L'UNIVERSO DI DE SITTER E LA RELATIVITÀ PROIETTIVA

di

GIUSEPPE ARCIDIACONO
(a Roma)

1 — INTRODUZIONE

In un recente lavoro [1] C. FRONSDAL osserva che l'assenza di un gruppo di movimenti in sé stessi, nei più generali spazi di Riemann, costituisce un formidabile ostacolo alla estensione dei modelli fisici. Infatti, nello studio delle particelle elementari, la costruzione di una teoria fisica e la sua interpretazione é basata, piuttosto che sul concetto di campo, sui concetti di energia, momento e spin, la cui esistenza é assicurata da un principio di invarianza rispetto ad un gruppo, gruppo che nel caso della relatività ristretta é quello di LORENTZ non omogeneo a 10 parametri (gruppo di POINCARÉ).

Egli quindi sostiene la opportunità di generalizzare la relatività ristretta, passando ad uno spazio-tempo a curvatura costante (Universo di DE SITTER) il quale possiede, come é noto [2] un gruppo di movimenti in sé ancora a 10 parametri. In tale spazio si possono allora definire l'energia, il momento, la massa e lo spin e si potranno studiare le rappresentazioni lineari irriducibili del gruppo, le particelle elementari e le loro interazioni. Inoltre si potranno eliminare, nel modo più semplice e naturale, gli integrali divergenti.

Ora é ben noto che sin dal 1952. L. FANTAPPIÈ aveva proposto una sua «teoria dei modelli di Universo» non più basata sulla relatività generale, ma sulla teoria dei gruppi. Se immaginiamo l'Universo come un sistema non caotico, ma *ordinato*, e quindi retto da *leggi*, é su tale concetto che bisogna fondare una teoria matematica dei possibili modelli di Universo. Egli osserva che «una caratteristica essenziale della nostra scienza fisica, come si é venuta costituendo da GALILEO in poi, consiste in questo: che essa non ci dà soltanto una *descrizione* più o meno perfetta dei fatti osservati, ma ci dà soprattutto le *leggi* che governano tali fatti, cioé delle regolarità generalissime che si verificano, non già per un fenomeno contingente, ma per tutta una classe di fenomeni, che quindi, per qualche riguardo, possono considerarsi *uguali*, superando così la contingenza di ciascun fenomeno singolo della stessa classe.... Con la scoperta delle *leggi*, che non sono più *fatti* naturali, rilevati direttamente od indirettamente dai sensi, ma *relazioni* tra tali fatti, che possono essere rilevate, non già dai sensi, ma soltanto dall'intelletto, la scienza fisica é passata da un primitivo stadio *descrittivo* dei fatti, allo stadio attuale che potremo dire *esplicativo* e più veramente scientifico, in quanto la conoscenza delle leggi, cioé delle relazioni tra i fatti, ci porta finalmente alla comprensione di più strette connessioni, che sussistono tra i fatti stessi» [3].

Se riflettiamo allora sul significato più profondo del concetto di legge, vediamo che una legge, dovendo valere per tutta una categoria di fenomeni uguali, risulta strettamente collegata al concetto di uguaglianza. Ma il concetto di uguaglianza é esprimibile mediante un insieme di operazioni geometriche, le quali formano un *gruppo*, rispetto al quale le leggi debbono risultare invarianti. E poichè ci sono infiniti gruppi di trasformazioni, ne seque che ci sarrano infiniti modelli di Universo, le cui leggi possono essere determinate per via matematica, a partire dal relativo gruppo, il quale esprime il criterio di uguaglianza tra due enti o fenomeni fisici.

Nello studio della fisica hanno poi particolare importanza i gruppi delle rotazioni negli spazi ad n dimensioni SO_n: essi infatti *godono della proprietà che ognuno di essi contiene i precedenti ed é contenuto nei successivi*. In conseguenza, ai vari gruppi delle rotazioni corrisponde tutta una serie di modelli di Universo, *ognuno dei quali perfeziona i precedenti ed é perfezionabile nei successivi:* tali modelli possono quindi essere considerati come delle successive approssimazioni del nostro Universo reale.

Da questo punto di vista, il gruppo di POINCARÉ (a 10 parametri) della fisica relativistica, risulta un perfezionamento del gruppo di di GALILEO della fisica classica, e ci si presenta come caso-limite del gruppo di DE SITTER-FANTAPPIÉ, ancora a 10 parametri. A tale gruppo, isomorfo a quello delle rotazioni SO_5 nello spazio a cinque dimensioni, corrisponde una nuova «relatività proiettiva» che é stata da me sviluppata in questi ultimi anni, e confrontata con le più recenti ricerche in campo cosmologico.

Un successivo ampliamento della fisica porta al «gruppo conforme» a 15 parametri, che risulta isomorfo al gruppo delle rotazioni SO_6 nello spazio a sei dimensioni, a così via [4].

É poi interessante osservare che nel passaggio dal gruppo SO_3 ai successivi, appare ogni volta una costante universale, e quindi nel gruppo SO_n dovranno intervenire n-3 costanti universali: infatti nella relatività ristretta (SO_4) interviene la velocità c della luce, nella relatività proiettiva (SO_5) appaiono le due costanti c ed r (raggio dell'universo) ed infine nella relatività conforme (SO_6) intervengono le tre costanti c,r ed h (costante di PLANCK).

In questo lavoro mi propongo di far vedere come il gruppo di DE SITTER-FANTAPPIÉ, oltre a fornirci una nuova cosmologia proiettiva, si sta rivelando di particolare interesse nello studio delle particelle elementari. Si ottiene così una prima convergenza tra i risultati della cosmologia e quelli della microfisica. Dopo una rapida rassegna di alcune delle più recenti ricerche sull'universo di DE SITTER, fatte dal punto di vista gruppale, esaminerò il legame tra la relatività proiettiva e quella conforme.

2 — RELATIVITÀ PROIETTIVA E COSMOLOGIA

Lo studio della cosmologia, fatto in base ai più recenti risultati della fisica e dell'astronomia, dovrebbe permetterci di risalire alla origine ed evoluzione dell'universo, e dovrebbe rivelarci il legame tra le leggi del microcosmo e quelle del macrocosmo. Se infatti l'universo é un tutto armonico ed organicamente collegato, la conoscenza di una sua piccola parte ci darà la spiegazione delle sue proprietà su grande scala, come del resto ci fanno intravedere le semplici relazioni tra le costanti universali della fisica atomica e della cosmologia.

