EL RETÍCULO DE LOS SUBOBJETOS DE UN OBJETO EN UNA CATEGORÍA EXACTA

por

MIGUEL L. LAPLAZA

El objeto de este trabajo es el demostrar que en una categoría exacta el retículo de los subobjetos de un objeto satisface a la ley de DEDEKIND, es decir, es un retículo modular. Se habla aquí de retículo en un sentido amplio, puesto que los subobjetos de un conjunto son una clase, que en general no es un conjunto.

Se suponen conocidas las nociones generales de categorías exactas, habiendo tomado como punto de partida la exposición de (1), precisando en el § 1 algunos resultados sobre categorías exactas que no están explícitamente espresados en la obra citada, omitiendo las demostraciones que son ya conocidas.

En todas las definiciones y notaciones que no se indiquen explícitamente seguiremos a (1).

Finalmente hemos de hacer constar nuestro agradecimiento al Dr. Abellanas, a cuya orientación se debe la realización del presente trabajo.

§ 1. PRELIMINARES SOBRE CATEGORÍAS EXACTAS

Siguiendo a (1), una categoría exacta es una categoría normal, conormal, con núcleos y conúcleos, en que todo morfismo, a, puede factorizarse en la forma, $a = me$, en que m es un monomorfirmo y e es un epimorfismo. Esta factorización es denominada descomposición o factorización natural; esta denominación está justificada por las observaciones siguientes, clásicas dentro de la teoría de las categorías exactas y que enunciaremos sin demostración:

1.1. Sea, $A \xrightarrow{e} I \xrightarrow{m} B$, la descomposición natural del morfismo, $a \in Hom\ (A, B)$; si $ker\ a = \{ker\ a, i\}$, $coker\ a = \{p, coker\ a\}$, se verifican las relaciones, $\{e, I\} = coker\ i$, $\{I, m\} = ker\ p$.

1.2. Con las notaciones de la observación anterior, $\{I, m\} = im\ a$, $\{e, I\} = coim\ a$.

1.3. La descomposición natural de un morfismo es única salvo isomorfismos.

1.4. De $im\ a = \{I, m\}$, $a = mb$, se deduce que b es un epimorfismo.

1.5. De $coim\ a = \{e, I\}$, $a = be$, se deduce que b es un monomorfismo.

§ 2. IMÁGENES DIRECTAS E INVERSAS DE SUBOBJETOS EN EPIMORFISMOS

En todo este apartado, $\{A', a'\}$ será un subobjeto de un objeto, A, f: $A \to A/A'$, el morfismo natural, es decir, $\{f, A/A'\} = coker\ a'$. Si $\{A_i, a_i\} \subset A$, indicaremos con $f\ \{A_i, a_i\}$ o con fA_i la imagen directa de $\{A_i, a_i\}$ en el morfismo f; si $\{A'_i, a'_i\} \subset A/A'$, indicaremos con $f^{-1}\ \{A'_i, a'_i\}$ o con $f^{-1}A'$ a la imagen inversa de $\{A'_i, a'_i\}$ en el morfismo f.

PROPOSICIÓN **2.1.** La condición necesaria y suficiente para que, $\{B, b\} = \cap\ \{A_i, a_i\}$ es que $\{B, b\}$ sea máximo entre los subobjetos contenidos en todo $\{A_i, a_i\}$, es decir, que si un subobjeto $\{B', b'\}$ está contenido en todo $\{A_i, a_i\}$ se verifica que $\{B', b'\} \subset \{B'\ b\}$, siendo $\{B, b\}$ un subobjeto, tal que $\{B, b\} \subset \{A_i, a_i\}$ para todo i.
En efecto:

La condición es necesaria, como se deduce inmediatamente de la definición de intersección de subobjetos. Veamos que la condición es suficiente: sea, c: $C \to A$, un morfismo para el que existan diagramas conmutativos del tipo

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "c"] \arrow[drr, "c_i"'] & & A \\
& & A_i \arrow[u, "a_i"']
\end{tikzcd}$$

para cualquier i; si, $C \xrightarrow{e} im\ b \xrightarrow{m} A$, es la descomposición natural de c, se deduce de la propiedad minimal de la definición de imagen que, $\{im\ b, m\} \subset \{A_i,\ a_i\}$ para cualquier i, de donde se deduce que, $\{B,\ b\} \subset \{im\ b, m\}$, es decir, $m = br$, por lo que, $c = me = b(re)$.

