpha(w) = (p, y)$ für v, w, $w_i \in E$. Nach der Taylorformel ist dann

$$f \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, x + y) = f \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, x) + \frac{1}{1!} D_2 f \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{(p,x)}(y) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{(n-1)!} D_2^{n-1} f \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{(p,x)} \underbrace{(y, \dots, y)}_{n-1} +$$

$$+ \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} D_2^n f \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{(p,x+ty)} \underbrace{(y, \dots, y)}_{n} \mathrm{dt}.$$

Da die richtigen Relationen 2. gelten, ist $G_i(v)(w, \dots, w) = D_2^i f \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{(p,x)} (y, \dots y)$ und hieraus folgt durch Polarisierung $R_n(v + w)(w_1, \dots, w_n) = \int_0^1 (\dots)|_{(p,x+ty)} (y_1, \dots y_n) \, \mathrm{dt}$. Aus der Differenzierbarkeit der Abbildung $V_\alpha \times B_\alpha \to V_\alpha \times SYM\, (\overbrace{B_\alpha \times \times B_\alpha}^{i}, \mathbf{R})$ mit $(p, x) \mapsto (p, D_2^i f \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{(p,x)})$ und Differentiation unter dem Integral folgt die Behauptung.

q.e.d.

§ 1. OPERATION VON FUNKTIONEN IM ENDOMORPHISMENBÜNDEL EINES VEKTORRAUMBÜNDELS

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Verallgemeinerung der elementaren Methoden der Spektraltheorie zu geben.

Diese wird im nächsten Paragraphen zum Beweis des Morse-Lemmas benötigt.

Bekanntlich setzt man für $T \in HOM(B, B)$ (B ist ein komplexer Banachraum mit Norm $\| \ \|$) fest:
$\mathrm{spek}(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} / (\lambda I - T)$ nicht stetig invertierbar$\}$. Das Spektrum ist kompakt und in einer Kugel vom Radius $\|T\|$ um den Nullpunkt enthalten.

Sei (E, π, M) ein komplexes Vektorraumbündel, $HOM(E, E)$ das zugehörige Endomorphismenbündel. Die Punkte von $HOM(E, E)$ sind Endomorphismen komplexer Banachräume, daher ist $\mathrm{spek}(T)$ für alle $T \in HOM(E, E)$ definiert.

Für jede Teilmenge U von $\mathbf{C}$ setzen wir fest:
$\mathrm{spek}^{-1}(U) := \{T \in HOM(E, E) / \mathrm{spek}(T) \subset U\}$.

Sei γ ein Zykel aus $\mathbf{C}$, $x \in \mathbf{C}$. Wir bezeichnen mit $n(\gamma, x)$ die Umlaufszahl von γ um x. $|\gamma|$ bezeichne die Menge der Punkte auf γ. Statt «$|\gamma|$ enthalten in G», wobei G eine Teilmenge von $\mathbf{C}$ ist, sagen wir auch «γ ist Zykel in G».

Wir benötigen folgende Existenzaussage:

1.1. Lemma. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbf{C}$, A eine kompakte Teilmenge von U.

Dann gibt es einen Zykel γ in U-A, so daß gilt: $n(\gamma, x) = 1$ für alle $x \in A$, und $n(\gamma, x) = 0$ für alle $x \in \complement U$.

Beweis: A und U haben einen positiven Abstand δ. Wir überdecken $\mathbf{C}$ durch die abgeschlossenen Würfel eines Gitters der Kantenlänge $\delta/2$. Da A kompakt ist, wird es nur von endlich vielen Würfeln $Q_1, \ldots, Q_r$ des Gitters getroffen. $\bigcup_{i=1}^{r} Q_i$ ist eine Umgebung von A. $\Gamma(Q_i)$ bezeichne den als Zykel aufgefaßten positiv orientierten Rand von Q_i, γ den durch «Weglassen» der doppelt durchlaufenen Strecken aus $\bar{\gamma} := \sum_{i=1}^{r} \Gamma(Q_i)$ entstehenden Zykel. Dann gilt $|\gamma| = \mathrm{Rand}\,(\bigcup_{i=1}^{r} Q_i) \subset U - A$, und $n(\gamma, x) = n(\bar{\gamma}, x)$ für alle $x \in \complement |\bar{\gamma}|$. Jedes $x \in A$ besitzt eine zusammenhängende Umgebung $U_x \subset \bigcup_{i=1}^{r} Q_i$, und es gibt ein $p \in U_x \cap \complement |\bar{\gamma}|$. Da $n(\gamma, x)$ für alle x aus einer Zusammenhangskomponente von $\complement |\gamma|$ konstant ist, gilt: $n(\gamma, x) = n(\gamma, p) = n(\bar{\gamma}, p) = 1$, denn p liegt in genau einem Quader des Gitters. Sei $x \in \complement U$. Dann ist auch $x \in \complement |\bar{\gamma}|$ und es gilt $n(\gamma, x) = n(\bar{\gamma}, x) = \sum_{i=1}^{r} n(\Gamma(Q_i), x) = 0$, da $x \in \complement Q_i$ für $i = 1, \ldots r$.

q.e.d.

1.2. Definition. Sei E ein komplexes Vektorraumbündel, U eine offene Teilmenge von $\mathbf{C}$, $f: U \to \mathbf{C}$ eine analytische Abbildung.

Wir definieren eine Abbildung f: $\text{spek}^{-1}(U) \to HOM(E, E)$ folgendermaßen: Sei $T \in \text{spek}^{-1}(U)$ und γ_T ein in U-spek(T) enthaltener Zykel derart, daß für alle $x \in \text{spek}(T)$ gilt: $n(\gamma_T, x) = 1$. und für alle $x \in \complement U$ gilt: $n(\gamma_T, x) = 0$.

$$f(T) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_T} f(\lambda)\,(\lambda I - T)^{-1}\, d\lambda.$$

1.3. Bemerkung zur Definition. Wir haben praktisch nur die für Banachräume übliche Definition wiederholt.

Da je zwei Zykeln γ_T und γ_T' der angegebenen Art homolog in U-spek(T) sind, und der Integrand in U-spek(T) analytisch ist ((15), VIII.1.), ist $f(T)$ nach dem Cauchyschen Integralsatz von der Auswahl des Zykels γ_T unabhängig.

Die Abbildung $T \mapsto \text{spek}(T)$ ist in gewissem Sinne stetig, denn es gilt:

1.4. Satz. Sei B ein komplexer Banachraum und U eine offene Teilmenge von $\mathbf{C}$.

Dann ist $\text{spek}^{-1}(U)$ offen in $HOM(B, B)$, ($HOM(B, B)$ trägt die Normtopologie).

Beweis: Sei $T_0 \in \text{spek}^{-1}(U)$, $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$. Dann ist $K := \{z \in \mathbf{C} / |z| \leq \|T_0\| + \varepsilon\}$ eine kompakte Umgebung von spek(T_0). Für alle $\mu \in K - U$ ist $(\mu I - T_0)$ invertierbar, also auch eine ganze Umgebung dieses Elements. Da die Abbildung $\mathbf{C} \times HOM(B, B) \to HOM(B, B)$ mit $(\mu, T) \mapsto \mu I - T$ stetig ist, gibt es zu jedem $\mu \in K - U$ eine offene Umgebung V_μ von μ in $\mathbf{C}$ und W_μ von T_0 in $HOM(B, B)$, so daß für alle $(\lambda, T) \in V_\mu \times W_\mu$ gilt: $\lambda \notin \text{spek}(T)$. Endlich viele der V_μ überdecken das kompakte $K - U$, sie seien mit $V_{\mu_1}, \ldots, V_{\mu_r}$ bezeichnet. Setze $W := \bigcap_{i=1}^{r} W_{\mu_i}$ und $V := W \cap \{T \in HOM(B, B) / \|T - T_0\| < \varepsilon\}$. Dann ist V eine Umgebung von T_0, deren Elemente ein in U enthaltenes Spektrum haben.

q.e.d.

Da das Bündel $HOM(E, E)$ lokal trivial ist, folgt sofort:

1.5. Korollar. $\text{spek}^{-1}(U)$ ist offen in $HOM(E, E)$ für U offen in $\mathbf{C}$.

1.6. Satz. Sei U offen in $\mathbf{C}$, $f: U \to \mathbf{C}$ analytisch, (E, π, M) ein komplexes Vektorraumbündel.

Dann ist $f : \text{spek}^{-1}(U) \to HOM(E, E)$ eine C^∞-Abbildung.

Beweis: Sei $T_0 \in \text{spek}^{-1}(U)$. Es gibt eine kompakte Umgebung A von $\text{spek}(T_0)$ mit $\text{spek}(T_0) \subset A \subset U$. Nach 1.1. gibt es einen Zykel γ in $U - A$ mit $n(\gamma, x) = 1$ für alle $x \in A$, und $n(\gamma, x) = 0$ für alle $x \in \complement U$. $V := \text{spek}^{-1}(\mathring{A})$ ist eine offene Umgebung von T_0 nach 1.5. Nach Bemerkung 1.3. können wir nun $f(T)$ für alle $T \in V$ mit Hilfe desselben Zykels γ definieren. Sei $U_\alpha \times HOM(B_\alpha, B_\alpha)$ Bild einer Umgebung von T_0 unter einer trivialisierenden Karte. Für klein genug gewähltes U_α und W, W offen in $HOM(B_\alpha, B_\alpha)$, müssen wir die Differenzierbarkeit der Abbildung $U_\alpha \times W \to U_\alpha \times \times HOM(B_\alpha, B_\alpha)$ mit

$$(p, T) \mapsto (p, \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\lambda) (\lambda I - T)^{-1} d\lambda)$$

nachweisen. Da der Integrand als Funktion von T differenzierbar und jede Ableitung in λ und T stetig ist, folgt die Behauptung durch Differentiation unter dem Integral.

q.e.d.

Für das Operieren von Funktionen in $HOM(E, E)$ gelten folgende Regeln:

1.7. Satz. Vor.: Sei (E, π, M) ein komplexes Vektorraumbündel, $A \in HOM(E, E)$, U offen in $\mathbf{C}$, $\text{spek}(A) \subset U$, $f, g : U \to \mathbf{C}$ analytisch, $\varphi, \beta \in \mathbf{C}$.

Beh.:
1. $(\varphi f + \beta g)(A) = \varphi f(A) + \beta g(A)$.
2. $(f \cdot g)(A) = f(A) \circ g(A)$.
3. $\text{spek}(f(A)) = f(\text{spek}(A))$.
4. Wenn g eine analytische Funktion in einer Umgebung von $f(\text{spek}(A))$ ist, so gilt $(g \circ f)(A) = g(f(A))$.
5. Wenn $\{f_n\}$ $n \in \mathbf{N}$ eine Folge von in U gleichmäßig gegen f konvergenten analytischen Funktionen ist, dann konvergiert $f_n(A)$ gegen $f(A)$. Insbesondere: wenn $g(\lambda) = \Sigma_{n=0}^\infty \alpha_n \lambda^n$ eine gleichmäßig in U konvergente Potenzreihe ist, so gilt $g(A) = \Sigma_{n=0}^\infty \alpha_n A^n$.
6. Wenn E eine Hermitesche Metrik $<\,,\,>$ besitzt, und A^* das bezüglich $<\,,\,>$ zu A adjungierte Element bezeichnet, so gilt: $\text{spek}(A) = \text{spek}(A^*)$ und $f(A^*) = f(A)^*$.

Beweis: Für den Fall, daß E ein Banachraum ist, sind die Behauptungen richtig ((15), VIII.6., 7.). Da die Fasern von E Banachräume sind, und das Operieren von Funktionen fasertreu ist, folgt daher die Richtigkeit unserer Behauptungen.

q.e.d.

Im Weiteren bezeichne E stets ein reelles Vektorraumbündel und $E \otimes \mathbf{C}$ seine Komplexifizierung. Wir haben eine kanonische Einbettung $i: HOM(E, E) \hookrightarrow HOM(E \otimes \mathbf{C}, E \otimes \mathbf{C})$, die durch $T \mapsto T \otimes I_{\mathbf{C}}$ gegeben ist.

Uns interessieren Operationen, die nicht aus $HOM(E, E) \otimes I_{\mathbf{C}}$ herausführen.

1.8. Definition. Sei $A \in HOM(E, E)$, Wir setzen spek(A): $=$ spek$(A \otimes I_{\mathbf{C}})$.

2. Sei $A \in HOM(E, E)$, spek$(A) \subset U$, U offen in $\mathbf{C}$, $f: U \to \mathbf{C}$ eine analytische Abbildung. Wenn es ein $B \in HOM(E, E)$ gibt, mit $f(A \otimes I_{\mathbf{C}}) = B \otimes I_{\mathbf{C}}$, so definieren wir $f(A) := B$.

Bemerkung: f ist wohldefiniert, denn i ist eine Einbettung.

1.9. Satz. Sei $A \in HOM(E, E)$, U offen in $\mathbf{C}$, spek$(A) \subset U$, Sei $f: U \to \mathbf{C}$ in U gleichmäßiger Limes einer Folge von Polynomen mit reellen Koeffizienten.

Dann ist $f(A)$ definiert.

Beweis: Sei $\{p_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ die gegen f konvergente Folge von Polynomen. Mit 1.7.5. folgt: $f(A \otimes I_{\mathbf{C}}) = \lim\limits_{n \to \infty} p_n(A \otimes I_{\mathbf{C}}) = \lim\limits_{n \to \infty} p_n(A) \otimes I_{\mathbf{C}}$, $\in HOM(E, E) \otimes I_{\mathbf{C}}$, denn $p_n(A) \otimes I_{\mathbf{C}} \in HOM(E, E) \otimes I_{\mathbf{C}}$, da p_n reelle Koeffizienten hat, und $HOM(E, E) \otimes I_{\mathbf{C}}$ ist ein abgeschlossener Teilraum von $HOM(E \otimes \mathbf{C}, E \otimes \mathbf{C})$.

q.e.d.

Über die gleichmäßige Approximation von analytischen Funktionen durch Polynome ist folgender Satz bekannt:

1.10. Satz (S.N. Mergelyan (6)).

Sei A eine kompakte Teilmenge von $\mathbf{C}$. Dann läßt sich jede stetige Abbildung $f: A \to \mathbf{C}$ derart, daß $f|\mathring{A}$ analytisch ist, genau dann auf A gleichmäßig durch komplexe Polynome approximieren, wenn $\mathbf{C} - A$ zusammenhängend ist.

Sei U eine Teilmenge von $\mathbf{C}$, $U^* := \{\bar{z} \in \mathbf{C} / z \in U\}$.

1.11. KOROLLAR. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbf{C}$, $U^* = U$, jede Zusammenhangskomponente von U treffe $\mathbf{R}$. Sei $f: U \to \mathbf{C}$ analytisch und $f(U \cap \mathbf{R}) \subset \mathbf{R}$.

Dann läßt sich f auf jeder kompakten Menge $A \subset U$ derart, daß $A = A^*$ und $\mathbf{C} - A$ zusammenhängend ist, gleichmäßig durch Polynome mit reellen Koeffizienten approximieren.