Nella cosmologia troviamo invece le teorie più disparate, ed esiste il più completo disaccordo anche su punti fondamentali, come per esempio a proposito della età finita od infinita dell'universo, la validità o meno del principio cosmologico perfetto e la legge di conservazione della massa-energia. Il motivo di tale disaccordo é da ricercarsi nel fatto che la relatività generale di EINSTEIN é compatibile con un numero infinito di modelli di Universo, ed il problema cosmologico, così come viene impostato, risulta largamente indeterminato.

Occorre quindi una teoria che sia compatibile con un solo modello di Universo, e di questo parere sono vari cosmologi, come BONDI, GOLD e SCIAMA. Il Milne aveva cercato di costruire una siffatta teoria, partendo da principi generali posti a priori, come il principio cosmologico e l'espansione con velocità di fuga proporzionale alla distanza, ma la sua «relatività cinematica» non é risultata convincente, sia dal punto di vista fisico che matematico. La cosmologia moderna si trova quindi in presenza di tutta una serie di teorie tra loro incompatibili, e che non si sanno conciliare in una teoria unica.

Per superare le varie difficoltà in cui si dibattono le varie teorie cosmologiche, sarebbe più opportuno, invece di costruire delle teorie più o meno arbitrarie, vedere se si può perfezionare la relatività ristretta in modo da renderla adatta allo studio dei fenomeni su scala cosmologica.

Ora, come ha dimostrato L. FANTAPPIÉ nel 1954, la relatività ristretta risulta caso-limite di una nuova teoria basata sul gruppo dei movimenti in sé del cronotopo di DE SITTER a curvatura costante [3]. Per sviluppare questa nuova teoria con la tecnica dei gruppi, e cioé senza ricorrere alla geometria differenziale, ho osservato che uno spazio curvo, dovrà apparire ai suoi osservatori come se fosse piatto, e quindi occorre utilizzare la rapprensentazione geodetica di BELTRAMI di uno spazio a curvatura costante su di uno spazio piatto [5]. É noto infatti che la geometria riemanniana degli spazi a curvatura costante, viene subordinata alla geometria proiettiva, ed il KLEIN ha mostrato che questo può farsi al modo di CAYLEY, e cioé assumendo una quadrica, la quale viene considerata nello spazio proiettivo come «assoluto» di una geometria metrica. Si ottiene cosi una versione «proiettiva» della nuova relatività, che per tale motivo ho chiamato «relatività proiettiva» (il termine «relatività finale», introdotto del FANTAPPIÉ, si può prestare ad equivoci).

Il «gruppo di DE SITTER» che rappresenta i movimenti in sé dello spazio-tempo a curvatura costante, corrisponde nella versione proiettiva al «gruppo di FANTAPPIÉ» le cui trasformazioni mutano in sé l'assoluto di CAYLEY-KLEIN della geometria non euclidea. Questa impostazione mi ha permesso di sviluppare la nuova teoria con i metodi della geometria proiettiva, e quindi con un formalismo matematico perfettamente analogo a quello utilizzato nella relatività ristretta.

Una volta calcolate le trasformazioni finite del gruppo di FANTAPPIÉ, si trova che nella relatività proiettiva vale una legge di addizione delle durate, analoga a quella di addizione delle velocità, e quindi appare una durata limite r/c che si può interpretare come età (apparente) dell'universo. Inoltre viene ritrovata a partire dal gruppo la legge di fuga con velocità proporzionale alla distanza, e la costante di Hubble assume il valore c/r (sullo spazio di contemporaneità $t = O$). Successivamente ho fatto vedere che si ha una variazione della massa non solo con la velocità, ma anche con la distanza spazio-temporale dall'osservatore, ed in conseguenza nella relatività proiettiva, ogni corpo di massa m possiede non soltanto una energia intrinseca $E = m_0 c^2$, ma anche un momento di inerzia polare intrinseco, dato da $I = m_0 r^2$, dove r é il raggio del cronotopo.

Per tale via si possono ritrovare in modo rigoroso alcuni dei principali risultati della relatività cinematica di MILNE e delle teorie evoluzionarie e stazionarie dell'universo, teorie che sembravano tra loro incompatibili. Si introduce in tal modo una doppia scala sia spaziale che temporale, ed il legame tra le due scale é espresso mediante l'invariante proiettivo della geometria non euclidea (logaritmo di un birapporto). La nuova relatività porta poi ad una unificazione della idrodinamica relativistica e dello elettromagnetismo, cosa che del resto é suggerita dalla moderna magnetoidrodinamica relativista, sviluppata proprio in questi ultimi anni.

Lo studio dell'Universo di De Sitter, fatto mediante la teoria dei gruppi ci consente quindi di sviluppare una nuova teoria cosmologica, e si rivela molto utile nello studio delle particelle elementari, come vedremo nei successivi paragrafi.

3 — L'UNIVERSO DI DE SITTER ED IL GRUPPO DI FANTAPPIÉ

Nel 1956 ho calcolato le trasformazioni finite del gruppo proiettivo di FANTAPPIÉ, in alcuni casi notevoli e successivamente ne ho esaminato alcune conseguenze fisiche. Adesso completerò quei risultati, calcolando le trasformazioni di tale gruppo, nel caso in cui intervengono i quattro parametri della traslazione T_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ cioé T_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ e T_0.

A questo scopo osserviamo che nella relatività ristretta, per passare dalle trasformazioni di LORENTZ nel caso in cui il parametro V é parallelo all'asse delle x

$$(3{,}1) \qquad x' = \frac{x - V\,t}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\; y' = y\,;\; z' = z\,;\; t' = \frac{t - V\;x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

al caso generale, G. HERGLOTZ [6] ha scomposto il vettore x_α di componenti (x, y, z) in una parte a_α lungo la direzione delle velocità V_α ed in una componente b_α ad essa perpendicolare. Dalle (1) segue che

$$(3{,}2) \qquad a_\alpha = \frac{a_\alpha - V_\alpha\, t}{\sqrt{1-\beta^2}}\,;\; b'_\alpha = b_\alpha\,;\; t' = \frac{t - V_\alpha\; a_\alpha/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

ora si ha

$$a_\alpha = x_\beta\; V_\beta\; V_\alpha/V^2\,;\; b_\alpha = x_\alpha - a_\alpha = x_\alpha - x_\beta\; V_\beta\; V_\alpha/c^2$$

$$x'_\alpha = a'_\alpha + b'_\alpha\,;\; V_\alpha\, a_\alpha = V_\alpha\;(a_\alpha + b_\alpha) = V_\alpha\, x_\alpha$$

e quindi dalle (2) seguono le trasformazioni cercate

$$(3{,}3) \qquad \begin{cases} x'_\alpha = x_\alpha + \dfrac{1}{V^2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(x_\beta\; V_\beta\; V_\alpha) - \dfrac{V_\alpha\, t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\[2ex] t' = \dfrac{t - x_\alpha\; V_\alpha/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \text{con} \quad \beta^2 = V_\alpha\; V_\alpha/c^2 \end{cases}$$