Proposición **2.2.** La condición necesaria y suficiente para que, $\{B,\ b\} = \cup\ \{A_i,\ a_i\}$, es que $\{B,\ b\}$ sea mínimo entre los subobjetos que, contienen a $\{A',\ a'\}$, es decir, que si un subobjeto $\{B',\ b'\}$ contiene a todo $\{A_i,\ a_i\}$ se verifica que, $\{B',\ b'\} \supset \{B,\ b\}$ siendo $\{B,\ b\}$ un subobjeto que contiene a todo $\{A_i,\ a_i\}$.
En efecto:

La condición es necesaria, como se deduce inmediatamente de la definición de unión de subobjetos. Veamos que la condición es suficiente: sean $c \in Hom\ (A,\ C)$, $c' \in Hom\ (C',\ C)$, en que c' es un monomorfismo, de modo que para todo i existe un diagrama conmutativo del tipo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "c"] & C \\
A_i \arrow[u, "a_i"] \arrow[r, "c_i"] & B' \arrow[u, "b'"']
\end{tikzcd}$$

De acuerdo con la definición de imagen inversa, existe un morfismo, d_i, para todo i, tal que son conmutativos los diagramas (I) y (II) en el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "c"] & & C \\
\arrow[r, phantom, "\mathrm{(I)}"] & c^{-1}C' \arrow[ul, "e"'] \arrow[dr, "d"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{(II)}"] & \\
A_i \arrow[uu, "a_i"] \arrow[ur, "d_i"] \arrow[rr, "b_i"] & & C' \arrow[uu, "c'"']
\end{tikzcd}$$

De aquí se deduce que, $\{A_i,\ a_i\} \subset \{c^{-1}\,C',\ e\}$, para todo i, y por lo tanto, $\{B,\ b\} \subset \{c^{-1}\,C',\ e\}$, $b = er$, y de ahí se deduce que, $cb = cer = c'\ dr$.

PROPOSICIÓN **2.3.** Si, $m\colon A' \cap A_i \to A_i$, $m_i\colon A_i \to A_i/A_i \cap A'$, son los morfismos naturales, se verifica que, $\{A' \cap A_i, m\} = \mathit{ker}\, fa_i$, $\mathit{coker}\; m = \mathit{coim}\; fa_i$.

En efecto:

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, "a'"] & & A \arrow[r, "f"] & A/A' \\
& R \arrow[ul, "r'"] \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "r"] & & \\
A' \cap A_i \arrow[uu, "b"] \arrow[rr, "m"'] & & A_i \arrow[uu, "a_i"'] \arrow[r, "m_i"'] & A_i/A' \cap A_i \arrow[uu, "a'_i"']
\end{tikzcd}$$

en que a'_i se ha tomado de forma que sea conmutativo el diagrama rectangular de la derecha; se tiene, $fa_i m = a'_i m_i m = 0$; si r es un morfismo, tal que, $fa_i r = 0$, existe un morfismo r', tal que, $a'r' = a_i r$, puesto que, $\{A', a'\} = \mathit{ker}\, f$; tomando, $s = a'r' = a_i r$, $\{R, s\} \subset \{A', a'\}$, $\{R, s\} \subset \{A_i, a_i\}$, y por las propiedades de la intersección de subobjetos, r se factoriza a través del morfismo m.

El resto de la proposición es consecuencia inmediata de las observaciones del § 1.

PROPOSICIÓN **2.4.** Si $h\colon A \to B$ es un epimorfismo, $b\colon B' \to B$ es un monomorfismo y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "h"] & B \\
A' \arrow[u, "a"] \arrow[r, dash, "h'"] & B' \arrow[u, "b"']
\end{tikzcd}$$

es un tirador («pullback» según la terminología de (1)), h' es un epimorfismo.

En efecto:

Se deduce de las hipótesis de la proposición que a es un monomorfismo [(1), chp I, prop. 7.1].