Beweis: Nach dem Spiegelungsprinzip gilt $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ für alle $z \in U$. Sei $\{p_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ die nach Satz 1.10. existierende gleichmäßig auf A gegen f konvergente Folge von Polynomen. Für alle $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$ gibt es ein $n \in \mathbf{N}$, so daß $\sup\limits_{z\in A} |f(z) - p_n(z)| < \varepsilon$. Dann ist aber auch $\sup\limits_{z\in A} |\overline{f(\bar{z})} - \overline{p_n(\bar{z})}| < \varepsilon$. Wegen $\overline{f(\bar{z})} = f(z)$ ist $\sup\limits_{z\in A} |\tfrac{1}{2}(\overline{p_n(\bar{z})} + p_n(z)) - f(z)| < \varepsilon$. Die Abbildung $z \mapsto \tfrac{1}{2}(\overline{p_n(\bar{z})} + p_n(z))$ ist aber ein reelles Polynom. q.e.d.

1.12. SATZ. Sei U eine offene Teilmenge von $\mathbf{R}$, $f: U \to \mathbf{R}$ eine analytische Abbildung und (E, π, M), ein reelles Vektorraumbündel.

Dann gibt es eine Umgebung W von $\mathrm{spek}^{-1}(U)$ in $HOM(E, E)$, so daß $f: W \to HOM(E, E)$ definiert ist. Ferner ist f eine C^∞-Abbildung, und es gelten Rechenregeln analog zu denen aus 1.7. (1.75. überträgt sich nicht).

Beweis: Sei $T \in \mathrm{spek}^{-1}(U)$ und $K \subset U$ eine kompakte Umgebung von $\mathrm{spek}(T)$ in $\mathbf{R}$. f läßt sich auf eine Umgebung V von K in $\mathbf{C}$ analytisch fortsetzen. Die Fortsetzung sei wieder mit f bezeichnet. (wir fassen $\mathbf{R}$ als Teilmenge von $\mathbf{C}$ auf) Wir finden eine kompakte Teilmenge A von $\mathbf{C}$ mit $K \subset \mathring{A} \subset A \subset V$, $A = A^*$ und der Eigenschaft, daß $\mathbf{C}$-A zusammenhängend ist, durch Überdecken von K mit genügend kleinen Kugeln aus $\mathbf{C}$. Nach Korollar 1.11, Satz 1.9. und Definition 1.8. ist f daher auf $\mathrm{spek}^{-1}(\mathring{A})$ definiert, und der erste Teil der Behauptung damit bewiesen.

Nach 1.6. haben wir eine differenzierbare Abbildung f: $\{T \in HOM(E \otimes \mathbf{C}, E \otimes \mathbf{C}) / \mathrm{spek}(T) \subset V\} \to HOM(E \otimes \mathbf{C}, E \otimes \mathbf{C})$. Stellt man f in lokalen Koordinaten dar, so kann man unmittelbar die Richtigkeit des ersten Teils der zweiten Behauptung ablesen, die Richtigkeit des zweiten Teils ist klar. q.e.d.

Sei (E, η, M) ein G-Vektorraumbündel, dann wird durch $T \mapsto g T g^{-1}$ für $T \in HOM(E, E)$ und $g \in G$ eine Operation von G auf $HOM(E, E)$ definiert.

1.13. SATZ. Sei (E, η, M) ein komplexes G-Vektorraumbündel. Seien $A,\ B : E \to HOM(E, E)$ equivariante fasertreue C^∞-Abbildungen und $\alpha,\ \beta \in \mathbf{C}$. Dann gilt:

1. $\alpha A + \beta\ B$ und $A \circ B$ sind equivariant.
2. Sei $f : U \to \mathbf{C}$ analytisch, U offen in $\mathbf{C}$, $V = A^{-1}(\text{spek}^{-1}(U))$. Dann ist $f(A|_V)$ equivariant, d.h.: für alle $g \in G$ und $e \in V$ ist $f(A\ (ge)) = g f(A\ (e))\ g^{-1}$.

Beweis: Die erste Behauptung ist trivial. Da A equivariant ist, gilt: $A(ge) = g\,A(e)g^{-1}$. Also folgt aus der Linearität von g: $\text{spek}(A\ (e)) = \text{spek}(A(g\,e))$ für alle $e \in V$ und $g \in G$, und es ist $f(A|_V)$ definiert. Die Abbildung $HOM(E, E) \to HOM(E, E)$ mit $T \mapsto gTg^{-1}$ ist für alle $g \in G$ stetig und linear, darf also unter ein Integral gezogen werden. Für $e \in V$ und geeignetes γ folgt daher:

$$g\,f\,(A\ (e))\,g^{-1} = g\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\lambda)\,(\lambda I - A\ (e))^{-1}\,d\lambda\right)g^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\lambda)\,(\lambda I - gA\ (e)\,g^{-1})^{-1}\,d\lambda = f\,(A\ (ge)).$$

q.e.d.

1.14. BEMERKUNG: Der Satz überträgt sich natürlich mit Voraussetzungen wie in Satz 1.12. auf reelle G-Vektorraumbündel.

§ 2. BESCHREIBUNG VON MANNIGFALTIGKEITEN DURCH HENKEL

DEFINITIONEN:

2.1. Sei M eine Riemannsche G-Mannigfaltigkeit. Wenn $f : M \to \mathbf{R}$ eine C^∞-Abbildung ist, so nennt man einen Punkt $p \in M$ mit $df_p = 0$ einen kritischen Punkt von f.

2.2. Ein Punkt $c \in \mathbf{R}$ heißt kritischer Wert von f, wenn es ein $p \in M$ gibt mit $f(p) = c$ und $df_p = 0$. Alle anderen Punkte von $\mathbf{R}$ heißen reguläre Werte von f.

2.3. Sei $df_p = 0$. Wir definieren eine Abbildung $H^f_p : T_p \times T_p \to \mathbf{R}$, die «Hessesche Bilinearform von f in p», folgendermaßen:

Seien $\widetilde{X}$, $\widetilde{Y}$ irgendwelche Fortsetzungen von X_p, $Y_p \in T_p$ zu Vektorfeldern in einer Umgebung von p. $H_p^f(X_p, Y_p) := X_p(\widetilde{Y}f)$. Mit $X_p(\widetilde{Y}f) - Y_p(\widetilde{X}f) = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_p f = 0$ folgt, daß H_p^f von den Fortsetzungen unabhängig, bilinear und symmetrisch ist. p heißt nichtentarteter kritischer Punkt von f, wenn die Bilinearform H_p^f nichtentartet ist.

BEMERKUNGEN: 2.4.

1. Die Menge der kritischen Punkte von f ist als Menge der Nullstellen von gradf : $M \to TM$ abgeschlossen.

2. Sei $\phi: N \to M$ eine C^∞-Abbildung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, $q \in N$, $df_{\phi(q)} = 0$. Dann gilt: $H_q^{f\circ\phi}(X, Y) = H^f{}_{\phi(q)}$ $(\phi_* X, \phi_* Y)$ für alle $X, Y \in T_q$, wie man leicht nachrechnet. Insbesondere ist bezüglich der lokalen Karte ϕ H_p^f gerade $D^2 f \circ \phi^{-1}|_{\phi(p)}$.

3. Nun sei f invariant unter G. Dann ist mit $p \in M$ auch gp für alle $g \in G$ kritisch, denn $df_{gp}(X \circ g) = X_{gp} f = g_*^{-1} X_{gp} f \circ g =$ $= g_*^{-1} X_{gp} f = df_p(g_*^{-1} X \circ g) = 0$ für jedes Vektorfeld X und alle $g \in G$. Es folgt auch, daß gradf ein equivariantes Vektorfeld ist, *d.h.*: $g_* \circ \text{gradf} = (\text{gradf}) \circ g$, denn es gilt: $< g_* \circ \text{gradf}_p, X \circ g > =$ $= < g_*^{-1} \circ g_* \circ \text{gradf}_p, g_*^{-1} X \circ g > = < \text{gradf}_p, g_*^{-1} X \circ g > =$ $= df_p(g_*^{-1} X \circ g) = df_{gp}(X \circ g) = < \text{gradf}_{gp}, X \circ g >$ für alle Vektorfelder X, $g \in G$, $p \in M$.

4. Sei $f \in C_G^\infty(M, \mathbf{R})$, und sei $\sigma(p): (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ die Integralkurve von gradf durch p, $p \in M$. ((5), IV, § 2), *d.h.*: $\sigma(p)(0) = p$, $\sigma(p)_*|_0 \left(\frac{d}{dt}\right) = \text{gradf}_p$, wobei $\frac{d}{dt}$ das Einheitstangentenvektorfeld in $T\mathbf{R}$ bezeichnet. Dann gilt: $\sigma(gp)_*|_0 \left(\frac{d}{dt}\right) = \text{gradf}_{gp} = g_* \circ \text{gradf}_p =$ $g_* \circ \sigma(p)_*|_0 \left(\frac{d}{dt}\right)$ und $g\,\sigma(p)(o) = gp = \sigma(gp)(o)$ für alle $g \in G$. Da es zu grad (fog) durch p genau eine Integralkurve gibt, gilt $g\sigma(p) = \sigma(gp)$.

DEFINITIONEN:

2.5. Sei $N \subset M$ eine Untermannigfaltigkeit von M, die nur aus kritischen Punkten von f besteht. Dann heißt N kritische Mannigfaltigkeit von f.

2.6. Sei $f \in C_G^\infty(M, \mathbf{R})$. Eine Teilmenge N von M heißt nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit von f, wenn gilt:

1. N ist eine abgeschlossene unter G invariante kritische Manningfaltigkeit von f. f ist auf N konstant.

2. N enthält keine inneren Punkte.

3. Für alle $p \in N$ ist TN_p das Radikal bezüglich $H_p{}^f$ von TM_p.

2.7. Bemerkung: 1. TN_p wird in 2.6.3. als Teilmenge von TM_p aufgefaßt.

2. Wenn N eine aus kritischen Punkten von f bestehende Untermannigfaltigkeit von M ist, so ist TN_p bezüglich $H_p{}^f$ orthogonal zu TM_p, denn für alle Vektorfelder Y auf M gilt $Yf|_N = 0$, also auch $X_p(Yf) = 0$ für alle $X_p \in TN_p$.

2.8. Wir untersuchen nun das Verhalten der Funktion f in der Nähe ihrer nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeit N. Zu N gibt es eine Tubusumgebung U in M ((5), IV, § 5), *d.h.*: es gibt eine Umgebung V des Nullschnitts in $\nu(N)$, dem Normalenbündel von N in M, so daß die von der Metrik herkommende Exponentialabbildung exp diese Umgebung diffeomorph auf U abbildet. Wenn M eine Riemannsche G-Mannigfaltigkeit ist, so ist $\exp: \nu(N) \to M$ equivariant, denn für jede Isometrie g von M gilt: $\exp \circ g_* = g \circ \exp$ ((4), 3.5.(15)). Den durch exp gegebenen Diffeomorphismus bezeichnen wir mit t_N. $\nu(N)$ ist als Untervektorraumbündel von TM ein Riemannsches G-Vektorraumbündel und mit 2.4.2 sieht man, daß N eine nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit der invarianten Abbildung $f \circ t_V: V \to \mathbf{R}$ ist. Wir werden daher zunächst Funktionen auf Vektorraumbündeln untersuchen, die den Nullschnitt als nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit haben.

Die Bedeutung von 2.6.3. wird durch folgendes Lemma klarer:

2.9. Lemma. Vor.: Sei (E, π, M) ein Vektorraumbündel, $f \in C^\infty(E, \mathbf{R})$, M eine kritische Mannigfaltigkeit von f und $f(M) = \{0\}$. $i_p: E_p \hookrightarrow E$ bezeichne die Inklusion der Faser über $p \in M$, $f(e) = R(e)(e, e)$ für $e \in E$ sei die Entwicklung von f nach der Taylorformel 0.3.

Beh. : 1. M ist nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow$ für alle $p \in M$ ist $O_p \in E_p$ nichtentarteter kritischer Punkt von $f \circ i_p : E_p \to \mathbf{R}$.

2. $R(O_p)(e_1, e_2) = \frac{1}{2} H_0^{f \circ i_p}(e_1, e_2)$ für alle $e_1, e_2 \in E_p$, (hierbei ist, wie üblich, der Tangentialraum im Punkte O_p des Vektorraums E_p mit E_p identifiziert worden).

Beweis: Beide Behauptungen sind lokaler Natur. Wir können daher annehmen, daß $E = U \times B_2$ ist, wobei U eine offene Teilmenge von B_1 ist, und B_1, B_2 Banachräume sind. Dann hat H^f die Form: $H^f : (U \times O) \times (B_1 \times B_2) \times (B_1 \times B_2) \to \mathbf{R}$ mit $((u, o), (a_1, a_2), (b_1, b_2)) \mapsto D_1^2 f|_{(u,0)} (a_1, b_1) + D_2 D_1 f|_{(u,0)} (a_1, b_2) + D_1 D_2 f|_{(u,0)} (a_2, b_1) + D_2^2 f|_{(u,0)} (a_2, b_2)$. Da U kritische Mannigfaltigkeit von f ist, gilt $df|_U = 0$. Daher sind die ersten drei Summanden Null, und es folgt die erste Behauptung. In unserer lokalen Darstellung entspricht O_p dem Punkt (u, o), e_1, e_2 den Punkten (u, a_2), (u, b_2). Aus der Integraldarstellung des Restgliedes im Beweis von 0,3. liest man ab: $R(u, o)((u, a_2), (u, b_2)) = \frac{1}{2} D_2^2 f|_{(u,0)} (a_2, b_2)$. Da $H_0^{f \circ i_u}(a_2, b_2) = D_2^2 f|_{(u,0)} (a_2, b_2)$ ist, folgt die zweite Behauptung. q.e.d.

Das folgende Lemma, eine Verallgemeinerung des klassischen Morse-Lemmas, gibt die gesuchte Beschreibung einer Funktion in der Nähe ihrer nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeit. Der vorliegende Beweis ist mit den Hilfsmitteln von § 1 dem von PALAIS ((9), § 7) für den Fall, daß E ein Hilbertraum ist, gegebenen Beweis nachgebildet.

2.10. MORSE-LEMMA. Sei (E, π, M) ein Riemannsches G-Vektorraumbündel, $f \in C_G^\infty(E, \mathbf{R})$, $f(M) = \{0\}$ und M eine kompakte nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit von f.

Dann gibt es eine unter G invariante Umgebung U von M in E und einen fasertreuen, equivarianten Diffeomorphismus $\theta : U \to E$ von U mit $\theta(U)$ und eine fasertreue, equivariante, lineare, selbstadjungierte, differenzierbare Abbildung $P : E \to E$ mit $P \circ P = P$, so daß für alle $e \in U$ gilt: $f \circ \theta(e) = \| P(e) \|^2 - \| (I - P)(e) \|^2$.

Beweis : Nach der Taylorformel 0.3. gilt für alle $e \in E$ $f(e) = R(e)(e, e)$ mit differenzierbarem $R : E \to SYM(E \oplus E, \mathbf{R})$. Wegen Korollar 0.2.3. gibt es eine differenzierbare Abbildung $A : E \to \to SAD(E, E)$ mit $R(e)(e_1, e_2) = < A(e)(e_1), e_2 >$ für alle (e, e_1, e_2)

$\epsilon E \oplus E \oplus E$,. Nach Lemma 2. 9, und der Bemerkung zum Korollar 0.2. ist für alle $p \epsilon M$ $A(O_p)$ invertierbar. Da A stetig ist, und die Menge der invertierbaren Elemente in $SAD(E, E)$ offen ist, gibt es eine Umgebung Q von M in E, so daß die Abbildung $Q \to SAD(E, E)$ mit $e_p \mapsto A(e_p)^{-1}$ definiert und differenzierbar ist. Definiere B: $Q \to HOM(E, E)$ durch $B(e_p) := A(e_p)^{-1} \circ A(o_p)$. Die Abbildung $(o, \infty) \to \mathbf{R}$ mit $t \mapsto t^{1/2}$ ist analytisch. Sei W die nach Satz 1.12. gewählte offene Umgebung von $\text{spek}^{-1}(o, \infty)$ in $HOM(E, E)$, $V := Q \cap B^{-1}(W)$.