In modo del tutto analogo, dalle trasformazioni del gruppo di FANTAPPIÉ nel caso in cui la traslazione é parallela all'asse delle t

$$(3.4) \qquad x'_\alpha = \frac{x_\alpha \sqrt{1-\gamma^2}}{1 + \dfrac{c}{r}\gamma\, t}\,;\; t' = \frac{t + T_0}{1 + \dfrac{c}{r}\gamma\, t}$$

scomponendo il vettore x_i di componenti (x, y, z, ct) in due parti a_i e b_i, la prima parallela alla traslazione cronotopica T_i e la seconda ad essa ortogonale, e ponendo $\alpha_s\; \alpha_s = \alpha^2 - \gamma^2$, avremo

$$(3{,}5) \qquad b'_s = \frac{b_s \sqrt{1 + \alpha_i\, \alpha_i}}{1 + \alpha_k\, \alpha_k/r}\,;\; a'_s = \frac{a_s + T_s}{1 + \alpha_k\; \alpha_k/r} \quad (s = 1, 2, 3, 4)$$

Ora si ha

$$\alpha_s\, \alpha_s = \alpha_s\; (a_s + b_s)\,;\; a_s = x_i\;\; T_i\;\; T_s/T^2$$

$$b_s = x_s - x_i\; T_i\; T_s/T^2\,;\; x'_s = a'_s + b'_s$$

addizionando tra di loro le (5) avremo allora la trasformazione

$$x'_s = \frac{x_i\, T_i\, T_s/T^2 + T_s + (x_s - x_m\, T_m\, T_s/T^2)\, \sqrt{1 + \alpha_i\, \alpha_i}}{1 + \alpha_m\, x_m/r}$$

e semplificando

$$x'_s = \frac{x_s\, \sqrt{1 + \alpha_m\, \alpha_m} + T_s\, [1 + (x_m\, T_m/T^2)\, (1 - \sqrt{1 + \alpha_k\, \alpha_k})}{1 + \alpha_m\, x_m/r}.$$

la quale si può scrivere nel seguente modo

$$\boxed{x'_s = \frac{x_s\, \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2} + T_s\, [1 + x_m\, T_m/(1 + \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2})}{1 + \alpha_k\, x_k/r}} \tag{3,6}$$

che é la traslazione proiettiva di parametri T_i.

Se si vuole che nella (6) non figurino radicali, sostituiamo al parametro T_i il nuovo parametro τ_i, così definito

$$T_i = \frac{2\, \tau_i}{1 - \tau^2} \qquad \text{con} \qquad \tau^2 = \tau_s\, \tau_s \tag{3,7}$$

Ne segue allora che $\sqrt{1 + \alpha_s\, \alpha_s} = (1 + \tau^2)/(1 - \tau^2)$ e sostituendo tali valori nella (6) otteniamo la trasformazione

$$\boxed{x'_s = (x_s + \tau_s)\, \frac{1 + \tau^2}{1 - \tau^2 - 2\, \tau\, x/r} + \tau_s} \tag{3,8}$$

che non contiene radicali, e nella quale si é posto $\tau\, x = \tau_s\, x_s$.

4 — Lo spazio-tempo quantizzato di Snyder

L'idea di introdurre in fisica una lunghezza elementare per superare alcune difficoltà della teoria quantistica dei campi, risale ad Heisenberg (1938). Più recentemente essa é stata ripresa da H.S. Snyder [7], nel 1947, con la introduzione di uno «spazio dei momenti» di De Sitter a curvatura costante: in tal modo l'ordinario spazio piatto dei momenti viene modificato in grande, e cioé per grandi valori dei momenti. Si trova allora che gli operatori di traslazione sono dati da

$$(4,1)\quad x^{\alpha} = ih\left[\frac{\partial}{\partial p_\alpha} + \left(\frac{r}{h}\right)^2 p^\alpha p^m \frac{\partial}{\partial p_m}\right];\ x^4 = ih\left[\frac{\partial}{\partial p_4} - \left(\frac{r}{hc}\right)^2 p^4 p^m \frac{\partial}{\partial p_m}\right]$$

e non sono più permutabili. Come osserva G. Cicogna, le X^i non sono più osservabili simultanee, e si può allora ricavare una relazione di incertezza approssimata

$$(4,2)\qquad \Delta x^i \Delta x^k \sim 1/r^2$$

La introduzione di un raggio di curvatura nello spazio dei momenti, non solo modifica su grande scala le sue proprietà ma conduce pure ad una modifica microscopica, e cioé apprezzabile su distanze dell'ordine di 1/r.

Più recentemente (1960-63) Gol'Fand [8] e Kadyshevsky [9] considerano lo spazio dei momenti di De Sitter, nella sua versione proiettiva, ed osservano che tale spazio risulta discreto, mentre é continuo solo su larga scala. Scelte le unità di misura in modo che $c = h = 1$ ed introdotta una metrica proiettiva al modo di Klein, l'assoluto di tale metrica é la ipersuperficie

$$(4,3)\qquad p^2 = 1 \quad \text{con} \quad p^2 = p^i p^i$$

ed il gruppo dei movimenti nello p-spazio é dato dalle trasformazioni che lasciano invariante la (3). Tale gruppo dei movimenti contiene quello di Lorentz, formato dalle trasformazioni che lasciano invariante p^2 e mutano in sé il punto $p = O$. Oltre a quello di Lorentz, tale gruppo contiene le «traslazioni di vettore k», che trasformano il punto $p = O$ nel punto k. Esse vengono indicate col simbolo $p\,(+)\,k$, e sono date da

$$(4,4)\qquad q = p\,(+)\,k = \frac{p\sqrt{1-k^2} + k\,[1 + p\,k/(1+\sqrt{1-k^2}]}{1 + p\,k}$$

Si ha così una legge di addizione dei vettori nel p-spazio, che non é più commutativa, perché $p(+)k = k(+)p$, tranne il caso in cui i vettori sono colineari, perché allora

$$(4,5)\qquad p\,(+)\,k = \frac{p+k}{1+pk} = k\,(+)\,p$$

La (4) non é altro che la traslazione del gruppo di FANTAPPIÉ, che abbiamo calcolato al numero precedente, salvo che adesso é riferita ai momenti, invece che alle coordinate.