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{coker} a \arrow[rr, "h''"] \arrow[dr, "r"] & & \operatorname{coker} b \arrow[dl, "r''"'] \\
 & & R & \\
 & A \arrow[uu, "a'"] \arrow[rr, "h"] & & B \arrow[ul, "r"'] \arrow[uu, "b'"'] \\
 & \ker b'h \arrow[u] \arrow[rr, "h'"] & & B' \arrow[u, "b"'] \\
M \arrow[uur, "m_1"] \arrow[ur, "m"] \arrow[urrr, "m_2"'] & & &
\end{tikzcd}$$

construído a partir de los morfismos h y b, en que a, h' y h'' se toman de modo que sean conmutativos los diagramas rectangulares correspondientes.

Vamos a demostrar que el diagrama rectangular inferior es un tirador: el diagrama es conmutativo por definición; si m_1 y m_2 son morfismos tales que, $hm_1 = bm_2$, se tiene que, $b'hm_1 = b'bm_2 = 0$, y por la definición de núcleo, existe un morfismo, m, tal que, $m_1 = am$, y de aquí se deduce que, $bh'm = ham = hm_1 = bm_2$, y como b es un monomorfismo, $m_2 = h'm$.

De la relación $b'h = h''a'$, y del hecho de ser $b'h$ epimorfismo (por ser producto de epimorfismos) se deduce que h'' es un epimorfismo; por otra parte, $\{a', \mathit{coker}\ a\} = \mathit{coker}\ a$, $\{\mathit{ker}\ b'h, a\} = \mathit{ker}\ b'h$, implica, de acuerdo con las observaciones del § 1, que $\{a', \mathit{coker}\ a\} = \mathit{coim}\ b'h$ y que $h''a'$ es la descomposición natural de $b'h$, por lo que h'' es un monomorfismo. Como las categorías exactas son equilibradas (todo morfismo que es monomorfismo y epimorfismo es un isomorfismo), h'' es un isomorfismo.

Demostraremos ahora que, $\{b', \mathit{coker}\ b\} = \mathit{coker}\ ha$. $b'ha = h''a'a = 0$; si r es un morfismo tal que, $rha = 0$, de acuerdo con la definición de conúcleo, existe un morfismo r' tal que, $rh = r'\,a'$. Si tomamos $r'' = r'\,h''^{-1}$ se tiene que, $r''\,h'' = r'$, y por lo tanto, $r''\,b'\,h = r''\,h''\,a' = r'\,a' = rh$, y como h es un epimorfismo, $r''b' = r$.

De acuerdo con las observaciones del § 1, teniendo en cuenta que, $\{B', b\} = \mathit{ker}\ b$, $\{B', b\} = \mathit{im}\ ha$ y bh' es la descomposición natural de ha, por lo que h' es un epimorfismo.

Proposición **2.5.** Con las hipótesis y notaciones de la proposición anterior se verifica que, $\{\mathit{coker}\ b, b'\} = \mathit{coker}\ ha$, $\{A', a\} = \mathit{ker}\ b'h$. En efecto:

Estas relaciones han sido comprobadas explícitamente en la demostración de la proposición anterior.

Proposición **2.6.** Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a_1"] & A \arrow[r, "a'_1"] & A/A_1 \\
A_2 \arrow[u, "a"] \arrow[ur, "a_2"] \arrow[r, "b"] & A_3 \arrow[u, "a_3"] \arrow[r, "b'"] & A_3/A_2 \arrow[u, "a'"]
\end{tikzcd}$$

en que a_1, a_2, a_3 son monomorfismos y a'_1, b' son los morfismos naturales; la condición necesaria y suficiente para que a' sea un monomorfismo es que $\{A_2, a_2\} = \{A_3, a_3\} \cap \{A_2, a_1\}$.

En efecto:

Observemos primeramente que la condición necesaria y suficiente para que, $\{A_1, a_1\} \cap \{A_3, a_3\} = A_2, a_2\}$, es que el diagrama rectangular de la izquierda sea un tirador [(1), chp. I, prop. 8.1].