Dann ist nach 1.12. die Abbildung $C: V \to HOM(E, E)$ mit $C(e_p) := B(e_p)^{1/2}$ definiert und differenzierbar. V ist eine Umgebung von M in E, denn $\text{spek}(B(o_p)) = \{1\}$ für alle $p \epsilon M$. $C(e_p)$ ist invertierbar für alle $e_p \epsilon V$ nach 1.7.3. Da $A(e_p)$ und $A(0_p)$ selbstadjungiert sind, ist $B(e_p)^* \circ A(e_p) = A(o_p) = A(e_p) \circ B(e_p)$, also auch $B(e_p)^* = A(e_p) \circ B(e_p) \circ A(e_p)^{-1}$.

Nach 1.7.6. und demselben Argument wie im Beweis von 1.13.2. ist $(B(e_p)^{1/2})^* = (B(e_p)^*)^{1/2} = A(e_p) \circ B(e_p)^{1/2} \circ A(e_p)^{-1}$, und es folgt $C(e_p)^* \circ A(e_p) \circ C(e_p) = A(e_p) \circ B(e_p) = A(o_p)$. Mit der Definition von $C_1: V \to HOM(E, E)$ durch $C_1(e_p) := C(e_p)^{-1}$ erhalten wir $A(e_p) = C_1(e_p)^* \circ A(o_p) \circ C_1(e_p)$ und damit $f(e_p) = < A(o_p) \circ C_1(e_p)(e_p), C_1(e_p)(e_p) >$, und natürlich ist C_1 differenzierbar. Die Abbildung $\psi: V \to E$ mit $e \mapsto C_1(e)(e)$ ist ein Diffeomorphismus von V auf $\psi(V)$, wenn nur V eine genügend kleine Umgebung von M ist. ψ ist nach Konstruktion fasertreu. Daher hat ψ lokal die Form ψ: $X \times Y \to B_1 \times B_2$ mit $(p, h) \mapsto (p, F(p, h)(h))$, wobei X offen in B_1, Y offen in B_2 ist, B_1, B_2 Banachräume sind, und F linear im dritten Argument ist. Es gilt: $d\psi|_{(p,o)}(v, w) = (v, F(p, o)(w))$. Da $F(p, o)$ invertierbar ist, folgt die Invertierbarkeit von $d\psi|_V$ und daraus unter Benutzung der Fasertreue von ψ die Injektivität von $\psi|_V$ und schließlich auch die globale differenzierbare Umkehrbarkeit von ψ auf $\psi(V)$ für genügend kleines V. Es gilt also $f \circ \psi^{-1}(e_p) = < A(o_p)(e_p), e_p >$. Die Abbildungen h, t: $\mathbf{R} - \{O\} \to \mathbf{R}$ mit $h(x) = 1$ für $x \geq o$, $h(x) = 0$ für $x < 0$ und $t(x) = |x|^{-\frac{1}{2}}$ sind analytisch. Wir können, da $\text{spek}(A(o_p)) \subset \mathbf{R} - \{O\}$ für alle $p \epsilon M$ ($A(o_p)$ ist selbstadjungiert), daher mit 1.12. differenzierbare Abbildungen P, T: $M \to HOM(E, E)$ durch $p \mapsto P_p := h(A(o_p))$ und $p \mapsto t(A(o_p)) =: T_p$ definieren. Wegen $x \cdot t(x)^2 = h(x) - (1 - h(x))$ gilt nach 1.7.1. und 1.7.2. $A(o_p) \circ T_p{}^2 = P_p - (I - P_p)$.

Nach 1.7.2. ist $P_p \circ P_p = P_p$ und T_p kommutiert mit $A(o_p)$. Nach 1.7.3. ist T_p invertierbar, und nach 1.7.6. ist T_p selbstadjungiert.

Sei T^{-1} für alle $e_p \in E$ durch $e_p \mapsto T_p{}^{-1}(e_p)$ definiert, Dann gilt für alle $e_p \in \widetilde{U} := T^{-1}(\psi(V)) : f(\psi^{-1} \circ T_p(e_p)) = < A(o_p) \circ T_p(e_p), T_p(e_p) > = < A(o_p) \circ T_p{}^2(e_p), e_p > = < P_p(e_p), e_p > - < (I - P_p)(e_p), e_p > = \| P_p(e_p) \|^2 - \| (I - P_p)(e_p) \|^2$, wie man durch Einsetzen von $e_p = P_p(e_p) + (I - P_p)(e_p)$ sieht. Definiere $\theta : \widetilde{U} \to E$ durch $e_p \mapsto \theta(e_p) := \psi^{-1} \circ T_p(e_p)$. θ ist als Zusammensetzung von Diffeomorphismen ein Diffeomorphismus von $\widetilde{U}$ auf $\theta(\widetilde{U})$. Da M kompakt ist, gibt es ein $r > o$, so daß $U := \{e \in E / \| e \| < r\} \subset U$. U ist offen in E, und da G als Gruppe von Isometrien operiert, invariant unter G.

Wir zeigen noch, daß $\theta : U \to E$ equivariant ist. Es gilt nach 0.3.3. : $R(ge)(ge_1, ge_2) = R(e)(e_1, e_2)$ für alle $(e, e_1, e_2) \in E \oplus E \oplus E$ mit $e \in U$ und für alle $g \in G$. Daher ist $< A(ge)(ge_1), ge_2 > = < A(e)(e_1), e_2 >$, und da G als Gruppe von Isometrien operiert, folgt $A(ge) = gA(e)g^{-1}$ *d.h.*: A ist equivariant. Nach 1.13. ist dann auch C_1 equivariant, und wir erhalten $\psi(ge_p) = C_1(ge_p)(ge_p) = g\, C_1(e_p)(e_p) = g \circ \psi(e_p)$ und $\theta(ge_p) = \psi^{-1} \circ t\,(A(o_{gp}))(ge_p) = \psi^{-1} \circ g \circ t\,(A(o_p))(e_p) = g \circ \theta(e_p)$ unter Benutzung von $A(o_{gp}) = A(go_p) = gA(o_p)g^{-1}$ und 1.13.

Aus den letzten Gleichungen folgt auch leicht die Equivarianz von P. Damit ist das Morse-Lemma vollständig bewiesen.

q.e.d.

Bemerkung: 2.9. und 2.10. bleiben richtig, wenn f nur in einer Umgebung von M in E definiert ist.

Sei (E, π, M) ein Riemannsches Vektorraumbündel. Wir setzen $\overset{\circ}{\widehat{E(r)}} := \{e \in E / \| e \| < r\}$ und $\overset{\bullet}{\widehat{E(r)}} := \{e \in E / \| e \| = r\}$ für $o \leq r \in \mathbf{R}$.

Seien X, Y topologische Räume, A eine Teilmenge von X und $f : A \to Y$ stetig. $Y \cup_f X := Y \cup X / \{a \sim f(a)\}$ versehen mit der Quotiententopologie. Die kanonischen Abbildungen $Y \to Y \cup_f X$ und $X \to Y \cup_f X$ schreiben wir in der Form $y \mapsto [y]$ bzw. $x \mapsto [x]$.

2.10. Definition. Seien V, W Riemannsche G-Vektorraumbündel mit Basis B. Dann heißt $V(1) \oplus W(1) := \{(x, y) \in V \oplus W / \| x \| \leq 1, \| y \| \leq 1\}$ mit induzierter Topologie ein Henkel vom Typ (V, W).

$V(1) \oplus W(1)$ ist im allgemeinen keine differenzierbare Mannigfaltigkeit, wohl aber $V(1) \oplus \overset{\bullet}{\widehat{W(1)}}$ und $V(1) \oplus \overset{\circ}{\widehat{W(1)}}$.

2.11. DEFINITION. Sei N eine kompakte nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit von $f \in C_G^\infty(M, \mathbf{R})$. Dann haben wir nach 2.8. und dem Morse-Lemma 2.10. eine Projektion P in $\nu(N)$ und nach 0.1. Bündel $P(\nu(N))$ und $(I - P)(\nu(N))$. Da N unter G invariant ist und P equivariant ist, sind beide Bündel G-Vektorraumbündel. Einen Henkel vom Typ $(P(\nu(N)), (I - P)(\nu(N))$ bezeichnen wir mit (N, f).

$(I - P)(\nu(N)) =: (N)_f^-$ heißt das negative Normalenbündel von N. Wenn alle Fasern von $(N)_f^-$ isomorph sind, so bezeichnen wir mit Index (N, f) die Dimension der Fasern von $(N)_f^-$.

Aus der Definition von P im Morse-Lemma liest man ab, daß im Falle endlicher Faserdimension von $\nu(N)$, die Faser von $(N)_f^-$ über $p \in N$ gerade von den Eigenvektoren von $A(o_p)$ zu negativen Eigenwerten aufgespannt wird.

Sei nun N eine berandete Mannigfaltigkeit und $f: V(1) \oplus \overset{\bullet}{\widehat{W(1)}} \to \partial N$ ein Diffeomorphismus auf sein Bild. Der topologische Raum $M := N \cup_f V(1) \oplus W(1)$ entspricht dann anschaulich dem aus N durch Ankleben eines Henkels konstruierten Raum. Unglücklicherweise hat dieser Raum nur im Komplement der «Ecken» $\overset{\bullet}{\widehat{V(1)}} \oplus \overset{\bullet}{\widehat{W(1)}}$ eine natürlich bestimmte differenzierbare Struktur. Daher definiert man:

2.12. DEFINITION. Seien V, W Riemannsche G-Vektorraumbündel mit Basis B, M, N berandete G-Mannigfaltigkeiten. Sei $N \subset M$, N trage von M induzierte Topologie und sei in M abgeschlossen. $F: V(1) \oplus W(1) \to M$ sei ein Homöomorphismus auf h, eine abgeschlossene Teilmenge von M.

Wir schreiben $M = N \cup_F V(1) \oplus W(1)$ und sagen, M entsteht aus N durch equivariantes Ankleben eines Henkels vom Typ (V, W), wenn gilt:

1. $M = N \cup h$ mengentheoretisch.
2. $F|_{V(1) \oplus \overset{\bullet}{\widehat{W(1)}}}$ ist ein equivarianter Diffeomorphismus auf $\partial N \cap h$.
3. $F|_{V(1) \oplus \overset{\circ}{\widehat{W(1)}}}$ ist ein equivarianter Diffeomorphismus auf $M - N$.

2.13. Bemerkungen

1. Offenbar ist $N \cup_F V(1) \oplus W(1)$ homöomorph zu dem topologischen Raum $N \smile_{F|_{V(1) \oplus \dot{\widehat{W(1)}}}} V(1) \oplus W(1)$.

2. Sei $\varphi : N \to N'$ ein equivarianter Diffeomorphismus. Sei $M' := \varphi(N) \smile_{\varphi \circ F|_{V(1) \oplus \dot{\widehat{W(1)}}}} V(1) \oplus W(1)$ als topologischer Raum, und sei $\phi : M \to M'$ durch $x \mapsto [\varphi(x)]$ für $x \in N$ und $x \mapsto [F^{-1}(x)]$ für $x \in h$ gegeben. ϕ ist offenbar ein equivarianter Homöomorphismus von M auf M' und definiert daher eine differenzierbare Struktur auf M'. Man verifiziert leicht, daß mit dieser Struktur gilt: $M' = \phi(N) \smile_{\phi \circ F} V(1) \oplus W(1)$. Das «Ankleben» ist also funktoriell in dem Raum, an den geklebt wird.

Wenn von vornherein der Diffeomorphismus $\phi : M \to M'$ gegeben ist, so gilt natürlich auch $M' = \phi(N) \smile_{\phi \circ F} V(1) \oplus W(1)$.

3. Der Begriff des Anklebens ist in dem Sinne lokal, daß, wenn Q eine offene Umgebung von h in M ist, die Äquivalenz gilt: $Q = N \cap Q \cup_F V(1) \oplus W(1) \Leftrightarrow M = N \cup_F V(1) \oplus W(1)$.

Der Zusammenhang zwischen nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten und dem Ankleben von Henkeln wird durch folgendes Lemma von Palais ((9), § 11, Theorem) hergestellt:

2.14. Klebe-Lemma. Sei (E, π, B) ein Riemannsches G-Vektorraumbündel, $P : E \to E$ differenzierbar, fasertreu, linear und equivariant mit $P \circ P = P$, $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine C^∞-Abbildung mit $\lambda|_{(-\infty, \frac{1}{2})} = 1$ und $\lambda|_{(1,\infty)} = 0$. Sei λ monoton nicht steigend und $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$.

Dann gilt für die differenzierbaren Abbildungen $g, f : E \to \mathbf{R}$ mit $f(e) := \| P(e) \|^2 - \| (I - P)(e) \|^2$ und $g(e) = f(e) - \frac{3\varepsilon}{2} \lambda(\| P(e) \|^2 / \varepsilon)$ für $e \in E$:

1. f und g haben B als einzige nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit.

2. $M := \{e \in \overset{\circ}{\widehat{E(2\varepsilon)}} \mid g(e) \leq -\varepsilon\}$ entsteht aus $N := \{e \in \overset{\circ}{\widehat{E(2\varepsilon)}} \mid f(e) \leq -\varepsilon\}$ durch equivariantes Ankleben eines Henkels vom Typ $(P(E), (I - P)(E))$.

Beweis: 1. Sei $(e, e_1) \in E \oplus E$, $c: \mathbf{R} \to E$ durch $t \mapsto e + te_1$. definiert. Es gilt (*): $dg|_e \left(c_*|_0 \left(\frac{d}{dt}\right)\right) = \frac{d}{dt}|_0 g \circ c = 2 < P(e), P(e_1) > + - 2 < (I - P)(e), (I - P)(e_1) > - 3 \lambda' (\| P(e) \|^2/\varepsilon) < P(e), P(e_1) >$. Setze $e_1 := P(e) - (I - P)(e)$. Dann folgt unter Berücksichtigung der Monotonie von λ, daß alle kritischen Werte von g auf B liegen Nun ist für alle $p \in B$ $TE_{o_p} = TB_p \oplus T(E_p)_0$, und g ist auf B konstant. Daher folgt mit (*), daß alle Punkte von B kritische Punkte von g sind. B ist nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit von g, denn aus (*) folgt sofort, daß für alle $e \in E_p$ gilt: $H^{goi_p}_{O_p}(e, P(e) + - (I - P)(e)) = 2 \| e \|^2$. Es impliziert also $H^{goi_p}_{O_p}(e, e_1) = 0$ für alle e_1 auch $e = 0$. Mit 2.9.1. folgt hieraus die Behauptung für g. Für f ergibt sich aus diesem Beweis einer, wenn wir stets $\lambda = 0$ setzen.