Applicando questa nuova legge di addizione dei momenti, GOL'FAND sviluppa la tecnica dei diagrammi di FEYNNANN, in modo da tener conto che nello spazio dei momenti di DE SITTER non vale più la legge di conservazione del momento-energia. Allo scopo di semplificare i calcoli, egli introduce una l-parametrizzazione, ed allora la (4) assume una forma più semplice

$$(4,6) \quad q = d_0\,(l)\,p = l + \frac{1 + l^2}{1 - l^2 - 2\,l\,p}\,(l + p) \text{ con } k = 2l/(1 - l^2)$$

nella quale non intervengono più i radicali, e che soddisfa ancora alle condizioni di invarianza proiettiva.

Per tale via si possono eliminare le espressioni divergenti (catastrofe dell'ultravioletto) e le anomalie nella interazione particella-antiparticella risultano una conseguenza delle proprietà dello spazio a curvatura costante. Viene poi stabilito il notevole risultato che mentre in generale la legge di conservazione della massa-energia é solo approssimata, essa vale rigorosamente negli urti elastici. La introduzione dello p-spazio a curvatura costante ci permette di basare la teoria delle particelle elementari solo su una interazione debole universale e sulla interazione elettromagnetica. In questa teoria infatti, le interazioni forti sarebbero degli effetti secondari associati alla formazione dei mesoni nelle particelle composte. In tal modo si potrà trovare una spiegazione delle strane proprietà geometriche dei processi deboli, come la non conservazione della parità spaziale e la non invarianza per forti inversioni del tempo.

La introduzione di una lunghezza fondamentale dovrebbe quindi permettere una corretta descrizione dei processi fisici che avvengono alle alte energie e corrispondentemente su piccola scala. Questo significa che la struttura geometrica dello x-spazio in piccolo e dello p-spazio in grande sono strettamente connesse alle interazioni deboli.

5 — MODELLI DI UNIVERSO E GRUPPI TOPOLOGICI

Nella sua «teoria dei modelli di Universo» (1952) basata sui gruppi, il FANTAPPIÉ faceva corrispondere ad un gruppo di Lie G^r ad r parametri, un modello di Universo UG^r. Tale gruppo definisce, come si é detto, un criterio di uguaglianza tra due enti o fenomeni fisici, e ad esso corrisponde un ben determinato sistema di leggi, che possono essere determinate per via matematica, una volta noto il gruppo.

Secondo il FANTAPPIÉ, in un Universo quantico UG^r, definito su di un gruppo base, *il campo naturale di definizione delle funzioni di stato* $\varphi(x)$ *é proprio il gruppo topologico* G^r *stesso* [10], e cioé l'insieme dei punti x immagini di tutte le trasformazioni T_x del gruppo G^r. In questo spazio G^r dei punti x, il «gruppo base» con cui si passa da una entità fisica ad un'altra entità uguale, subordina allora il *gruppo parametrico destro*

$$x' = x \,.\, \alpha \tag{6,1}$$

mentre il «gruppo obbiettivo» che descrive gli apparenti cambiamenti dei fenomeni, dovuti ai cambiamenti di posizione dell'osservatore, subordina il *gruppo parametrico sinistro*

$$x' = \alpha \,.\, x \tag{6,2}$$

E poiché ogni operatore fisico K dovrà risultare «invariante» per questi due gruppi, K si può determinare per via matematica a partire dalla sola struttura del gruppo base.

É noto che nello stato rappresentato dalla funzione $\varphi(x)$, la grandezza corrispondente all'operatore K ha il valore esatto λ, che é un autovalore dell'operatore K, mentre $\varphi(x)$ é una autofunzione. Si ha quindi

$$K\,\varphi(x) = \lambda\,\varphi(x) \tag{6,3}$$

Ma non tutti gli operatori funzionali lineari possono rappresentare delle grandezze fisiche, perché ogni grandezza che abbia senso fisico deve soddisfare alle due condizioni:

a) deve essere *osservabile*, cioé rilevabile sperimentalmente, mediante operazioni esattamente definite (definizione operativa);

b) deve avere carattere obbiettivo, e cioé deve risultare indipendente dagli osservatori.

Queste due esigenze si traducono per l'operatore K nelle due condizioni *necessarie e sufficienti*, espresse dalle relazioni

$$K\,\varphi(x) = F_\alpha\,[T_\alpha^{-1}\,\varphi(x)] \tag{6,4}$$

$$T^{-1}\,K\,T\,\varphi = K\,\varphi \tag{6,5}$$

La (4) traduce la esigenza della *osservabilità*, e ci dice che l'operatore K si ottiene applicando un funzionale lineare puro F_α alla funzione cioé alla $\varphi(x)$ nella quale si sia effettuato un generico cambiamento di coordinate T_α^{-1}, in quanto tale funzione dipende dai parametri α di questa trasformazione e non dalle coordinate x del punto, che si considera costante.

La (5) traduce invece la esigenza che la grandezza abbia significato *obbiettivo*, e ci dice che l'operatore K deve essere invariante (e quindi permutabile) rispetto a tutte le trasformazioni T del gruppo base G^r, che definisce l'uguaglianza nell'universo.

Tali condizioni sono così restrittive da permettere la effettiva costruzione di questi operatori. Infatti, l'operatore K può sempre essere caratterizzato da una *indicatrice proiettiva* $p(t)$, e tale indicatrice *deve essere un invariante del gruppo duale del gruppo aggiunto*: questa condizione risulta non solo necessaria, ma anche sufficiente.

Ora, la determinazione degli invarianti del duale dell'aggiunto, come integrali del sistema alle derivate parziali di LIE, nel caso generale é tutt'altro che facile. Essa risulta pressoché immediata, nel caso abbastanza generale che il gruppo base G^r sia *semplice*, come per esempio il gruppo di FANTAPPIÉ.

Infatti, l'equazione caratteristica del gruppo

$$(6,6)\quad (-1)^r \Delta(\varrho) = \varrho^r - \psi_1(t)\,\varrho^{r-1} + \psi_2(t)\,\varrho^{r-2} + \ldots + (-1)^{r-1}\psi_{r-1}(t)\,\varrho = 0$$

ha come coefficienti $\psi_s(t)$ dei polinomi omogenei di grado s, nei parametri canonici, che si determinano con calcoli algebrici a partire dalle costanti di struttura del gruppo, e risultano invarianti del gruppo aggiunto di G^r.

Se poi si adoperano parametri canonici «ortogonali», tutti gli invarianti del gruppo aggiunto ed in particolare tutti i coefficienti della equazione caratteristica, risultano pure invarianti del gruppo duale.