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \arrow[r, "a_1"] & A \arrow[r, "a'_1"] & A/A_1 \\
& A_2 \arrow[u, "a"] \arrow[r, "b"] & A_3 \arrow[u, "a_3"] \arrow[r, "b'"] & A_3/A_2 \arrow[u, "a'"'] \\
M \arrow[uur, "m_1"] \arrow[ur, "m"] \arrow[urr, "m_3"'] & & &
\end{tikzcd}$$

y supongamos que a' es un monomorfismo. Si m_1 y m_3 son morfismos tales que, $a_1 m_1 = a_3 m_3$, tenemos que $a' b' m_3 = a'_1 a_3 m_3 = a'_1 a_1 m_1 = 0$, y como a' es un monomorfismo, $b' m_3 = 0$, y siendo $\{A_2, b\} = ker\ b'$, existe un morfismo m, tal que, $m_3 = bm$; por otra parte, $a_1 a\ m = a_3 bm = a_3 m_3 = a_1 m_1$, y como a_1 es un monomorfismo, $a\ m = m_1$.

Supongamos ahora que, $\{A_2, a_2\} = \{A_1, a_1\} \cap \{A_3, a_3\}$, lo que es equivalente a que el diagrama rectangular de la izquierda sea un tirador; de acuerdo con la proposición 2.3, $\{b', A_3/A_2\} = coim\ a'_1\ a_3$, lo que implica, de acuerdo con las observaciones del § 1 que $a'b'$ es la descomposición natural de $a'_1\ a_3$ y por lo tanto, a' es un monomorfismo.

Proposición **2.7.** Para cualquier subobjeto A'' de A/A' se verifica la relación, $ff^{-1}\ A'_i = A_i$.

En efecto:

Si consideramos el diagrama, que es un tirador,

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & A/A' \\
f^{-1}\ A'_i \arrow[u, "a_i"] \arrow[r, "f_i"] & A'_i \arrow[u, "a'_i"']
\end{tikzcd}$$

a través del que se define $f^{-1}\ A'_i$, f_i es un epimorfismo, de acuerdo con la proposición 2.4, lo que implica, de acuerdo con las observaciones del § 1, que $\{A'_i, a_i\} = im\, fa_i$, es decir, $\{A'_i, a'_i\} = ff^{-1}\{A'', a'_i\}$.

Proposición **2.8.** Para cualquier subobjeto $\{A'_i, a'_i\}$ de A/A' se verifica que, $f^{-1}\{A'_i, a'_i\} \supset A'$.

En efecto:

Si consideramos que, $fa' = = a'_i 0 = 0$, y que es un tirador el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & A/A' \\
f^{-1}A'_i \arrow[u, "a_i"] \arrow[r, "f_i"] & A'_i \arrow[u, "a'_i"']
\end{tikzcd}$$

de la definición de tirador se deduce la existencia de un morfismo, r, tal que, $a' = a'r$, es decir, $\{A', a'\} \subset f^{-1}\{A'_i, a'_i\}$.

Proposición **2.9.** Para cualquier subobjeto A'_i de A se verifica que $f(A'_i \cup A') = fA_i$.

En efecto:

De acuerdo con un resultado conocido [(1), chp. I, prop. 11.2], $f(A'_i \cup A') = fA'_i \cup fA'$, y es inmediato el comprobar a partir de la definición que, $fA' = 0$, y de estas relaciones se deduce la proposición.

Proposición **2.10.** Para todo subobjeto, A_i' de A, tal que, $A' \supset A''$ se verifica que, $f^{-1}fA_i' = A_i'$.

En efecto:

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A/A_i & & \operatorname{coker} a''_i \arrow[ll, "f'"'] \\
A' \arrow[r, "a'"] \arrow[ddr, "d"'] & A \arrow[u, "a'_i"] \arrow[rr, "f"'] & & A/A' \arrow[u, "b"'] \arrow[ull, "b'"] \\
& & M \arrow[ul, "m"'] \arrow[dl, "m'"] & \\
& A_i \arrow[uu, "a_i"] \arrow[rr, "f_i"] & & fA_i \arrow[uu, "a''_i"']
\end{tikzcd}$$

en que d es el morfismo natural de inclusión; el diagrama rectangular inferior es el de definición de fA_i.

La relación $a'_i\, a' = a'_i\, a_i\, d = 0$, implica la existencia de un morfismo b', tal que, $a'_i = b'f$; de acuerdo con las observaciones del § 1, si $\{b', B'\} = coker\, fa_i$, $\{fA_i, a''_i\} = ker\, b'$, lo que implica que, $\{b', B'\} = = coker\, a''_i$, luego, $\{b, coker\, a''_i\} \approx \{b', B'\}$, es decir, $\{b, coker\, a''_i\} = coker\, fa_i$; como $b'fa_i = a''a' = 0$, existe un morfismo f' tal que $b' = f'\, b$.