Zu 2. Da $f^{-1}(\{-\varepsilon\})$ und $g^{-1}(\{-\varepsilon\})$ B nicht treffen, und nach dem ersten Teil alle kritischen Punkte von f und g in B liegen, ist $-\varepsilon$ regulärer Wert von f und g. Nach ((9), § 7, Smoothness Theorem) folgt, daß M und N berandete Untermannigfaltigkeiten von $\overset{\circ}{\widehat{E(2\varepsilon)}}$ sind. Es ist $g \leq f$, daher ist $N \subset M$. Da beide Mannigfaltigkeiten die von E induzierte Topologie tragen, besitzt N die von M induzierte Topologie, und offenbar ist N abgeschlossen in M. Sei nun $\sigma(s)$ die eindeutig bestimmte Lösung von $\lambda(\sigma(s))/1 + \sigma(s) = \frac{2}{3}(1 - s)$ für $s \in [o, 1]$. Wir definieren $F: P(E)(1) \oplus (I - P)(E)(1) \to \overset{\circ}{\widehat{E(2\varepsilon)}}$ durch $(x, y) \mapsto (\varepsilon \cdot \sigma(\| x \|^2) \cdot \| y \|^2 + \varepsilon)^{1/2} x + (\varepsilon \cdot \sigma(\| x \|^2))^{1/2} y$ und setzen $h := \{e \in E / f(e) \geq -\varepsilon, g(e) \leq -\varepsilon\}$. h ist eine abgeschlossene Teilmenge von M. In ((9), § 11) wird nachgerechnet, daß dann $M = N \underset{F}{\cup} P(E) \oplus (I - P)(E)$ gilt. Die Equivarianz der Einschränkungen von F auf $P(E)(1) \oplus \overset{\circ}{\widehat{(I - P)(E)(1)}}$ und $P(E)(1) \oplus \overset{\circ}{\widehat{(I - P)(E)(1)}}$ folgt aus der Definition von F sofort, da G jede Faser von E linear und isometrisch abbildet.

q.e.d.

2.15. Definition. Sei M eine Riemannsche G-Mannigfaltigkeit. $f \in C^\infty_G(M, \mathbf{R})$ heißt Morse-Funktion, wenn gilt:

1. Die Menge der kritischen Punkte von f ist eine Vereinigung von nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten.

2. f erfüllt die Bedingung (C), *d.h.:* Wenn f auf einer Teilmenge S von M beschränkt ist, und $\| \mathrm{grad} f \|$ auf S nicht durch ein positives $\alpha \in \mathbf{R}$ nach unten beschränkt ist, dann gibt es einen kritischen Punkt von f im Abschluß von S in M.

Sei $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, $r \in \mathbf{R}$. Wir verwenden die Abkürzung $f^r := \{p \in M / f(p) \leq r\}$.

Der folgende, im wesentlichen von R. Bott (2) stammende Satz, ist das Kernstück der verallgemeinerten Morse Theorie.

2.16. Hauptsatz. Vor.: Sei M eine vollständige Riemannsche G-Mannigfaltigkeit, $f \in C^\infty_G(M, \mathbf{R})$ eine Morse-Funktion, und seien $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a < b$.

Beh.: 1. Die kritischen Punkte von f in $f^{-1}[a, b]$ bilden eine endliche Vereinigung von kompakten, isolierten, nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten. Die kritischen Werte von f liegen isoliert.

2. Wenn $f^{-1}[a, b]$ keine kritischen Punkte von f enthält, so ist f^b equivariant diffeomorph zu f^a.

3. Sei $a < c < b$, c einziger kritischer Wert von f in $[a, b]$. Seien $N_1, \dots N_r$ die nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten von f in $f^{-1}[a, b]$. Dann ist f^b equivariant diffeomorph zu $f^a \underset{F_1}{\cup} (N_1, f) \underset{F_2}{\cup} \dots \underset{F_r}{\cup} (N_r, f)$, wobei die Henkel disjunkt an f^a mit geeigneten F_i geklebt werden.

Beweis: Zu 1. Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Folge kritischer Punkte von f in $f^{-1}[a, b]$. Nach der Bedingung (C) besitzt die Folge einen Häufungspunkt. Daher ist die Menge der kritischen Punkte in $f^{-1}[a, b]$ kompakt.

Sei N eine nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit aus $f^{-1}[a, b]$. Da $\overset{\circ}{N} = \phi$ ist, besteht $\nu(N)$ nicht nur aus Nullvektoren und ist, da N invariant unter G ist, ein G-Vektorraumbündel. Nach 2.8. und 2.10. gilt $f \circ t_N \circ \theta(e) = \| P(e) \|^2 - \| (I - P)(e) \|^2$ für e aus einer Umgebung V von N in $\nu(N)$. Da nach 2.14. N die Menge der kritischen Punkte von $f \circ t_N \circ \theta$ in V ist, enthält die Umgebung $t_N \circ \theta(V)$ von N in M außer den Punkten von N keine weiteren kritischen Punkte. Die kritischen Mannigfaltigkeiten liegen also isoliert.

Sei $\{N_i\}_{i \in I}$ die Menge der nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten in $f^{-1}[a, b]$. Wir wählen eine Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in N_{i_n}$ welche $o.B.d.A.$ konvergent gegen $a \in N_{i_0}$ sei. Da N_{i_0} eine offene Umgebung besitzt, die kein N_i, $i \neq i_0$, trifft, liegen fast alle a_n in N_{i_0}. Es können also nur endlich viele der N_i verschieden sein. Jedes kompakte Intervall enthält daher auch nur endlich viele kritische Werte, also häufen sich diese nicht.

Zu 2. Da die kritischen Werte von f isoliert liegen, gibt es zu $[a, b]$ ein $\delta > 0$, so daß $\operatorname{gradf}_p \neq 0$ für alle $p \in f^{-1}(a - \delta, b + \delta)$. In ((9), § 10, Proposition (2)) wird gezeigt, daß man in dieser Situation den Transversalitätssatz ((9), § 8) anwenden kann, und dieser liefert den gesuchten Diffeomorphismus $H: f^{-1}(-\infty, b] \to f^{-1}(-\infty, a]$ mit $H | f^{-1}(-\infty, a - \delta/2] = I$ und $H(p) = \sigma(p)(\alpha \circ f(p))$ für $p \in f^{-1}[a - \delta/2, b]$, wobei $t \mapsto \sigma(p)(t)$ die für gewisse $t \in \mathbf{R}$ definierte Integralkurve von gradf durch p ist, und $\alpha: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ eine geeignete C^∞ -Abbildung. Wegen $f(gp) = f(p)$ und $\sigma(gp) = g\sigma(p)$ nach 2.4.4. für alle $g \in G$ ist H equivariant.

Zu 3. $o.B.d.A.$ sei $c = o$. Sei für $i = 1, \ldots, r$ U_i eine Tubusumgebung von N_i in $f^{-1}(a, b)$. Die U_i seien disjunkt. Nach 2. sind die N_i kompakt. Es gibt daher ein $\delta > 0$, so daß die Darstellung $f \circ t_{N_i} \circ \theta_i(v) = \| P_i(v) \|^2 - \| (I - P_i)(v) \|^2$ nach 2.8. und 2.10. für alle $v \in \nu(N_i)(2\delta)$ und alle $i = 1, \ldots, r$ definiert ist, und $t_{N_i} \circ \theta_i(\nu(N_i)(2\delta)) \subset U_i$ gilt. $T_i := t_{N_i} \circ \theta_i$, $V_i := T_i(\nu(N_i)(2\delta))$. Wähle $\varepsilon \in \mathbf{R}$ mit $0 < \varepsilon < \delta^2$ und $3\varepsilon \leq \max(|a|, |b|)$. Setze

$Q := f^{-1}(-2\varepsilon, \infty)$. Wir definieren eine Abbildung $g: Q \to \mathbf{R}$ durch

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & ; \; x \notin \bigcup_{i=1}^{r} V_i \\ f(x) - \dfrac{3\,\varepsilon}{2}\,\lambda\left(\| P_i \circ T_i^{-1}(x) \|^2/\varepsilon\right); & x \in V_i, \end{cases}$$

wobei λ wie im Klebe-Lemma 2.14. gewählt ist. Sei $x \in M$, so *daß* $f(x) \neq g(x)$ ist. Dann ist $\| P_i \circ T_i^{-1}(x) \|^2 < \varepsilon$ (und $f(x) < \varepsilon$) und $\| P_i \circ T_i^{-1}(x) \|^2 - \| (I - P_i) \circ T_i^{-1}(x) \|^2 = f(x) \geq -2\varepsilon$ und daher $\| T_i^{-1}(x) \|^2 = \| P_i \circ T_i^{-1}(x) \|^2 + \| (I - P_i) \circ T_i^{-1}(x) \|^2 \leq 4\varepsilon < 4\,\delta^2$. Der Abschluß der Punkte x, für die $f(x) \neq g(x)$ gilt, ist also im Innern der V_i enthalten, daher ist g differenzierbar.

Es folgt hieraus auch $f|^{\varepsilon}_{Q} = g^{\varepsilon}$. Nach dem Klebe-Lemma 2.14., dem zweiten Teil der Bemerkung 2.13.2. und 2.13.3. entsteht $g^{-\varepsilon}$ durch disjunktes Ankleben von Henkeln vom Typ (N_i, f) an $f|_{\bar{Q}}^{\varepsilon}$.

Wir brauchen nun nur noch zu zeigen, daß g^{ε} diffeomorph zu $g^{-\varepsilon}$ ist. Dann ist nämlich auch $f^{\varepsilon} = \{g^{\varepsilon}\} \cup \{f^{-\varepsilon}\}$ diffeomorph zu $\{g^{-\varepsilon}\} \cup \{f^{-\varepsilon}\} = f^{-\varepsilon} \underset{F_1}{\cup} (N_1, f) \underset{F_2}{\cup} \ldots \underset{Fr}{\cup} (N_r, f)$ mit geeigneten F_i unter Benutzung von 2.13.3., und da f in $f^{-1}[\varepsilon, b]$ und $f^{-1}[a, -\varepsilon]$ keine kritischen Punkte hat, folgt mit der zweiten Behauptung und dem ersten Teil von 2.13.2. die dritte Behauptung.

Zum Nachweis der Diffeomorphie von g^{ε} mit $g^{-\varepsilon}$ verwenden wir die zweite Behauptung. Dazu müssen wir zeigen, daß g in einer Umgebung W von $g^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ die Bedingung (C) erfüllt und in $g^{-1}[-\varepsilon, \varepsilon]$ keine kritischen Punkte hat. Es genügt hierzu nachzuweisen, daß $\|\mathrm{grad} g\|$ auf W durch eine positive Zahl nach unten beschränkt ist. Setze $W := g^{-1}[-\frac{5}{4}\varepsilon, \frac{5}{4}\varepsilon]$. Da $f|_Q$ und g dieselben kritischen Punkte haben nach 2.14.1., diese in den N_i liegen, und $g(N_i) = -\frac{3\varepsilon}{2}$ ist für alle $i = 1, \ldots, r$, haben $g|_W$ und $f|_W$ keine kritischen Punkte. Nach der Bedingung (C) gibt es daher ein k, $o < k \in \mathbf{R}$, mit $\|\mathrm{grad} f_p\| \geq k > 0$ für alle $p \in W$. Aus $f|W - \bigcup_{i=1}^{r} V_i = g|W - \bigcup_{i=1}^{r} V_i$ folgt $\|\mathrm{grad} g_p\| \geq k > 0$ für alle $p \in W - \bigcup_{i=1}^{r} V_i$. In V_i hat g die Form $g(x) =$ $= \|P_i \circ T_i^{-1}(x)\|^2 - \|(I - P_i) \circ T_i^{-1}(x)\|^2 - \frac{3\varepsilon}{2} \lambda(\|P_i \circ T_i(x)\|^2/\varepsilon)$ für $x \in V_i$. Sei $v := T_i^{-1}(x)$, $c : \mathbf{R} \to \nu(N_i)$ durch $t \mapsto v + t(P_i(v) + - (I - P_i)(v))$ definiert. Dann ist $d(g \circ T_i)|_v (c_*|_0 \left(\frac{d}{dt}\right)) = 2\|v\|^2 + - 3\lambda'(\|P_i(v)\|^2/\varepsilon)\|P_i(v)\|^2$.

$\tilde{v} := c_*|_0 \left(\frac{d}{dt}\right)$. Es gilt also, da $-\lambda'$ positiv ist: (*) $2\|v\|^2 \leq$ $|d(g \circ T_i)|_v(\tilde{v})| = |<\mathrm{grad} g_{T_i(v)}, T_{i*}(\tilde{v})>| \leq \|\mathrm{grad} g_{T_i(v)}\| \cdot \|T_{i*}|_v\| \cdot \|\tilde{v}\|$.

Die letzten beiden $\|\ \|$ – Zeichen sind bezüglich einer Metrik in $T\nu(N_i)$ zu verstehen. (* *) In $T\nu(N_i)$ kann man stets eine Metrik finden, die auf den Fasern von $\nu(N_i)$ den von der Metrik in TM herkommenden Abstand induziert. Mit solcher Metrik für $T\nu(N_i)$ gilt:

$\|\tilde{v}\|^2 = \|P_i(v) - (I - P_i)(v)\|^2 = \|v\|^2$. $\overline{W}$, der Abschluß von W, trifft nicht $\bigcup_{i=1}^{r} N_i$. Daher gibt es ein $t > 0$, so daß $T_i(\nu(N_i)(t)) \cap \overline{W} = \phi$ für $i = 1, \ldots, r$ ist. Die Abbildung $\nu(N_i)(2\delta) \to \mathbf{R}$ mit $v \mapsto \|T_{i*}|_v\|$ ist stetig und daher in einer Umgebung des kompakten Nullschnitts N_i durch $d > 0$ nach oben beschränkt. Wähle δ so klein, daß $\nu(N_i)(2\delta)$ in dieser Umgebung enthalten ist. Aus (*) folgt dann $\|\operatorname{grad} g_x\| \geq 2t/d$ für $x \in W \cap V_i$.

q.e.d.

Bemerkung: 1. Zu (* *). Eine solche Metrik läßt sich mit Hilfe einer Zerlegung der Einsfunktion konstruieren.

Man kann sie aber auch in kanonischer Weise finden, siehe etwa ((4), 3.2.(4)). Durch die Inklusionsabbildung $\nu(N) \hookrightarrow TM$ wird die gesuchte Metrik von der in (4) für $T(TM)$ konstruierten induziert.

2. Der gegebene Beweis ist eine leichte Verallgemeinerung des von Palais in ((9), § 12) gegebenen. Er findet sich auch bei Wasserman ((14), § 5).

3. Wir haben keinen Gebrauch von der Liegruppenstruktur von G gemacht. Es genügt also vorauszusetzen, daß G eine Menge von isometrischen Automorphismen von M ist.

§ 3. TOPOLOGISCHE IMPLIKATIONEN DES HAUPTSATZES

3.1. Definition. Seien X, N topologische Räume. Wir sagen: X entsteht aus N durch Ankleben eines Riemannschen Vektorraumbündels E, wenn $X = N \cup_{\varphi} E(1)$ ist, wobei φ eine stetige Abbildung $\varphi : \widehat{\dot{E}(1)} \to N$ ist.

3.2. Bemerkung: Das Ankleben von Vektorraumbündeln ist in folgendem Sinne funktoriell:

1. Sei $\phi : N \to N'$ eine Homotopieäquivalenz. Dann sind $N' \underset{\phi \circ \varphi}{\smile} E(1)$ und $N \cup_{\varphi} E(1)$ homotop äquivalent.
2. Sei $\varphi' : \widehat{\dot{E}(1)} \to N$ zu φ homotop. Dann sind $N \cup_{\varphi'} E(1)$ und $N \cup_{\varphi} E(1)$ homotop äquivalent.