Il numero degli invarianti indipendenti é dato dal rango l del gruppo (se esso é semplice) e quindi un sistema completo di tali invarianti é già dato da l coefficienti $\psi_s(t)$ della equazione caratteristica, mentre tutti gli altri invarianti sono delle funzioni arbitrarie di tali polinomi.

Il FANTAPPIÉ perveniva così alla interessante conclusione che in un Universo quantico UG^r si avranno in corrispondenza a questi l polinomi $\psi_s(t)$ invarianti, altrettanti operatori lineari, e cioé l *gran-*

dezze quantiche fondamentali e non più, date dagli l operatori differenziali

$$D_s \varphi = \psi_s (\overline{t}) \Delta \varphi (t \cdot x) \tag{6,7}$$

dove a secondo membro interviene il *prodotto funzionale proiettivo* della indicatrice proiettiva $\varphi(t)$ che caratterizza il funzionale, per la funzione della variabile t.

Applicando questi risultati al gruppo di DE SITTER-FANTAPPIÉ, in cui $l = 2$, *si trovano due invarianti fondamentali del gruppo aggiunto o del suo duale*, il primo dato da una forma di secondo grado nei parametri canonici, il quale porta ad una generalizzazione della equazione di Schrödinger della fisica quantica [11], mentre il secondo invariante risulta una forma di 4.° grado nei parametri, cui corrisponde un nuovo operatore, il cui significato fisico si vedrà al n.° successivo.

Nel 1956 il FANTAPPIÉ proponeva poi un nuovo metodo generale, il quale permette, nel caso in cui il gruppo G^r é compatto, il calcolo effettivo di tutti gli autovalori λ e di tutte le corrispondenti autofunzioni φ di un operatore K osservabile sul gruppo, e quindi in particolare di un operatore fisico (cioé osservabile ed obbiettivo), sul gruppo G^r ad r parametri.

Tale determinazione, nel caso regolare, *si riduce a sole operazioni algebriche*, perché viene ricondotta ad un problema classico del tipo della equazione secolare delle piccole vibrazioni di un sistema ad un numero finito di gradi di libertà [12].

6 — MASSA, SPIN, GRUPPI TOPOLOGICI

La teoria dei modelli di Universo di Fantappié, basata sui gruppi topologici (1952) é rimasta incompiuta, a causa della scomparsa del suo autore, avvenuta nel 1956. Solo recentemente, nel 1964 tale idea é stata ripresa da F. LURÇAT [13], il quale é giunto indipendentemente ad analoghe conclusioni (sia pure limitate al solo gruppo di POINCARÉ della fisica relativistica), partendo da considerazioni di natura fisica. É però da osservare che nel 1954 E.P. WIGNER [14] aveva accennato alla possibilità di usare le variabili extra, che appaiono nella formulazione gruppale, per descrivere lo spin delle particelle.

Il LURÇAT osserva che nella fisica delle particelle elementari, lo spin ha un ruolo secondario, perché la invarianza per le rotazioni appare meno importante della invarianza per le traslazioni, la polarizzazione appare meno importante dei momenti, e così via.

In effetti non esiste alcuna proprietà nota delle particelle, dalla quale risulti che lo spin sia meno importante della massa. La introduzione dello spin porta a delle complicazioni, solo perché noi supponiamo che le funzioni di campo siano definite nello spazio-tempo di MINKOWSKI.

Ora noi sappiamo che una particella, potendosi considerare come un solido molto piccolo, non ha tre, ma sei gradi di libertà, e quindi occorre prendere come spazio delle configurazioni una varietà a sei dimensioni, varietà che é isomorfa al gruppo delle rototraslazioni nello spazio euclideo S_3 a tre dimensioni. In modo analogo, nella fisica relativistica occorre utilizzare una varietà V_{10} isomorfa al gruppo di POINCARÉ: solo così si può descrivere in modo completo sia la massa che lo spin della particella. In caso contrario noi permettiamo solo alla massa, ma non allo spin, di giuocare un ruolo dinamico.

Per tali motivi il LURÇÁT propone di sostituire lo spazio-tempo di MINKOWSKI con il gruppo topologico di POINCARÉ (o meglio con il suo gruppo di ricoprimento P'). La teoria dei campi che così si ottiene dovrà risultare invariante rispetto alle trasformazioni di POINCARÉ dello spazio di MINKOWSKI (trasformazioni *attive*), ed anche rispetto ai cambiamenti di riferimento (trasformazioni *passive*). La distinzione tra invarianza attiva e passiva é adesso molto importante, e corrisponde alla invarianza rispetto ai due gruppi base ed obbiettivo, introdotta dal FANTAPPIÉ nelle sue ricerche (1952-56).

I campi fisici saranno quindi definiti sul gruppo P', una volta scelto un riferimento standard, e si ottiene per tale via una semplice caratterizzazione gruppale dei campi di BOSE e di FERMI. Se poi indichiamo con $U(h)$ una rappresentazione unitaria del gruppo P', essa definisce pure una rappresentazione degli operatori «momento» e «momento angolare» P_i ed M_{ik} (i, k = 1, 2..4), che sono le trasformazioni infinitesime del gruppo P'. Tali trasformazioni possono essere rappresentate mediante operatori di differenziazione destra agenti sul gruppo topologico. Se indichiamo tali operatori allo stesso modo P_i, M_{ik}, le equazioni d'onda di una particella di massa m e di spin s saranno semplicemente:

$$\boxed{P_i P^i \varphi = m^2 \; ; \; W_i W^i \varphi = - m^2 s (s + 1) \varphi} \tag{7,1}$$

dove φ é la funzione d'onda, e si é posto

$$(7,2) \qquad W^i = \frac{1}{2}\, \varepsilon^{iklm}\, P_k\, M_{lm}$$

Il tal modo viene eliminata ogni ambiguità delle equazioni d'onda: per ogni tipo di particella vi é una coppia di equazioni d'onda univocamente definita.

La prima delle (7,1) non é altro che il caso limite della equazione si SCHRÖDINGER generalizzata di FANTÁPPIÉ, mentre nella seconda equazione interviene l'operatore del 4.º ordine, del quale si vede adesso il significato fisico: mentre il primo operatore corrisponde alla massa, il secondo corrisponde allo spin della particella.