Vamos a demostrar que $\{A_i, a_i\} = ker\, bf$, con lo que quedará demostrada la proposición, de acuerdo con la proposición 2.5. Si m es un morfismo tal que, $bfm = 0$, tenemos que $a'_i\, m = b'fm = f'bfm = 0$, por lo que existe un morfismo m' tal que $m' = a_i m$.

Proposición **2.11.** La correspondencia entre los subobjetos de A que contienen A' y los subobjetos de A/A', dada por, $A_i \rightarrow fA_i$, es biyectiva, y su inversa es f^{-1}. Esta biunivocidad debe entenderse salvo isomorfismos entre subobjetos.
En efecto:

Esta proposición es consecuencia inmediata de las proposiciones 2.7, 2.8 y 2.10.

Proposición **2.12** Para cualquier subobjeto, A_i, de A, se verifica que, $f^{-1}\, fA_i = A' \cup A_i$.
En efecto:

De acuerdo con la proposición 2.9, $f\,(A' \cup A_i) = fA_i$, y de acuerdo con la proposición 2.10, $A_i \cup A' = f^{-1}\, f(A_i \cup A') = f^{-1}\, fA_i$.

Proposición **2.13.** Para cualesquiera subobjetos A_i y A_j de A que contienen a A' se verifica la implicación, $A_i \subset A_j \Longleftrightarrow fA_i \subset fA_j$.
En efecto:

La implicación $A_i \subset A_j \Rightarrow fA_i \subset fA_j$ es un resultado conocido [(1), chp. I, prop. 11.1]. Si $fA_i \subset fA_j$, de acuerdo con [(1), chp. I, prop. 11.1], $f^{-1}\, fA_i \subset f^{-1}\, fA_j$, y por la proposición 2.10, $A_i = f^{-1}\, fA_i \subset \subset f^{-1} fA_j = A_j$.

Proposición **2.14.** Para cualesquiera subobjetos A'_i y A'_j de A/A' se verifica la implicación, $A'_i \subset A'_j \Longleftrightarrow f^{-1}\, A'_i \subset f^{-1}\, A'_j$.
En efecto:
$A'_i \subset A'_j \Rightarrow f^{-1}\, A'_i \subset f^{-1}\, A'_j$ es un resultado ya conocido [(1), chp. I, prop. 11.1]. Supongamos que, $f^{-1}\, A'_i \subset f^{-1}\, A'_j$; esto implica, de acuerdo con la proposición 2.7, que, $A' = ff^{-1}\, A'_i \subset ff^{-1}\, A'_j = A_j$.

PROPOSICIÓN **2.15.** Si A_i y B es un conjunto de subobjetos de A que contienen A', se verifican las implicaciones

i) $$B = \cap A_i \Longleftrightarrow fB = \cap fA_i$$

ii) $$B = \cup A_i \Longleftrightarrow fB = \cup fA_i.$$

En efecto:
Demostración de *i*):
Supongamos que $B = \cap A_i$; de aquí se deduce que, por la proposición 2.1, $A' \subset B \subset A_i$, y de acuerdo con [(1), chp. I, prop. 11.1], $fB \subset fA_i$; si B' es un subobjeto de A/A', tal que $fB \subset B' \subset fA_i$, de acuerdo con [(1), chp. I, prop. 11.1], y la proposición 2.10, $B = f^{-1} fB \subset f^{-1} B' \subset f^{-1} fA_i = A_i$, y de acuerdo con la proposición 2.1, $B = f^{-1} B'$, lo que implica que, $fB = ff^{-1} B' = B'$ y de acuerdo con la proposición 2.1, $fB = \cap fA_i$. Supongamos ahora que, $fB = \cap fA_i$; de aquí se deduce que, $B \subset A_i$; si $B \subset B' \subset A_i$, de aquí se deduce que, $B \subset fB' \subset fA_i$, y por la proposición 2.1, $fB = fB'$, de donde se deduce, por la proposición 2.11, que, $B = B'$, y de acuerdo con la proposición 2.1, $B = \cap A_i$.
Demostración de *ii*):
Si $B = \cup A_i$, de acuerdo con [(1), I. prop. 11.2], $fB = \cap fA_i$. Si $fB = \cup fA_i$*; si $B \supset B' \supset A'$, como ya hemos visto anteriormente, $fB \supset fB' \supset fA_i$, lo que implica por [(1), chp. I, prop. 11.1] que $fB = fB'$, y de acuerdo con la proposición 2.11, $B = B'$, con lo que queda demostrada la proposición, de acuerdo con la proposición 2.2.