1. und 2. folgen durch direkte Übertragung der entsprechenden Sätze für das Ankleben von Zellen ((7), 3.6,3.7). Die Beweise nutzen die Vektorraumstruktur in E stark aus. Wir werden im Weiteren von 3.2. keinen Gebrauch machen.

Unser nächstes Ziel ist es, aus dem Hauptsatz eine Aussage über den Homotopietyp von f^b herzuleiten. Dabei verwenden wir folgendes Lemma:

3.3. Lemma: Sei (E, π, M) ein Riemannsches Vektorraumbündel mit unendlicher Faserdimension. M sei parakompakt und habe abzählbare Basis. X sei ein topologischer Raum. Dann gilt:

1. $\overset{\bullet}{\widehat{E(1)}}$ ist ein Deformationsretrakt von $E(1)$.

2. Wenn $\varphi : \overset{\bullet}{\widehat{E(1)}} \to X$ ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, so ist X ein Deformationsretrakt von $X \underset{\varphi}{\cup} E(1)$.

Beweis: Zu 1. Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{N}}$ mit $\varphi_\alpha : E|_{U\alpha} \to V_\alpha \times H_\alpha$ ein Atlas für E. H_α ist ein Hilbertraum mit Norm $\| \ \|_\alpha$, V_α offen in einem Banachraum. $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{N}}$ sei eine lokalendliche Überdeckung von M. Sei $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{N}}$ eine zu $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{N}}$ passende Zerlegung der $\frac{1}{2}$ — Funktion, $\widetilde{U}_\alpha : = \{p \in M / h_\alpha(p) \neq 0\}$, $\widetilde{V}_\alpha : = x_\alpha(\widetilde{U}_\alpha)$, $K_\alpha : = \{e \in E / \|e\| \leq \leq h_\alpha(\pi e)\}$, $\widetilde{K}_\alpha : = K_\alpha \cap \pi^{-1}\widetilde{U}_\alpha$. Nach (3) gibt es eine Deformationsretraktion $\varrho_\alpha : H_\alpha(1) \to \overset{\bullet}{\widehat{H_\alpha(1)}}$. Wir definieren eine Abbildung $f_\alpha : \widetilde{K}_\alpha \to \widetilde{V}_\alpha \times H_\alpha(1)$ durch $e \mapsto (x_\alpha(\pi(e)), \varphi_\alpha(\pi(e))(e) \cdot \|e\| \cdot (h_\alpha(\pi(e)) \cdot \|\varphi_\alpha(\pi(e))(e)\|_\alpha)^{-1})$ für $e \neq 0$ und $e \mapsto (x_\alpha(\pi(e)), 0)$ sonst. f_α ist offenbar ein Homöomorphismus. Definiere $F_\alpha : E \to E$ durch $e \mapsto e$ für $e \in \complement \widetilde{K}_\alpha$ und $e \mapsto f_\alpha^{-1} \circ \varrho_\alpha \circ f_\alpha(e)$ für $e \in \widetilde{K}_\alpha$. Dann gilt: $F(K_\alpha) = \dot{K}_\alpha$, $F|_{\dot{K}_\alpha} = I_{\dot{K}_\alpha}$ (ϱ_α ist auf $\overset{\bullet}{\widehat{H_\alpha(1)}}$ die Identität), F_α ist stetig. Setze $F^n : = F_n \circ F_{n-1} \ldots \circ F_1$, $F : = \lim\limits_{n \to \infty} F^n$. Der Limes ist sinnvoll, da jeder Punkt $e \in E$ eine Umgebung besitzt, die nur von endlich vielen K_α getroffen wird. Für genügend großes $n \in \mathbf{N}$ ist also $F_m(e) = e$ für alle $m > n$. Hieraus folgt auch die Stetigkeit von F. $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbf{N}} K_\alpha$ ist eine Umgebung von M in E und $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbf{N}} K_\alpha \subset E(1)$. Für jedes $p \in M$ ist ein $h_\alpha(p) > 0$, und daher ist $\|F_\alpha(e_p)\| \geq h_\alpha(p) > 0$. $F(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbf{N}} K_\alpha)$ trifft also nicht M. Da außerdem $F(\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbf{N}} K_\alpha) \subset \bigcup\limits_{\alpha \in \mathbf{N}} K_\alpha$ ist, können wir eine Retraktion $E(1) \to \overset{\bullet}{\widehat{E(1)}}$ durch $e \mapsto F(e)/\|F(e)\|$ definieren. Die Beh. 1 folgt hieraus und aus der faserweisen Konvexität von $E(1)$.

Zu 2. Aus der Vor. über φ folgt, daß $X \to X \underset{\varphi}{\cup} \overset{\bullet}{\widehat{E(1)}}$ ein Homöomorphismus ist. Mit Beh. 1 folgt leicht, daß $X \underset{\varphi}{\cup} \overset{\bullet}{\widehat{E(1)}}$ ein Deformationsretrakt von $X \underset{\varphi}{\cup} E(1)$ ist. Zusammensetzen liefert die Behauptung.

q.e.d.

Bemerkung 1. Die Voraussetzung «abzählbare Basis» läßt sich mit einem transfiniten Schluß bei der Konstruktion von F umgehen.

2. Sei E ein G-Vektorraumbündel. Die konstruierte Retraktion ist im allgemeinen nicht equivariant.

3.4. Wir haben bisher zugelassen, daß die Faserdimensionen eines Vektorraumbündels über den verschiedenen Zusammenhangskomponenten von M verschieden sind. Die nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten $N_1, \ldots, N_r$ aus 2.16.1. lassen sich in nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten $N_1', \ldots, N_s'$ aufteilen, so daß jedes $(N'_i)_f^-$ nur isomorphe Fasern hat.

Im Weiteren nehmen wir an, daß dieses schon geschehen ist. Index (N_i, f) ist dann also wohldefiniert.

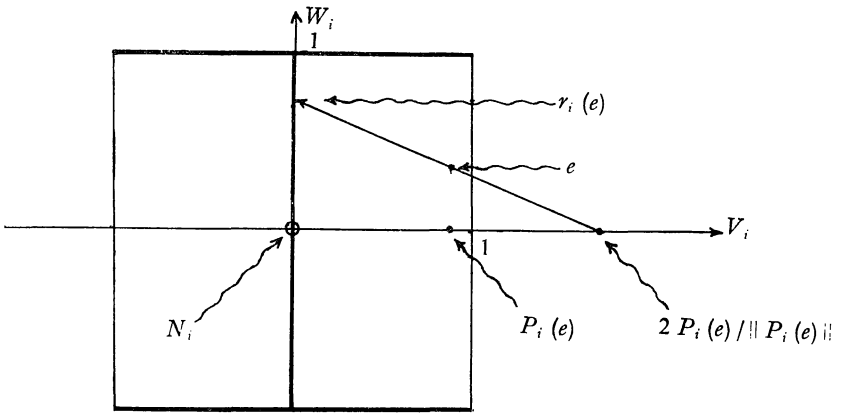
Den folgenden Satz und die sich anschließenden Korollare findet man mit der zusätzlichen Voraussetzung, daß alle vorkommenden Mannigfaltigkeiten endlich-dimensional seien, bei R. Bott. (2).

3.5. Satz. Vor. : Wie im Hauptsatz 2.16.

Behauptung: Sei $c \in (a, b)$ der einzige kritische Wert von f in $f^{-1}[a, b]$. Seien $N_1, \ldots, N_r$ die nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten von f in $f^{-1}[a, b]$ mit endlichem Index. Dann ist f^b homotop äquivalent relativ f^a zu $f^a \underset{\varphi_1}{\cup} (N_1)_f^-(1) \underset{\varphi_2}{\cup} \ldots \underset{\varphi_r}{\cup} (N_r)_f^-(1)$, wobei die $\varphi_i : \overset{\bullet}{\widehat{(N_i)_f^-(1)}} \to \partial f^a$ Homöomorphismen auf ihre Bilder sind und die Bilder disjunkt liegen.

Beweis: Seien $N_1, \ldots, N_s$, $r \leq s$, alle nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten von f in $f^{-1}[a, b]$. Zur Abkürzung setzen wir $W_i := (I - P_i)\nu(N_i)$, $V_i := P_i\nu(N_i)$. Sei $f_i := F_i|_{V(1) \oplus \overset{\bullet}{\widehat{W(1)}}}$ mit

F_i aus 2.16.3. Aus 2.16.3. und 2.13.1. folgt dann, daß f homöomorph zum topologischen Raum $f^a \underset{f_1}{\cup} V_1(1) \oplus W_1(1) \underset{f_2}{\cup} \dots \underset{f_s}{\cup} V_s(1) \oplus W_s(1)$ ist. Es gibt eine Retraktion r_i: $V_i(1) \oplus W_i(1) \to V_i(1) \oplus \overset{\bullet}{\widehat{W_i(1)}} \cup V_i(O) \oplus \overset{\circ}{\widehat{W_i(1)}}$, wie man aus folgender Skizze abliest:



Der Retrakt ist stark ausgezogen.

Aus der Konvexität von $V_i(1) \oplus W_i(1)$ folgt, daß r_i eine Deformationsretraktion ist. Setze $\varphi_j := f_j|_{V_j(O) \oplus \overset{\bullet}{\widehat{W_j(1)}}}$

Die r_i setzen sich zu einer Deformationsretraktion von $f^a \underset{f_1}{\cup} V_1(1) \oplus W_1(1) \underset{f_2}{\cup} \dots \underset{f_s}{\cup} V_s(1) \oplus W_s(1)$ auf $f^a \underset{\varphi_1}{\cup} W_1(1) \underset{\varphi_2}{\cup} \dots \underset{\varphi_s}{\cup} W_s(1)$ fort, und die Behauptung folgt aus 3.3.2. und den Eigenschaften der F_i.

q.e.d.

3.6. KOROLLAR (R. Bott (2)).

Vor.: Wie im Hauptsatz 2.16. Sei c der einzige kritische Wert von f in $[a, b]$.

Beh.: Wenn $N_1, \dots, N_r$ die nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten von f in $f^{-1}[a, b]$ mit endlichen Indizes $k_1, \dots, k_r$ sind, dann hat das Paar (f^b, f^a) den Homotopietyp eines endlichen relativen CW-Komplexes (X, f^a), dessen k-dimensionales Gerüst für $k < \min(k_1, \dots, k_r)$ gleich f^a ist. Insbesondere ist $\pi_n(f^b, f^a) = 0$ für alle $n < \min(k_1, \dots, k_r)$.

Beweis: Die zweite Behauptung folgt aus der ersten nach dem Satz von der zellularen Approximation.

Wir machen zunächst zwei einfache Bemerkungen zum Ankleben von Vektorraumbündeln.

Sei $(H, h) : (E', \pi', M') \to (E, \pi, M)$ ein Vektorraumbündelmorphismus, *d.h.*: $H : E' \to E$, $h : M' \to M$, H ist linear und $\pi \circ H = h \circ \pi'$. Wenn nun (H, h) ein isometrischer Isomorphismus von RIEMANNSCHEN Vektorraumbündeln ist, dann gilt mit Bezeichnungen wie in 3.1. und $H_1 := H \mid_{\dot{\widehat{E'(1)}}}$: $N \underset{\varphi}{\cup} E(1)$ ist homöomorph zu $N \underset{\varphi\circ H_1}{\smile} E'(1)$.

Sei $M \hookrightarrow M'$ und $r : M' \to M$ eine Deformationsretraktion. Dann trägt $r^*(E)$ eine Riemannsche Metrik, so daß $r_* : r^*(E) \to E$ eine Isometrie ist, und mit $r_{*1} := r_* \mid r^*(E)(1)$ gilt: $N \underset{\varphi}{\cup} E(1)$ ist Deformationsretrakt von $N \underset{\varphi\circ r_{*1}}{\smile} r^*(E)(1)$.

In der Darstellung von f^b in 3.5. werden die Bündel disjunkt angeklebt. Es genügt daher den Fall, daß f^b homotop äquivalent zu $f^a \underset{\varphi}{\cup} (N)^-_f (1)$ ist mit Index $(N, f) = n$,zu betrachten. $W := (N)^-_f$. Für genügend großes $k \in \mathbf{N}$ gibt es nach dem Whitneyschen Einbettungssatz eine Einbettung $i : N \to \mathbf{R}^k$. Sei U eine aus abgeschlossenen Würfeln $W_1, \ldots, W_r$ eines Gitters im $\mathbf{R}^k$ bestehende Tubusumgebung von $i(N)$, $r : U \to i(N)$ die mit Hilfe des Normalenbündels definierte Deformationsretraktion. Nach obigen Bemerkungen ist dann $f^a \underset{\varphi}{\cup} W(1)$ homotop äquivalent relativ f^a zu $f^a \underset{\varphi\circ i^{-1}_{*1}\circ r_{*1}}{\smile} (i^{-1} \circ r)^*(W)(1)$.

$V := (i^{-1} \circ r)^*(W)$. $V(1) \mid W_j$ isti somorph zu einem Produktbündel $(E^n \times W_j, p_{r_2}, W_j)$, da W_j kontraktibel ist. Dabei bezeichnet E^n die abgeschlossene Vollkugel des $\mathbf{R}^n$. Durch diese Isomorphie und die übliche Darstellung von $E^n \times W_j$ als CW-Komplex werden die charakteristischen Abbildungen einer Darstellung von $V(1)$ als endlicher CW-Komplex gegeben. Jede Zelle der Dimension kleiner als n wird in $\dot{\widehat{V(1)}}$ abgebildet und daher mit Punkten von f^a identifiziert.

q.e.d.

Bemerkung. Wenn man benutzt, daß jede kompakte Mannigfaltigkeit triangulierbar ist, kann man sich den Umweg über das auf U zurückgezogene Bündel sparen.

Sei $k = \mathbf{Z}_2$ oder $k = \mathbf{Q}$. Setze $R_n(X, Y) = \dim_k H_n(X, Y; k)$ für topologische Räume X, Y mit $Y \subset X$. $R_n(X, Y)$ heißt n-te Bettische

Zahl. (X, Y) nennen wir zulässig, wenn alle Bettischen Zahlen endlich und fast alle Null sind. Wenn (X, Y) zulässig ist, bezeichnen wir mit $x(X, Y)$ die Euler-Charakteristik. Wenn N eine kompakte Mannigfaltigkeit ist, so ist N zulässig. (siehe etwa ((12), 6.9.11)

3.7. KOROLLAR (R. Bott (2))

Vor.: Wie im Hauptsatz 2.16. Seien a und b reguläre Werte von f, $N_1, \ldots, N_s$ die nichtentarteten kritischen Mannigfaltigkeiten von f in $f^{-1}[a, b]$ mit Index $(N_i, f) = k_i$.

Beh.: 1. f habe in $[a, b]$ genau einen kritischen Wert. Dann gilt in singulärer Homologie und Kohomologie für alle $r \in \mathbf{N}$:

$$H_r(f^b, f^a; A) \cong \sum_{i=1}^{s} H_{r-k_i}(N_i : A) \text{ und } H^r(f^b, f^a; A) \cong \sum_{i=1}^{s} H^{r-k_i}(N_i; A).$$

Dabei ist A ein R-Modul und alle $(N_i)_f^-$ sind über R orientierbar ($R = \mathbf{Z}_2$ ist immer möglich).