7 — L'UNIVERSO DI DE SITTER E LE PARTICELLE ELEMENTARI

Le trasformazioni infinitesime del gruppo di DE SITTER-FANTÁPPIÉ sono

$$(7,1) \qquad L_{AB} = x_A\, \partial_B - x_B\, \partial_A \qquad (A, B = 1, 2 \ldots 5)$$

le quali soddisfano alle seguenti regole di commutazione

$$(7,2) \qquad [L_{AB}, L_{CD}] = g_{BC}\, L_{AD} + g_{AD}\, L_{BC} - g_{BD}\, L_{AC} - g_{AC}\, L_{BD}$$

con $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -g_{44} = g_{55} = 1$; $g_{AB} = O$ $(A \neq B)$.

Se allora introduciamo le seguenti notazioni $(\alpha, \beta, \gamma = 1,2,3)$

$$(7,3) \qquad \begin{cases} L_{\alpha\beta} = R_\gamma \text{ (rotazioni spaziali) ; } L_{\alpha 4} = cV_\alpha \text{ (trascinamenti)} \\ L_{\alpha 5} = rT_\alpha \text{ (traslazioni spaziali) ; } L'_{45} = rT_0/c \text{ (trasl. temporali)} \end{cases}$$

I due operatori invarianti di CASIMIR risultano

$$(7,4) \qquad \begin{cases} \mathbf{T}_2 = (T^2 - \dfrac{1}{c^2}\, T_0{}^2) + \dfrac{1}{r^2}\, (\mathbf{R}^2 - c^2\, \mathbf{V}^2) \\ I_4 = (\mathbf{R} \times \mathbf{T})^2 + \dfrac{1}{c^2}\, (T_0\, \mathbf{R} + c^2\, \mathbf{T} \wedge \mathbf{V})^2 + \dfrac{c^2}{r^2}\, (\mathbf{R} \times \mathbf{V})^2 \end{cases}$$

dove T_0 é l'operatore *energia,* $\mathbf{T}$ il *momento,* $\mathbf{R}$ il *momento angolare* e $\mathbf{V}$ *l'energia del centro di massa.*

Nel 1965 BARUT E BOHM [15] hanno utilizzato il gruppo di DE SITTER per ritrovare teoricamente la «formula della massa» di GELL-MANN OKUBO

$$(7,5) \qquad m^2 = m_0{}^2 + 2\,\lambda\, J\,(J+1) - \lambda^2\,[I\,(I+1) - Y^2/4]$$

dove m_0 é la *massa*, J é lo *spin*, I é *l'isospin* ed Y é la *ipercarica* della particella.

Essi osservano che $m_0{}^2$ é il valore dell'operatore di massa $T^2 - T_0{}^2/c^2$, e quindi la (5) suggerisce un accoppiamento di tale operatore con altri. La formula della massa può quindi essere ottenuta a partire dall'operatore di Casimir del 2.° ordine di un gruppo. Se si utilizza il gruppo di DE SITTER, si possono allora spiegare i primi due termini della (5).

Nel 1966 P. ROMAN ed J.J. AGHASSI [16] hanno esteso la teoria dei campi all'Universo di DE SITTER ed hanno proposto di prendere le equazioni dei campi sotto la forma

$$(7,6) \qquad I_2\,\varphi = m^2\,\varphi$$

dove I_2 é l'operatore di CASIMIR del 2.° ordine del gruppo di DE SITTER ed m^2 é il suo autovalore. Al limite per r tendente all'infinito, la precedente equazione si riduce alla

$$(7,7) \qquad \Box\,\varphi = m^2\,\varphi$$

Ne segue che l'operatore I_2 può interpretarsi come *operatore di massa*. Invece l'operatore di CASIMIR del 4.° ordine I_4 per r tendente ell'infinito, si riduce a

$$(7,8) \qquad I_4 \sim V_i\,V^i \quad \text{con} \quad V_i = \varepsilon_{iklm}\,\sigma_{kl}\,\delta_m$$

e σ_{kl} é la matrice di spin. In un sistema locale in quiete, il suo autovalore si riduce a

$$(7,9) \qquad I_4 \sim m^2\,s\,(s+1)$$

e quindi I_4 può interpretarsi come *operatore di spin*. Tali risultati sono quindi analoghi a quelli di FANTAPPIÉ di LURÇAT e di GÜRSEY [25].

Si perviene poi alla interessante conclusione che nell'universo di De Sitter la massa di una particella non può essere nulla, ma risulta dell'ordine di

$$h/rc \sim 10^{-65}\, gr \tag{7,10}$$

i campi la cui massa é di tale ordine di grandezza, si possono chiamare *campi a massa minima*, e si riducono al limite relativistico (r tendente all'infinito) ai campi a massa nulla della relatività ristretta.

Ricordiamo infine che in questi ultimi anni (1966) H. Bacry ed altri [17], hanno utilizzato il gruppo di De Sitter nello studio dell'atomo di idrogeno, sfruttando per esempio gli invarianti di Casimir di tale gruppo.

8 — Il gruppo conforme e le particelle elementari

Se si rimane con 10 parametri, il gruppo di De Sitter-Fantappié rappresenta l'unico possibile perfezionamento del gruppo di Poincaré, e contiene le due costanti universali c ed r.

Un successivo perfezionamento della fisica può ottenersi passando al gruppo «conforme» con 15 parametri, il quale risulta isomorfo al gruppo $SO_{4,2}$ delle rotazioni nello spazio pseudoeuclideo a sei dimensioni. Si ottiene così un successivo modello di Universo, il quale é stato studiato per primo da E. Page [18] nel 1936 e ripreso successivamente da Murai [19] nel 1954.

Nel 1954 R.L. Ingraham [20] ha sviluppato una «relatività conforme» adoperando lo spazio M_5 di tutte le sfere dello spazio S_4 di Minkowski: ad una sfera di centro x^m ($m = 1, 2 \ldots 4$) e raggio $x^5 = R$ possono essere assegnate sei coordinate omogenee, le quali vengono interpretate come coordinate proiettive omogenee di un punto in un ordinario spazio proiettivo P_5 a cinque dimensioni. Ingraham sviluppa la sua teoria in coordinate non omogenee, e così introduce lo *spazio delle posizioni* (q-spazio), di coordinate

$$x^1 = x\,;\ x^2 = y\,;\ x^3 = z\,;\ x^4 = ct\,;\ x^5 = h\omega/c \tag{8,1}$$

dove h é la costante di Planck (divisa per $2\,\pi$) ed ω é la «mass-gauge».

Il gruppo conforme é formato dalle *roto-traslazioni* di S_4 (gruppo di Poincaré a 10 parametri), le *dilatazioni uniformi* (1 parametro) e le *accelerazioni spazio-temporali* (4 parametri). A tali trasformazioni occorre aggiungere la «inversione fondamentale» per mezzo della quale si può introdurre nella teoria una reciprocità automatica tra lo *spazio delle posizioni* (q-spazio) e lo *spazio dei momenti* (p-spazio):

$$(8,2) \qquad p^1 = p_x\,;\; p^2 = p_y\,;\; p^3 = p_z\,;\; p^4 = E/c\,;\; p^5 = cm$$

dove m é la massa di quiete. A partire dal gruppo conforme si possono allora ricavare la reciprocità di BORN ed il principio di indeterminazione di HEISENBERG, caratteristici della fisica quantistica. Si ottiene per tale via una nuova relatività nella quale intervengono le due costanti universali c ed h, e che quindi risulta particolarmente utile nello studio della microfisica.

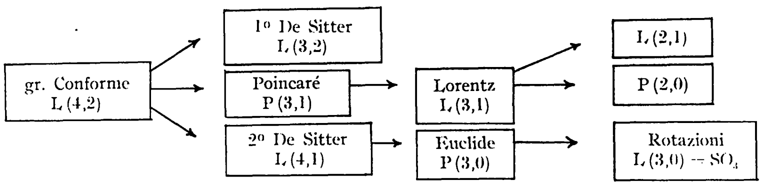
Nel 1958 suggerivo l'idea che il gruppo studiato da INGRAHAM doveva essere considerato caso-limite di un gruppo ancora a 15 parametri, nel quale figurano le tre costanti universali (c,r,h), in modo che esso contenga come sttogruppo quello di DE SITTER-FANTAPPIÉ [5]. Si potrebbe così ottenere una teoria che sia simultaneamente relativistica, cosmologica e quantistica, nella quale interviene un sistema di unità «naturali», e cioé legate alla struttura geometrica e gruppale del modello di Universo:

$$(8,3) \qquad L = r\,;\; T = r/c\,;\; M = h/rc$$

Si avrebbe allora una «massa minima» $h/rc = 10^{-65}\ gr$, alla quale corrisponderebbe una particella con lunghezza d'onda di Compton $\lambda = h/mc = r$ pari al raggio dell'universo e frequenza $\nu = c/r$ uguale alla costante di espansione di HUBBLE.

Lo studio del gruppo conforme, nel senso da me indicato, é stato recentemente ripreso da vari autori, i quali ne hanno messo in evidenza la importanza nello studio e nella classificazione delle particelle elementari.

Nel 1965 H. BACRY [21] ha approfondito il legame tra i vari gruppi, conforme, di DE SITTER, di POINCARÉ, di LORENTZ e delle rotazioni spaziali. Indicando con $L\,(m, n)$ il gruppo delle matrici unimodulari di ordine $(m + n)$ che conservano la forma x^2 (con m segni positivi ed n negativi), e con $P\,(m, n)$ il gruppo non omogeneo $x' = Rx + T$, dove R indica la rotazione e T la traslazione, otteniamo lo schema



il quale mette in evidenza il legame tra questi vari gruppi ed il gruppo di FANTAPPIÉ. che è isomorfo ad L (4, 1).

Nel 1966 R. PRASÀD [22] ha mostrato che se il processo di contrazione di WIGNER-INÖNÜ é applicato simultaneamente ai due gruppi di DE SITTER $SO_{4,1}$ ed $SO_{3,2}$, unificati nell'ambito del gruppo conforme, viene ricoperta l'algebra della meccanica quantistica. Il PRÀSAD propone di adottare $SO_{4,1}$ (isomorfo al gruppo di FANTAPPIÉ) e cioé D^+ come spazio degli eventi esterni, ed il gruppo $SO_{3,2}$ (e cioé D^-) come spazio della struttura interna, e questo perché, secondo la teoria di DIRAC dell'elettrone radiante, la velocità di propagazione della luce all'interno della particella é maggiore di c, mentre nello spazio esterno é minore di c. La questione della frontiera tra lo spazio interno e quello esterno é molto complessa: si può ritenere che essa é una regione invariante per i due gruppi interno ed esterno, e definirebbe un nuovo gruppo, quello conforme, che unifica le simmetrie interne e quelle esterne.

In un recente lavoro (1966) L. CASTELL [23] riprendendo lo studio del gruppo conforme, analizza i vari gruppi di GALILEO, POINCARÉ, DE SITTER-FANTÀPPIÉ e conforme, dal punto di vista della geometrie proiettiva. Introducendo coordinate omogenee

(8,4) $$y_i = x_\alpha/x_5\,;\ y_4 = x_4/x_5 \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

ogni evento é descritto da 5 coordinate (x_α, x_4, x_5) che sono determinate a meno di un fattore.

Si può verificare allora che il gruppo proiettivo su 5 variabili che lascia invariante l'assoluto di CAYLEY-KLEIN

(8,5) $$x^2{}_1 + x^2{}_2 + x^2{}_3 = O\,;\quad x^2{}_4 = O\,;\quad x^2{}_5 = O$$

(quadrica degenere) contiene il gruppo di GALILEO-NEWTON e le due trasformazioni di similitudine $y'_\alpha = a\ y_\alpha$; $y'_4 = by_4$.

Invece il gruppo proiettivo che lascia invariante l'assoluto

(8,6) $$x^2{}_1 + x^2{}_2 + x^2{}_3 - c^2\, x^2{}_4 = O\,;\ x^2{}_5 = O$$

contiene il gruppo di POINCARÉ e la scala di trasformazione $y'_i = ky_i$ (dove $i = 1, 2..4$). Si passa così da due scale ad una scala di dilatazione.

Infine il gruppo di FANTAPPIÈ che lascia invariante la quadrica

$$(8,7) \qquad x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - c^2 x^2_4 + r^2 x^2_5 = O$$

non ammette scala di dilatazione. Si conclude che la introduzione della velocità c della luce riduce il numero delle dilatazioni da 2 ad 1, e la introduzione del raggio dell'universo r, riduce a zero il numero delle dilatazioni.

Il CASTELL propone allora di generalizzare il continuo spazio-temporale mediante la ipersfera di equazione

$$(8,8) \qquad x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - c^2 x^2_4 + r^2 x^2_5 - k^2 x^2_6 = \pm L$$

dove L é la costante di scala e k^k una costante universale. Interpretando la (8) non come geome tria sferica, ma ellittica, l'assoluto di questa geometria é dato dalla quadrica non degenere

$$(8,9) \qquad x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 - c^2 x^2_4 + r^2 x^2_5 - k^2 x^2_6 = O$$

Il gruppo di movimenti di questa geometria é il gruppo ortogonale $SO_{4,2}$ ed é realizzato in uno spazio a 5 dimensioni con grande curvatura $1/L^2$.