2. «Morse-Ungleichungen» f habe eventuell mehrere kritische Werte in $[a, b]$. Dann gelten mit Koeffizienten in $\mathbf{Z}_2$ (oder in $\mathbf{Q}$, wenn alle $(N_i)_f^-$ über $\mathbf{Z}$ orientierbar sind) die Ungleichungen:

$$x(f^b, f^a) = \sum_{i=1}^{s} (-1)^{k_i} x(N_i)$$

$$R_n(f^b, f^a) \leq \sum_{i=1}^{s} R_{n-k_i}(N_i) \text{ für alle } n \in N$$

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} R_r(f^b, f^a) \leq \sum_{i=0}^{s} \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} R_{r-k_i}(N_i) \text{ mit } n \in \mathrm{N}.$$

(es ist $R_{r-k_i}(N_i) = 0$ für $r < k_i$ zu setzen)

Beweis: Nach 3.5. ist (f^b, f^a) homotop äquivalent zu $(f^\beta \cup_{\varphi_1} (N_1)_f^-(1) \cup_{\varphi_2} \cdots \cup_{\varphi_s} (N_s)_f^-(1), f^a)$ relativ f^a. Eine einfache Excision liefert:
$H_*^*(f^b, f^a; A) = \sum_{i=1}^{s} H_*^*((N_i)_f^-(1), \overset{\bullet}{\widehat{(N_i)_f^-(1)}}\, A)$.

Nach dem Thomschen Isomorphiesatz ((12), 5.7.10) ist $H_n((N_i)_f^-(1), \overset{\bullet}{\widehat{(N_i)_f^-(1)}}; A) = H_{n-k_i}(N_i; A)$, (analog für Kohomologie) woraus die Behauptung 1 folgt.

In ((9), § 15) wird gezeigt, daß x additiv ist, und $S_n := \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} R_r$ und R_r subadditiv sind. Zusammen mit der Beh. 1 folgt daraus Beh 2.

q.e.d.

Bemerkung: Sei $\dim(N_i) = 0$ für alle $i = 1, \ldots, s$, *d.h.*: jedes N_i besteht aus einem Punkt. Dann folgen aus diesen die «üblichen» Morseungleichungen mit Koeffizienten in beliebigen Körpern, ohne daß wir Orientierbarkeitsvoraussetzungen zu machen brauchen.

Da es nach ((7), § 6.8) auf einer endlich-dimensionalen Mannigfaltigkeit Morse-Funktionen gibt, die nur nichtentartete kritische Punkte besitzen, läßt sich aus der ersten Morseungleichung leicht die Zulässigkeit einer kompakten Mannigfaltigkeit folgern.

§ 4. EXISTENZ VON MORSE-FUNKTIONEN

Wir setzen in diesem Paragraphen voraus, daß M eine endlich-dimensionale G-Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis ist. G sei eine kompakte Liegruppe.

4.1. Bemerkung: Auf G gibt es ein translationsinvariantes Maß μ der Masse 1. Für $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ ist dann $\widetilde{f} \in C_G^\infty(M, \mathbf{R})$ invariant definiert durch $\widetilde{f}(x) = \int_G f(g(x))\, d\mu(g)$ für $x \in M$.

Sei $\{h_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Zerlegung der Einsfunktion mit kompakten Trägern $K_\alpha := \overline{\{x \in M / h_\alpha(x) \neq 0\}}$. Dann ist $\{\widetilde{h}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Zerlegung der Einsfunktion mit kompakten Trägern $G(K_\alpha)$.

Sei $<\ ,\ >$ eine Metrik für TM. Dann wird durch $\ll X, Y \gg := = \int_G < g_*(X), g_*(Y) > d\mu(g)$ für $(X, Y) \in TM \oplus TM$ eine Metrik für TM definiert, bezüglich der G als Gruppe von Isometrien operiert.

Da jede endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis eine Riemannsche Metrik besitzt, können wir im Weiteren *o.B.d.A.* voraussetzen, daß M eine Riemannsche G-Mannigfaltigkeit ist.

Dem eigentlichen Existenzbeweis schicken wir eine Reihe topologischer Vorbereitungen voraus.

4.2. Definition

1. Sei $k \in \mathbf{N}$, φ eine Karte für M, $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$ und $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$. φ^{-1} sei auf $\{x \in \mathbf{R}^n / \|x\| \leq 1\}$ mit $n = \dim(M)$ definiert.

$$N^k_\varphi(f)(\varepsilon) := \{g \in C^\infty(M, \mathbf{R}) / \sup_{j=0,1,..,k} \sup_{\|x\| \leq 1} \| d^j f \circ \varphi^{-1}|_x - d^j g \circ \varphi^{-1}|_x \| < \varepsilon\}$$

Die gröbste Topologie, in der die Mengen der Form $N^k_\varphi(f)(\varepsilon)$ offen sind, heißt die C^k – Topologie für $C^\infty(M, \mathbf{R})$. $C^\infty(M, \mathbf{R})$ versehen mit dieser Topologie wird mit ${}^kC^\infty(M, \mathbf{R})$ bezeichnet. Für $k < t$ ist die C^t-Topologie offenbar feiner als die C^k-Topologie.

2. Die gröbste Topologie für $C^\infty(M, \mathbf{R})$, die feiner als jede C^k-Topologie ist, heißt die C^∞-Topologie. $C^\infty(M, \mathbf{R})$ versehen mit dieser Topologie wird mit ${}^\infty C^\infty(M, \mathbf{R})$ bezeichnet.

Bemerkungen

4.2.3. Eine differenzierbare Abbildung $\phi: N \to M$ induziert eine stetige Abbildung ${}^kC^\infty(M, \mathbf{R}) \to {}^kC^\infty(N, \mathbf{R})$.

4.2.4. Sei $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Familie von Karten für M, so daß $\{\mathring{K}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ mit $K_\alpha := \varphi_\alpha^{-1}\{x \in \mathbf{R}^n / \|x\| \leq 1\}$ eine Überdeckung von M ist. Dann bilden die Mengen der Form $N^k_{\varphi_\alpha}(f)(\varepsilon)$ eine Subbasis der C^k-Topologie.

4.3. Lemma. Sei M eine berandete oder unberandete endlichdimensionale Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis. Dann gilt:

1. Für alle $k \in \mathbf{N}$ ist ${}^kC^\infty(M, \mathbf{R})$ metrisierbar.

2. ${}^\infty C^\infty(M, \mathbf{R})$ ist vollständig metrisierbar.

Beweis: Es gibt abzählbar viele Karten $\{\varphi_i\}_{i=1,2,\dots}$, so daß $\{\mathring{K}_i\}_{i=1,2,\dots}$ mit $K_i := \varphi_i^{-1}\{x \in \mathbf{R}^n / \|x\| \leq 1\}$, $n = \dim(M)$, eine Überdeckung von M bildet. Sei $\phi: \mathbf{R} \to (-1, 1)$ durch $t \to t/1 + |t|$ definiert. Wir definieren $d^k: C^\infty(M, \mathbf{R}) \times C^\infty(M, \mathbf{R}) \to [0, 1]$ durch $(f, g) \mapsto d^k(f, g) := \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \phi(\sup_{j=0,1,..,k} \sup_{\|x\| \leq 1} \| d^j f \circ \varphi_i^{-1}|_x - d^j g \circ \varphi_i^{-1}|_x \|)$. d^k erfüllt offenbar die Axiome einer Metrik. Sei $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$, $\mu := \phi(\varepsilon)$. Dann ist $\{g \in C^\infty(M, \mathbf{R}) / d^k(f, g) < \mu/2^i\} \subset N^k_{\varphi_i}(f)(\varepsilon)$. Es ist also die durch d^k induzierte Topologie feiner als die C^k-Topologie. Die «d^k-Topologie» ist aber auch gröber als die C^k-Topologie. Sei dazu $B := \{g \in C^\infty(M, \mathbf{R}) / d^k(f, g) < \varepsilon\}$. Es gibt ein $j \in \mathbf{N}$, so daß $\sum_{i=j}^{\infty} 2^{-i} < \varepsilon/2$ ist und ein $\mu > 0$ mit $\phi(\mu) < \varepsilon/2$ Sei $U := \bigcap_{i=1}^{j} N^k_{\varphi_i}(f)(\mu)$. Dann ist U offen in der C^k-Topologie, und es gilt $U \subset B$. Damit ist die erste Behauptung bewiesen.

Definiere $d^\infty \colon C^\infty(M, \mathbf{R}) \times C^\infty(M, \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ durch $(f, g) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} d^k(f, g)$. Ähnlich wie oben sieht man, daß d^∞ die C^∞-Topologie induziert. Sei $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ eine Cauchyfolge in ${}^\infty C^\infty(M, \mathbf{R})$. Insbesondere konvergiert f_n auf jedem K_i gleichmäßig, definiert also dort den Limes $f^i \in C^0(K_i, \mathbf{R})$*. Da f auf $K_i \cap K_j$ gleichmäßig konvergiert, gilt $f^i|_{K_i \cap K_j} = f^j|_{K_i \cap K_j}$. Da auch die $\mathring{K}_i$ M überdecken, gibt es daher genau ein $f \in C^0(M, \mathbf{R})$ mit $f|_{K_i} = f^i$. Sei $k \in \mathbf{N}$ und $p \in M$. Dann gibt es ein $i \in \mathbf{N}$ mit $p \in \mathring{K}_i$ und es konvergieren in einer Umgebung von p die Ableitungen $\{d^j f_n \circ \varphi_i^{-1}\}_{n \in \mathbf{N}}$ gleichmäßig für $j = 0, 1, \ldots, k$. Bekanntlich gilt dann $d^j f \circ \varphi_i^{-1} = \lim_{n \to \infty} d^j f_n \circ \varphi_i^{-1}$. Für alle $k \in \mathbf{N}$ ist also f in einer Umgebung von p k-mal differenzierbar.

q.e.d.

4.4. Folgerung. Jeder vollständig metrisierbare Raum ist ein Bairescher Raum, also auch ${}^\infty C^\infty(M, \mathbf{R})$. Aus 4.2.3. folgt, daß $C^\infty_G(M, \mathbf{R})$ eine abgeschlossene Teilmenge von ${}^\infty C^\infty(M, \mathbf{R})$ ist. Wir bezeichnen $C^\infty_G(M, \mathbf{R})$ versehen mit der Teilraumtopologie mit ${}^\infty C^\infty_G(M, \mathbf{R})$. ${}^\infty C^\infty_G(M, \mathbf{R})$ ist ein Bairescher Raum.

4.5. Lemma. Für alle $k \in \mathbf{N}$ ist die Abbildung ${}^k C^\infty(M, \mathbf{R}) \to {}^k C^\infty_G(M, \mathbf{R})$ mit $f \mapsto \tilde{f}$ stetig, wobei $\tilde{f}$ durch $\tilde{f}(x) = \int_G f(g(x))\, d\mu(g)$ für $x \in M$ definiert wird.

Beweis: Wir nehmen an, daß für jede im Beweis vorkommende Karte x x^{-1} auf der Einheitskugel des $\mathbf{R}^n$ ($n = \dim(M)$) definiert ist. Sei eine Karte für M, $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$ und $K := x^{-1}\{p \in \mathbf{R}^n / \|p\| \leq 1\}$. Die Abbildung $m \colon G \times K \to M$ mit $(g, q) \mapsto gq$ ist stetig und daher ist $G(K)$ kompakt. Seien $x_1, \ldots, x_r$ Karten für M, so daß die Mengen $U_1, \ldots, U_r$

* $C^0(K_i, \mathbf{R})$ bezeichnet die Menge der stetigen Funktionen auf K_i.

mit $U_j := x_j^{-1}\{p \in \mathbf{R}^n / \|p\| < 1\}$ für $1 \leq j \leq r$ $G(K)$ überdecken. Sei $\{h_j\}_{j=1,2,\dots,r}$ eine zur Überdeckung $\{U_j\}_{j=1,2,\dots,r}$ von $G(K)$ passende C^∞-Zerlegung der Einsfunktion, *d.h.*: $h_j \in C^\infty(M, [0,1])$, $h \mid \complement U_j = 0$ und $\sum_{j=1}^{r} h_j|_{G(K)} = 1$. Für $t \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ gilt dann: $\tilde{t} \circ x^{-1}(p) = = \int_G t \circ g \circ x^{-1}(p)\, d\mu(g) = \sum_{i=1}^{r} \int_G (h_j \circ x_j^{-1} \circ x_j \circ g \circ x^{-1}(p)) \cdot t \circ x_j^{-1} \circ x_j \circ g \circ x^{-1}(p)\, d\mu(g)$.

Die Abbildung $(I_G \times x)(m^{-1}(\bar{U}_j)) \to \mathbf{R}$ mit $(g, p) \mapsto \| d^s x_j \circ g \circ x^{-1}|_p \|$ ist stetig und daher beschränkt für alle $s = 0, 1, \dots, k$ und $j = 1, \dots, r$. Die Normen der ersten k Ableitungen von $h_j \circ x_j^{-1}$ sind ebenfalls beschränkt. Sei $h \in C^\infty(M, \mathbf{R})$. Wir betrachten $d^s(\tilde{t} - \tilde{h}) \circ x^{-1}|_p$. Der Ausdruck wird durch Differentiation unter dem Integral berechnet. Die Ableitung des Integranden ist eine Summe von Produkten von Abbildungen, von denen jedes $d^n(t - h) \circ x_j^{-1}|_{x_j \circ g \circ x^{-1}(p)}$ für geeignetes $n \in (0, 1, \dots, s)$, $j \in (0, 1, \dots, r)$ als Faktor hat. Es gibt also ein $m \in \mathbf{N}$, so daß aus $t \in \bigcap_{j=1}^{r} N^k_{x_j}(h)(\delta)$ folgt: $\tilde{t} \in N^k_x(\tilde{h})(m\delta)$ für $0 < \delta \in \mathbf{R}$. Wenn δ genügend klein gewählt wird, folgt also: $\widetilde{\bigcap_{j=1}^{r} N^k_{x_j}(h)(\delta)} \subset N^k_x(\tilde{h})(\varepsilon)$

q.e.d.

4.6. Lemma. Sei M eine Riemannsche G-Mannigfaltigkeit.

Dann ist $M_G := \{x \in M / gx = x$ für alle $g \in G\}$ eine Vereinigung von zusammenhängenden abgeschlossenen Untermannigfaltigkeiten von M.

Beweis: Aus der Definition folgt sofort, daß M_G und damit auch jede Zusammenhangskomponente von M_G abgeschlossen ist. Bezeichne exp die zur Metrik gehörige Exponentialabbildung. Dann gibt es zu jedem $p \in M$ eine Umgebung U_p in M und eine Umgebung der Null V_p in T_p, so daß $\exp : V_p \to U_p$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $p \in M$, ${}_GT_p := \{v \in T_p / g_*(v) = v$ für alle $g \in G\}$. ${}_GT_p$ ist ein linearer Teilraum von T_p. Es gilt $\exp(V_p \cap {}_GT_p) = U_p \cap M_G$, denn $g \circ \exp(v) = \exp(g_* v) = \exp(v)$. Die Dimension von ${}_GT_P$ ist für alle p aus einer Zusammenhangskomponente von M_G konstant. Damit haben wir für jede Zusammenhangskomponente von M_G den gesuchten Atlas gefunden.

q.e.d.