Nel 1967 infine F. HALBWACHS [24] ha messo in evidenza la importanza del gruppo conforme $SO_{4,2} \approx SU_{2,2}$ nel campo della fisica delle particelle elementari, perché esso contiene come sottogruppi il gruppo di DE SITTER $SO_{4,1}$ ed il gruppo $SU_{2,1}$. Il gruppo di DE SITTER $SO_{4,1}$ ci rende conto delle caratteristiche dinamiche, perché contiene come limite di contrazione il gruppo di POINCARÉ. Il gruppo $SU_{2,1}$ invece é una forma non compatta di SU_3 e quindi ci permette di classificare le particelle secondo lo isospin e la ipercarica.

Da questa rapida rassegna — necessariamente frammentaria ed incompletadelle più recenti ricerche sui gruppi SO_5 ed SO_6 si vede come le idee espresse nel 1952-56 da L. FANTAPPIÈ nella sua «teoria dei modelli di Universo» basata sui gruppi, si stanno rivelando di particolare interesse ed attualità nei campi più avanzati della fisica e cioé nelle ricerche cosmologiche e nello studio delle particelle elementari [26].

NOTE E BIBLIOGRAFIA

(1) FRONSDAL, C., *Elementary particles in a curved space*, Rev. Mod. Phys, **37**, 221, (1965).

(2) DIRAC, P.A.M., *The electron wave equation in De Sitter Space*, Ann. Math. **36**, 657 (1935).

(3) L. FANTAPPIÈ, *Sui fondamenti gruppali della fisica* (memoria postuma) Coll. Math. **11**, 77 (1959); *Su una nuova teoria di relatività finale*, Rend. Lincei, ser, **8**, 775 (1954).

(4) GAMBA, A. *Pecularities of the Eight-Dimensional space*, Journ. Math. Phys. **8**, 775 (1967).

(5) ARCIDIACONO, G., *La relatività di Fantappié* (1958), *Relatività finale e cosmologia* (1960), *Sulle trasformazioni finite dei gruppi delle rotazioni* (1963); *Gli spazi di Cartan e le teorie unitarie* (1964), *Relatività cinematica e cosmologia proiettiva* (1965) su Collectanea Mathematica, Barcelona.

(6) HERGLOTZ, G., *Über die Mechanik des deformierbaren körpers von Standpünte der Relativitäts Theorie*, Ann. Phys. **36**, 497, (1911).

(7) SNYDER, H.S., *Quantized space-time*, Phys. Rev. **51**, 38, (1947); G. CICOGNA, *Modified space-time derived from euclidean momentum space* Nuovo Cimento, ser X, **42** A, 656 (1966).

(8) GOLFAND, YU. A., *On the introduction of an «elementary lenght» in the relativistic theory of elementary particles*, Sov. Phys. JETP **35**, 356 (1960); *On the proprierties of displacements in a p-space of constant curvature*, Sov Phys. JETP, **17**, 842, (1963).

(9) KADYSHEVSKIJ, V. G. *On the theory of quantisation of space-time*. Sov. Phys. JETP, **14**, 1340 (1962).

(10) FANTAPPIÉ, L. *Caratterizzazione analitica delle grandezze della meccanica quantica; Determinazione di tutte le grandezze fisiche possibili in un universo quantico*, Rend. Lincei, ser. 8.° vol 12, fasc. 3,5 (1952).

(11) FANTAPPIÉ, L. *Costruzione di un sistema fondamentale di operatori fisici differenziali, per ogni universo a gruppo base semplice; Deduzione autonoma dell'equazione generalizzata di Schrödinger, nella teoria di relatività finale*. Rend. Lincei, ser. 8.°, vol. 19, fasc. 5-6 (1955).

(12) FANTAPPIÉ, L. *Calcolo degli autovalori e delle autofunzioni degli operatori osservabili su un gruppo compatto*, Arch. Mat. vol 5, fasc. 4-6 (1954).

(13) LURCAT, F. *Quantum field theory and the dynamical role of spin*, Physics, vol. I n.° 2 (1964).

(14) WIGNER, E.P. Phys. Rev. **94**, 17 (1954).

(15) BARUT, A.O. BOHM, A. *Dynamical groups and Mass-Formula*, Phys. Rev. **139** B, 1107 (1965).

(16) ROMAN, P. AGHASSI, J.J. *Classical field theory and Gravitation in a De Sitter World*, Jour. Math. Phys. **7**, 1273 (1966); P. ROMAN, C.J. KOH, *Intrinsic mass-splitting in a De Sitter World*, Nuovo Cimento **44**, 268 (1966).

(17) BACRY, H. *The De Sitter Group and the bound states of Hydrogen atom*, Nuovo Cimento, **41** A, 222, (1966); M. BANDER, C. ITZYKSON, *Group Theory and Hydrogen Atom*, Rev. Mod. Phys. **38**, 330 (1966).

(18) PAGE, E. *A new relativity*, Phys. Rev. **49**, 254 (1936). J. A. CASTILHO ALCARÁS, P. LEAL FERREIRA, *The $SO_{4,1}$ group and the hydrogen Atom*, Nuovo Cimento, **46**, 273, (1966).

(19) MURAI, Y. *On the group transformation in six dimensional space*, Progr. Theor. Phys. vol II, genn-giugno 1954.

(20) INGRAHAM, R.L. *Conformal geometry and elementary particles*, Nuovo Cimento **12**, 825 (1954); *On the classification of the new particles*, Nuovo Cimento **10**, 1060 (1958); KASTRUP, H. A. *Conformal group in space-time*, Phys. Rev. (2) **142**, 1060 (1966).

(21) BACRY, *On some classical space-time groups and their SU_6 generalisation*, Ann. Inst. Poincaré A, vol 2.°, 327 (1965).

(22) PRASAD, R. *De Sitter Model for elementary particles*, Nuovo Cimento **44**, 299 (1966).

(23) CASTELL, L. *Analysis of space-time structure in elementary particles physics*, Nuovo Cimento **46** A, 1, (1966).

(24) HALBWACHS, F. *The conformal group as a candidate for the relativistic extension of elementary particle symmetries*, Nuovo Cimento, 49 A, 517 (1967)

(25) F. GÜRSEY, *Introduction to the De Sitter Group*, in «*Group Theoretical Concepts and Methods in elementary particle Physics*», New York 1964, pag. 365.

(26) G. S. ARCIDIACONO, *Spazio, tempo, Univerzo*, Ed. II, Fuolo, Roma 1961; G. ARCIDIACONO, *Universo e Relatività*, Ed. Massimo, Milano 1967.