4.7. Sei M eine endlich-dimensionale Mannigfaltigkeit, $T_s^r(M)$ das Tensorbündel vom Typ (r, s) über M. Die Tensorfelder vom Typ (r, s) *d.h.*: die C^∞-Schnitte dieses Bündels, versehen mit der kompakt-offen Topologie bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_s^r$. Eine Subbasis der kompakt-offen Topologie bilden die Mengen der Form

$$\{t \in \mathcal{T}_s^r / \sup_{i_1,\dots,i_s} \sup_{j_1,\dots,j_r} \sup_{p\in K} | t^{i_1,\dots,i_s}_{j_1,\dots,j_r}(p) - \bar{t}^{i_1,\dots,i_s}_{j_1,\dots,j_r}(p) | < \varepsilon\}$$

Dabei ist $t \in \mathcal{T}^r{}_s$ $0 < \varepsilon \in \mathbf{R}$, und K kompakt, enthalten im Definitionsbereich der Karte, bezüglich der die Koeffizienten der Tensoren berechnet werden.

4.8. Definition. Sei ∇ eine kovariante Ableitung für M, T ihr Torsionstensor, $f \in C^\infty(M, \mathbf{R})$. Wir definieren $H^f\colon TM \oplus TM \to \mathbf{R}$ durch $(X, Y) \mapsto H^f(X, Y) := X(\tilde{Y}f) - (\nabla_X \tilde{Y}) f + 1/2 \cdot T(X, \tilde{Y}) f$. Dabei bezeichnet $\tilde{Y}$ eine Fortsetzung von Y zu einem Vektorfeld. H^f heißt die Hessesche Bilinearform von f bezüglich ∇. Wenn p der gemeinsame Fußpunkt von X und Y ist, so schreiben wir auch $H^f{}_p(X, Y)$ statt $H^f(X, Y)$.

Die rechte Seite der Definition ist nur sinnvoll, wenn $\tilde{Y}$ ein Vektorfeld ist. Für $g \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ ist $H^f(X, g \cdot Y) = X((g \cdot \tilde{Y}) f) + - (\nabla_X (g \cdot \tilde{Y})) f + 1/2 \cdot g(p)\, T(X, \tilde{Y}) f = Xg \cdot Yf + g(p) \cdot X(\tilde{Y} f) + - g(p)(\nabla_X \tilde{Y}) f - Xg \cdot Yf + 1/2 \cdot g(p) \cdot T(X, \tilde{Y}) f = g(p) \cdot H^f(X, \tilde{Y})$.

Mit den lokalen Koordinaten $(x^1, \dots, x^n)$ gilt in einer Umgebung von p: $\tilde{Y}_q = \sum_{i=1}^n \tilde{Y}_q x^i \cdot \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_q$. Zusammen mit der Additivität von H^f folgt, daß die linke Seite der Definition tatsächlich nur von Y abhängt.

Aus $H^f(X, Y) - H^f(Y, X) = [\tilde{X}, \tilde{Y}] f - \nabla_X \tilde{Y} f + \nabla_Y \tilde{X} f + + T(\tilde{X}, \tilde{Y}) f = 0$ (nach der Definition von T) folgt, daß H^f symmetrisch ist.

H^f ist ein Tensorfeld vom Typ $(2, 0)$ und verallgemeinert die alte nur für Punkte p mit $df_p = 0$ gegebene Definition von $H^f{}_p$. Aus der Symmetrie von $H^f{}_p$ folgt auch sofort, daß $H^f(X, Y)$ unabhängig von den Fortsetzungen von X, Y zu $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ ist.

4.9. LEMMA. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit kovarianter Ableitung ∇, $2 \leq k \in \mathbf{N}$.

Dann ist die Abbildung $H : {}^kC^\infty(M, \mathbf{R}) \to \mathcal{T}_0^2$ mit $f \mapsto H^f$ stetig.

Beweis: Sei U der Definitionsbereich für eine Karte $(x^1, \ldots, x^n)$. Dann ist $H^f|_U = \sum_{i,j=1}^{n} {}^f a_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ mit ${}^f a_{ij}(p) = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i} f|_p + \sum_{k=1}^{n} b^k{}_{ij}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}|_p f$ für $p \in U$, wobei die $b^k{}_{ij}$ nur von ∇ abhängen. Da die Werte von $b^k{}_{ij}$ auf einer kompakten Menge $K \subset U$ beschränkt sind, unterscheiden sich die ${}^f a_{ij}$ beliebig wenig von den ${}^g a_{ij}$ auf K, wenn sich nur die ersten beiden Ableitungen von f und g genügend wenig auf K unterscheiden. Mit 4.7. folgt die Behauptung.

q.e.d.

4.10. DEFINITION. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $p \in M$, $t \in \mathcal{T}_0^2$. $\text{null}_p(t) := \dim_{\mathbf{R}} (X \in TM_p / t_p(X, Y) = 0$ für alle $Y \in TM_p)$. $\text{rang}_p(t) := n - \text{null}_p(t)$.

Bemerkung: 1. Seien t_{ij} die Koeffizienten von t bezüglich einer Karte. Dann gilt $\text{rang}_p(t) = \text{rang}(t_{ij}(p))$, wobei der letzte Ausdruck als Rang einer Matrix in üblichem Sinne aufzufassen ist.

2. Sei N eine kritische Mannigfaltigkeit von f. Dann ist 2.6.3. genau dann erfüllt, wenn $\text{null}_p(H^f) = \dim(N)$ für alle $p \in N$ gilt.

4.11. LEMMA. Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit, $t \in \mathcal{T}_0^2$, $A \subset M$, A kompakt, und es gelte für alle $p \in A$ $\text{rang}_p(t) = r$.

Dann gibt es eine Umgebung U von t in $\mathcal{T}^2_0$ und eine Umgebung K von A in M, so daß für alle $(\tau, p) \in U \times K$ gilt: $\text{rang}_p(\tau) \geq r$.

Beweis: Sei $x = (x^1, \ldots, x^n)$ eine Karte in U_p, einer Umgebung von $p \in A$. Dann ist $t|_{U_p} = \sum_{i,j=1}^{n} t_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$ und $\text{rang}(t_{ij}(p)) = r$. Nun gibt es eine Umgebung W_p der Matrix $(t_{ij}(p))$ in der üblichen Normtopologie, die nur Elemente vom Rang größer als r enthält. Sei $K_p \subset U_p$ eine kompakte Umgebung von p, so daß $(t_{ij}(K_p)) \subset W_p$. $V_p :=$

$= \{\bar{t} \in \mathcal{T}^2{}_0 / \bar{t}_{ij}(K_p) \subset W_p\}$ ist eine offene Umgebung von t. Endlich viele $K_{p_1}, \ldots, K_{p_r}$ überdecken A. Dann haben $U := \bigcap_{i=1}^{r} V_{p_i}$ und $K := \bigcup_{i=1}^{r} K_{p_i}$ die behaupteten Eigenschaften.

q.e.d.

4.12. 1. Wir benutzen folgende wohlbekannte Ergebnisse: für jedes $x \in M$ ist $G \cdot x$, die Bahn von G durch x, eine kompakte Untermannigfaltigkeit von M. Bezeichne G_x die Isotropiegruppe von x in G. Dann ist $G \cdot x$ diffeomorph zu G/G_x. Der Faserraum $(G, p_r, G/G_x)$ besitzt in einer Umgebung W von $p_r(e) = \{G_x\}$ in G/G_x einen C^∞-Schnitt s. e bezeichnet das Einselement in G.

2. Wir führen die Abkürzungen ein:
$B_r(x) := \exp(\nu(G \cdot x)(r))$, $S_r(x) := \exp(\nu(G \cdot x)(r) \cap \pi^{-1}(x))$.

Dabei bezeichnet $(\nu(G \cdot x), \pi, G \cdot x)$ das Normalenbündel von $G \cdot x$ in M, versehen mit der von TM induzierten Riemannschen Metrik. Aus der Kompaktheit von $G \cdot x$ folgt, daß für genügend kleine $r > 0$ die linken Seiten der Abkürzungen sinnvoll sind. $B_r(x)$ ist eine Umgebung von $G \cdot x$. Da G eine Gruppe von Isometrien ist, gilt $g(B_r(x)) = B_r(x)$ für alle $g \in G$.

3. Sei $G \cdot x$ eine kritische Bahn von f, $f \in C_G^\infty(M, \mathbf{R})$. Dann ist 2.6.3. für alle $p \in G \cdot x$ erfüllt, wenn es nur in einem Punkt p_0 erfüllt ist, denn nach 2.4.2. gilt $H^f{}_{p_0}(X, Y) = H^{f \circ g}_{p_0}(X, Y) = H^f{}_{gp_0}(g_* X, g_* Y)$ für jedes $g \in G$ und alle $X, Y \in TM_{p_0}$.

4. Index $(G \cdot x, f)$ ist für jede nichtentartete kritische Bahn $G \cdot x$ von f definiert, denn $((I - P)\nu(G \cdot x))_{gp_0} = g_*((I - P)\nu(G \cdot x)_{p_0})$. wobei P durch 2.8. und 2.10. bestimmt ist.

4.13. Definition. Sei M eine n-dimensionale G-Mannigfaltigkeit, A eine Teilmenge von M. Setze

$$C_G^\infty(A; M, \mathbf{R}) := \left\{ f \in C_G^\infty(M, \mathbf{R}) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ ist eine Umgebung der kritischen Punkte von } f \text{ in } A \text{ und diese} \\ \text{Punkte sind eine Vereinigung von nichtentarteten kritischen} \\ \text{Bahnen von } G. \end{array} \right\}$$

4. 14. Lemma. Sei $2 \leq k \in \mathbf{N}$, A eine kompakte Teilmenge von M. Dann ist $C_G^\infty(A; M, \mathbf{R})$ offen in ${}^kC_G^\infty(M, \mathbf{R})$.

Beweis: Sei $f \in C_G^\infty(A\,;\, M,\, \mathbf{R})$. Da A kompakt ist, enthält es nur endlich viele nichtentartete kritische Bahnen $G \cdot x_1 \ldots, G \cdot x_r$ mit $x_i \in A$ von f. Nach 4.11. und 4.9. gibt es eine Umgebung V von f in ${}^kC_G^\infty(M,\, \mathbf{R})$ und Umgebungen $B_{r_i}(x_i) \subset \mathring{A}$ von $G \cdot x_i$, so daß für alle $i = 1, \ldots, r,\ p \in B_{ri}(x_i),\ g \in V$ gilt: $\operatorname{rang}_p(H^g) \geq n_i$ für $n_i = \operatorname{rang}_{x_i}(H^f)$. In der kompakten Menge $C := A - \bigcup\limits^{r} \overbrace{B_{r_i}(x_i)}^{\circ}$ hat f keine kritischen Punkte, also ist $\inf\limits_{p \in C} \| \operatorname{grad} f_p \| = a > 0$. $Q := V \cap \{g \in C_G^\infty(M,\, \mathbf{R}) / \inf\limits_{p \in C} \| \operatorname{grad} g_p \| > a/2\}$ ist eine offene Umgebung von f in ${}^kC^\infty(M, \mathbf{R})$. Es ist zu zeigen: $Q \subset C_G^\infty(A; M, \mathbf{R})$. Dazu sei $g \in Q$, und $x \in A$ sei ein kritischer Punkt von g. Es gibt ein $i \in \mathbf{N}$ mit $x \in B_{r_i}(x_i)$, und daher ist auch $G \cdot x \subset B_{r_i}(x_i)$. Es ist $\operatorname{rang}_q(H^g) \geq n_i = n - \dim(G \cdot x_i)$ für alle $q \in G \cdot x$. Nun gilt nach 2.7.2. Rang $(H^g) \leq n - \dim(G \cdot x)$. $G \cdot x$ ist also nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit, wenn nur $\dim(G \cdot x) \geq \dim(G \cdot x_i)$ ist. Es ist $x = \exp(v)$ mit $v \in TM_p$ und $p \in G \cdot x_i$, und daher gilt für alle $g \in G : gx = \exp(g_*(v))$. Aus $gx = \tilde{g}x$ folgt $gp = \tilde{g}p$ also auch $G_x \subset G_p$. Mit 4.12.1. folgt daher $\dim(G \cdot x) \geq \dim(G \cdot p) = \dim(G \cdot x_i)$. Daher ist $\dim(G \cdot x) = \dim(G \cdot x_i)$.

q.e.d.

Das folgende technische Lemma beantwortet eine lokale Frage, die im Beweis des Dichte-Lemmas auftritt.

4.15. Lemma (A.G. Wasserman (14))

Vor.: Sei H ein endlich-dimensionaler Hilbertraum, $0 < r \in \mathbf{R}$, G eine Gruppe von orthogonalen Transformationen von H und H_G der bezüglich G invariante Unterraum von H. Sei $f \in C_G^\infty(H,\, \mathbf{R})$, so daß $f|_{HG(r)}$ nur nichtentartete kritische Punkte hat, und $0 \in H$ der einzige entartete kritische Punkt von f in $H_G(r)$ ist.

Beh.: Zu jeder Umgebung U von f in ${}^kC^\infty(H,\, \mathbf{R})$ gibt es ein $\tilde{f} \in U$, so daß gilt:

1. $\tilde{f} | \{x \in H / \|x\| > r\} = f | \{x \in H / \|x\| > r\}$.

2. $\tilde{f}$ hat in $H_G(r)$ nur nichtentartete kritische Punkte.

Beweis: Bezeichne $P: H \to H_G$ die Projektionsabbildung. Da alle kritischen Punkte von $f|_{H_G(r)}$ isoliert liegen, gibt es ein $c \in \mathbf{R}$ mit $r > c > 0$, so daß die Kugel vom Radius c um $0 \in H$ nur 0 als kritischen Punkt enthält. Sei λ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ wie im Klebe-Lemma gewählt. Setze $\tilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon \cdot \lambda(\|x/c\|^2) \|(I - P)(x)\|^2$ für $x \in H$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Über das ε wird noch verfügt. Für $\|x\| \geq c$ ist $\tilde{f}(x) = f(x)$ und 1. ist erfüllt. Wegen $\tilde{f}|_{H_G} = f|_{H_G}$ haben $\tilde{f}$ und f auf H_G dieselben kritischen Punkte. Wir untersuchen, ob 0 ein nichtentarteter kritischer Punkt von $\tilde{f}$ ist.

Es gilt $H^{\tilde{f}}_0(v, w) = d^2 f|_0 (v, w) + 2\varepsilon < (I - P)(v), (I - P)(w) >$.

Wir zerlegen v und w bezüglich P, dann gilt in Matrix-Schreibweise mit durch f bestimmten A, B, C

$$(P(v), (I - P)(v)) \begin{pmatrix} (d^2(f|_{H_G})|_0, & B \\ A & , C + \varepsilon 2 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (P(w) \\ (I - P)(w) \end{pmatrix} = H^{\tilde{f}}_0(v, w).$$

Die Determinante der großen Matrix ist ein Polynom in ε, und da $d^2(f|_{H_G})|_0$ invertierbar ist, ist die große Matrix genau dann invertierbar, wenn ε ungleich jeder Wurzel des Polynoms ist. Wenn ε zusätzlich genügend klein ist, so unterscheiden sich f und $\tilde{f}$ in der C^k-Topologie wenig.

q.e.d.

4.16. Induktions-Methatheorem (R.S. Palais ((8), 1.8.1.) Sei P eine aussagenwertige Funktion, die für alle kompakten Liegruppen definiert ist. Wenn für jede kompakte Liegruppe G aus der angenommenen Richtigkeit von $P(H)$ für alle echten Untergruppen H von G die Richtigkeit von $P(G)$ folgt, dann ist $P(G)$ für alle kompakten Liegruppen G richtig.

Beweis: Wir nehmen an, daß es eine kompakte Liegruppe G gibt, für die $P(G)$ falsch ist. Unter allen kompakten Liegruppen G, für die $P(G)$ falsch ist, gibt es solche mit minimaler Dimension und unter diesen eine, die wir mit G^* bezeichnen, mit der kleinsten Anzahl an Komponenten. Für alle $H \subset G^*$ ist dann $P(H)$ wahr, so daß nach der Voraussetzung widersprüchlicherweise auch $P(G^*)$ wahr sein müßte.

q.e.d.

Sei $H \in C^\infty_G(M, \mathbf{R})$, $\varepsilon: M \to (0, \infty)$ stetig. Wir benutzen die Abkürzung $C^\infty_G(M, \mathbf{R})(H, \varepsilon) := \left\{ \begin{matrix} f \in C^\infty_G(M, \mathbf{R}) / |H(p) - f(p)| \leq \varepsilon(p) \\ \text{für alle } p \in M \end{matrix} \right\}$

$C^\infty_G(M, \mathbf{R})(H, \varepsilon)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von ${}^\infty C^\infty_G(M, \mathbf{R})$. $C^\infty_G(M, \mathbf{R})(H, \varepsilon)$ versehen mit der induzierten Topologie bezeichnen wir mit ${}^\infty C^\infty_G(M, \mathbf{R})(H, \varepsilon)$.

4.17. DICHTE-LEMMA (A.G. WASSERMAN (14), § 5)

Sei M eine endlich-dimensionale G-Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis, G eine kompakte Liegruppe. Dann gilt:

1. $C_G^\infty(M; M, \mathbf{R})$ ist dicht in ${}^\infty C_G^\infty(M, \mathbf{R})$.
2. Für alle H und ε ist $C_G^\infty(M; M, \mathbf{R}) \cap C_G^\infty(M, \mathbf{R})(H, \varepsilon)$ dicht in ${}^\infty C_G^\infty(M, \mathbf{R})(H, \varepsilon)$.

Beweis: Zu 1. **(A)** Sei $x \in M - M_G$, *d.h.* : $G_x \neq G$, und sei $0 < r \in \mathbf{R}$ so gewählt, daß $B_{2r}(x)$ sinnvoll ist. Wir zeigen durch Induktion, daß $C_G^\infty(B_r(x); B_{2r}(x), \mathbf{R})$ dicht in ${}^\infty C_G^\infty(B_{2r}(x), \mathbf{R})$ liegt. Nach Definition der C^∞-Topologie genügt es dazu, für jedes $k \in \mathbf{N}$ die Dichte in der C^k-Topologie nachzuweisen. Wir verwenden das Induktions-Methatheorem.

Sei also $C_{G_x}^\infty(S_r(x); S_{2r}(x), \mathbf{R})$ dicht in ${}^k C_{G_x}^\infty(S_{2r}(x), \mathbf{R})$. Sei $F \in C_G^\infty(B_{2r}(x), \mathbf{R})$, $\hat{F} := F \mid S_{2r(x)}$. Wähle $\hat{f} \in C_{G_x}^\infty(S_r(x); S_{2r}(x), \mathbf{R})$ in der C^k-Topologie nahe zu $\hat{F}$ und setze es folgendermaßen zu einer Funktion f auf $B_{2r}(x)$ fort: Für $p \in B_{2r}(x)$, $q := \pi \circ \exp^{-1}(p)$ und $gx = q$ mit $g \in G$ setze $f(p) := \hat{f}(g^{-1} p)$. f ist wohldefiniert, da $\hat{f}$ unter G_x invariant ist, und invariant unter G. Diese Konstruktion macht aus $\hat{F}$ natürlich wieder F. Sei $h : G/G_x \to G \cdot x$ der Diffeomorphismus $g \cdot G_x \mapsto gx$, $V := h(W)$ (siehe 4.12.1.), $U := \exp(\nu(G \cdot x)(2r) \mid V)$, und sei $\phi : U \to S_{2r}(x)$ durch $p \mapsto (s \circ h^{-1} \circ \pi \circ \exp^{-1}(p))^{-1} p$ gegeben. U ist eine Umgebung von $S_{2r}(x)$, ϕ ist differenzierbar, und es gilt $\hat{f} \circ \phi|_U = f|_U$. Da f invariant ist, folgt hieraus $f \in C_G^\infty(B_{2r}(x), \mathbf{R})$.

Wir haben einen Diffeomorphismus $K: S_{2r}(x) \times V \to U$ der Form $(a, b) \mapsto s \circ h^{-1}(b) \cdot a$, und es gilt $(*)$: $f \circ K(a, b) = \hat{f}(a)$.

Sei z ein kritischer Punkt von f in $B_r(x)$. Dann ist auch $a := \phi(z) \in S_r(x)$ kritisch, und wegen $f|S_{2r}(x) = \hat{f}$ ist $d\hat{f}|_a = 0$.

Nach Induktionsannahme ist $G_x \cdot a$ eine nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit von $\hat{f}$, und es ist $a \in \overset{\circ}{\widehat{S_r(x)}}$, daher liegt die Bahn durch z schon in $\overset{\circ}{\widehat{B_r(x)}}$. Da $K(G_x \cdot a \times V) = G \cdot a \cap U$ ist, und da $G_x \cdot a \times V$ eine nichtentartete kritische Mannigfaltigkeit von $f \circ K$ ist, folgt mit 4.12.3. und 2.4.2. also: $f \in C_G^\infty(B_r(x); B_{2r}(x), \mathbf{R})$.

Nun gilt analog zu $(*)$: $F \circ K(a, b) = F(a)$. Endlich viele $g_i(U) =: U_i, g_i \in G$, überdecken $B_{2r}(x)$. Mit 4.2.4. und den Karten $\{\varphi_\alpha \circ K^{-1} \circ g_i^{-1}\}_{\substack{\alpha \in I \\ i=1,2,\ldots e}}$, wobei $\{\varphi_\alpha\}\ \alpha \in I$ ein Atlas für $S_{2r}(x) \times V$ ist, und unter Ausnutzung der Invarianz von F und f folgt, daß f nahe F in der C^k-Topologie liegt, wenn nur $\hat{f}$ gut gewählt ist. Nach dem Induktions-Methatheorem folgt also, daß $C_G^\infty(B_r(x)\,;\,B_{2r}(x), \mathbf{R})$ dicht in ${}^kC_G^\infty(B_{2r}(x), \mathbf{R})$ liegt.

Es gilt auch: $C_G^\infty(B_r(x)\,;\,M, \mathbf{R})$ ist dicht in ${}^kC_G^\infty(M, \mathbf{R})$. Denn sei $f \in C^\infty(B_r(x)\,;\,B_{2r}(x), \mathbf{R})$ eine C^k-Approximierende von $F|_{B_{2r}(x)}$ mit $F \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, und sei $\varphi \in C_G^\infty(M, [0, 1])$ mit $\varphi|_{B_r(x)} = 1$ und $\varphi | \complement\, \widehat{\mathring{B}_{2r}(x)} = 0$. Dann ist $g := \varphi f + (1 - \varphi) F$ eine beliebig gute C^k-Approximierende von F, wenn nur f gut gewählt ist, da die ersten k lokalen Ableitungen von φ auf $B_{2r}(x) - B_r(x)$ beschränkt sind.

(B) Sei $x \in M_G$, $A(x) := B(x) \cap M_G$, wobei $B(x)$ eine kompakte Umgebung von x ist. Wir zeigen, daß $C_G^\infty(A(x)\,;\,M, \mathbf{R}) := \{f \in C_G^\infty(M, \mathbf{R})$ / die kritischen Punkte von f in $A(x)$ sind nichtentartet$\}$ dicht in ${}^kC_G^\infty(M, \mathbf{R})$ ist. In ((7), § 6.8) wird gezeigt, daß $C^\infty(B(x); M, \mathbf{R})$ dicht in ${}^kC^\infty(M, \mathbf{R})$ liegt. Das Bild einer dichten Menge unter einer stetigen surjektiven Abbildung liegt dicht. Mit 4.5. folgt daher, daß wir zu jedem $F \in C_G^\infty(M, \mathbf{R})$ eine C^k-approximierenden $f \in C_G^\infty(M, \mathbf{R})$ finden können, so daß $f|_{M_G}$ nur nichtentartete kritische Punkte in $A(x)$ hat (für $h \in C^\infty(M, \mathbf{R})$ ist $\widetilde{h}|_{M_G} = h|_{M_G}$). Die kritischen Punkte von $f|_{M_G}$ in $A(x)$ liegen isoliert, daher hat f in $A(x)$ höchstens endlich viele entartete kritische Punkte $x_1, \ldots, x_e$. Sei $K(r) := \{x \in T_{x_1}/ \|x\| \leq r\}$, $0 < r \in \mathbf{R}$, und $\exp : K(2r) \to M$ eine Karte für eine Umgebung von x_1 mit $x_i \notin \exp(K(2r))$ für $i = 2, \ldots$, e. Auf $f \circ \exp$ wenden wir 4.15. an. Dadurch finden wir eine C^k-Approximierende für f, die nur noch e $-$ 1 entartete kritische Punkte in $A(x)$ hat. Durch Induktion folgt die Behauptung.

(C) Nach Lemma 4.14. sind die Mengen $C_G^\infty(B_r(x)\,;\,M, \mathbf{R})$ offen. Sei $f \in C_G^\infty(A(x); M, \mathbf{R})$, seien $x_1, \ldots, x_r$ die nichtentarteten kritischen Punkte von f in $A(x)$. Sei K eine kompakte Umgebung von $A(x)$, die außer $x_1, \ldots, x_r$ keine weiteren kritischen Punkte von f enthält. Es ist $f \in C_G^\infty(K; M, \mathbf{R})$, und nach 4.14. ist $C_G^\infty(K; M, \mathbf{R})$ offen. Sei $g \in C_G^\infty(K; M, \mathbf{R})$, $p \in A(x)$ und $dg|_p = 0$. Dann ist nach Definition von $C_G^\infty(K; M, \mathbf{R})$ p ein nichtentarteter kritischer Punkt ($p \in M_G$). Es folgt: $C_G^\infty(A(x); M, \mathbf{R})$ ist offen. Da M eine abzählbare Basis hat, überdecken abzählbar viele Mengen $\{B_{r_i}(x_i)\,;\,A(x_j)\}_{i,j\in\mathbf{N}}$ M. In einem Baireschen Raum liegt der abzählbare Durchschnitt von offenen dichten Mengen dicht. Mit 4.4. folgt daher: $C_G^\infty(M; M, \mathbf{R})$ ist dicht in ${}^\infty C_G^\infty(M, \mathbf{R})$.

Zu 2. Die zweite Behauptung wird mit denselben Argumenten bewiesen, wie die erste. In Teil **(A)** wählen wir f zusätzlich so, daß $\sup_{p \in S_{2r}(x)} |f(p) - H(p)| \leq \inf_{p \in B_{2r}(x)} (\varepsilon(p))$ gilt. q.e.d.

4.17. SATZ: (A.G. WASSERMAN (14), § 5) Sei M eine endlichdimensionale G-Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis, G eine kompakte Liegruppe. Dann gibt es eine G-invariante nach unten beschränkte Morse-Funktion auf M, deren kritische Menge eine Vereinigung von nichtentarteten kritischen Bahnen von G ist.

Beweis: Eine eigentliche Abbildung $f\colon M \to \mathbf{R}$ (*d.h.* : $f^{-1}(A)$ ist für kompaktes A kompakt) erfüllt die Bedingung (C). Seien $g, \delta \in C^\infty(M, \mathbf{R})$, sei $|\delta|$ durch $0 < r \in \mathbf{R}$ beschränkt, und sei $|f(x) - g(x)| \leq |\delta(x)|$ für alle $x \in M$. Dann ist auch g eigentlich, denn $g^{-1}[a, b] \subset f^{-1}[a-r, b+r]$. Auf M gibt es eigentliche Funktionen. Sei *z. B.* $\{\psi_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ eine invariante Zerlegung der Einsfunktion mit kompakten Trägern K_i. Dann ist ψ mit $\psi(x) := \sum_{i \in \mathbf{N}} i\, \psi_i(x)$ eigentlich. Da $C_G^\infty(M; M, \mathbf{R}) \cap C_G^\infty(M, \mathbf{R})(\psi, 1)$ dicht in ${}^\infty C_G^\infty(M, \mathbf{R})(\psi, 1)$ liegt nach 4.16.2., existiert die gesuchte Funktion. q.e.d.

4.18. BEMERKUNG. Über die Existenz von Morse-Funktionen auf unendlich-dimensionalen Mannigfaltigkeiten ist nichts bekannt. Eine Übertragung der in ((7), § 6) dargestellten Methode zur Konstruktion von Morse-Funktionen scheitert daran, daß kein Analogon des Satzes von Sard ((7), 6.1.) für Hilberträume gilt.

Die verallgemeinerte Morse Theorie ist nach 2.16. nur für vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten entwickelt worden. J. Mc ALPIN hat gezeigt ((11), 7.4), daß jede Mannigfaltigkeit mit abzählbarer Basis, die lokal wie ein separabler Hilbertraum aussieht, sich als abgeschlossene Untermannigfaltigkeit in einen separablen Hilbertraum einbetten läßt. Jede solche Mannigfaltigkeit besitzt also eine Riemannsche Metrik, durch die ihre Topologie vollständig metrisiert wird.

Wir nehmen einmal an, daß auf einer vollständigen Riemannschen Mannigfaltigkeit M eine nach unten beschränkte Morse-Funktion existiert. Aus ((7), Appendix) und 3.6. und dem Satz über die zellulare Approximation angewendet auf die Anklebeabbildungen und unter Benutzung der Bemerkung 3.2. folgt dann, daß M den Homotopietyp eines abzählbaren CW-Komplexes hat.

LITERATURVERZEICHNIS

(1) R. Bott. — *Nondegenerate critical manifolds. Annals of Mathematics.* Vol. 60 (1954), pp. 248-261.

(2) R. Bott. — *The Stable Homotopy of the Classical Groups. Annals of Mathematics.* Vol. 70 (1959), N.° 2, pp. 317-337.

(3) V. Klee. — *Some topological properties of convex sets.* Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), pp. 30-45.

(4) W. Klingenberg. — *Riemannsche Geometrie im Großen,* Bonn 1961. Vervielfältigte Vorlesungsausarbeitung.

(5) S. Lang. — *Introduction to Differentiable Manifolds.* Interscience Publishers, 1962.

(6) S.N. Mergelyan. — *Amer. Math. Soc. Translations, Series One.* Vol. 3, pp. 287-293.

(7) J. Milnor. — *Morse Theory. Annals of Mathematics Studies.* N.° 51 (1963).

(8) R. Palais. — *The classification of G-spaces.* Mem. Amer. Math. Soc. N.° 36 (1960).

(9) R. Palais. — *Morse Theory on Hilbert Manifolds. Topology.* Vol. 2 (1963), pp. 299-340.

(10) R. Palais. — *Homotopy Theory of infinite dimensional Manifolds. Topology.* Vol. 5 (1966), pp. 1-16.

(11) S. Smale. — *Lectures on Differential Topology* (1963), Columbia University, Notes by R. Abraham.

(12) E.H. Spanier. — *Algebraic Topology.* Mc. Graw-Hill Book Company, 1966.

(13) A. Wasserman. — *Morse theory for G-manifolds.* Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 71 (1965), pp. 384-388.

(14) A. Wasserman. — *Equivariant Differential Topology,* Dissertation, Brandeis University (1965), to appear in Topology.

(15) K. Yosida. — *Functional Analysis.* Springer-Verlag 1965.