PROPOSICIÓN **2.16.** Si $\{A'_i\}$ es un conjunto de subobjetos de A/A' se verifican las implicaciones:

i) $$B' = \cap A'_i \Longleftrightarrow f^{-1} B' = \cap f^{-1} A'_i$$

ii) $$B' = \cup A'_i \Longleftrightarrow f^{-1} B' = \cup f^{-1} A'_i.$$

En efecto:
Demostración de *i*):
Si $B' = \cap A'_i$, de acuerdo con [(1), chp. I, prop. 11.3], $f^{-1} B' = \cap f^{-1} A'_i$. Si $f^{-1} B' = \cap f^{-1} A'_i$, de acuerdo con la proposición 2.15, $B' = ff^{-1} B' = \cap ff^{-1} A'_i, = \cap A'_i$.

---

* $fB \subset fA_i$, y por la proposición 2.13, $B \supset A_i$;

Demostración de *ii*):

Si $B' = \cup A'_i$, $B' \supset A'_i$, y por la proposición 2.14, $f^{-1} B' \supset f^{-1} A'$; si $f^{-1} B' \supset B'' \supset f^{-1} A' \supset A'$, de acuerdo con la proposición 2.14, $B' = ff^{-1} B' \supset fB'' \supset ff^{-1} A'_i = A'_i$, lo que implica que, $B' = fB''$, y por lo tanto, $f^{-1} B' = f^{-1} fB'' = B''$, y de acuerdo con la proposición 2.1, $f^{-1} B' = \cap f^{-1} A'_i$. Si $f^{-1} B' = \cup f^{-1} A''$, de acuerdo con la proposición 2.15, $B' = ff^{-1} B' = \cup ff^{-1} A_i = \cup A'_i$.

§ 3. La ley de Dedekind entre subobjetos

Proposición **3.1.** Sean $\{A_2, a_2\}$, $\{A_3, a_3\}$, subobjetos de A, tales que, $A_2 \cap A_3 = 0$. Existe un epimorfismo, $d_2: A_2 \cup A_3 \to A_2$, tal que la sucesión

$$0 \to A_3 \xrightarrow{b_2} A_2 \cup A_3 \xrightarrow{d_2} A_2 \to 0$$

es una sucesión exacta, siendo b_2 el morfismo natural de A_3 en $A_2 \cup A_3$. En efecto:

De acuerdo con [(1), chp. I, cor. 16.7] el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "b_2"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, "b"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "b_3"] & A_2 \cup A_3 \arrow[r, "c"] & A_2 \cup A_3/A_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, sus filas son sucesiones exactas y b es un isomorfismo. De aquí se deduce que cb_2 es un isomorfismo, puesto que d es un bimorfismo, y por ser la categoría equilibrada es un isomorfismo. Sea $e = (cb_2)^{-1}$, y consideremos el morfismo, $ec = d_2$

$$d_2: A_2 \cup A_3 \xrightarrow{c} A_2 \cup A_3/A_3 \xrightarrow{e} A_2$$

Por ser e un isomorfismo, $ker\ ec = ker\ c = \{A_3, a_3\}$, y por ser c un epimorfismo, lo es $d_2 = ec$.

Proposición **3.2.** Sean $\{A_2\ a_2,\}$, $\{A_3, a_3\}$, $\{A_1, a_1\}$ subobjetos de A, tales que, $A_2 \cap A_3 = 0$, $A_1 \subset A_3$. Existe un epimorfismo, $d'_2 : A_2 \cup A_1 \to A_2$, tal que la sucesión

$$0 \to A_1 \xrightarrow{b'_1} A_1 \cup A_3 \xrightarrow{d'_2} A_2 \to 0$$

es una sucesión exacta y que es conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \cup A_2 \arrow[rr, "d'_2"] \arrow[dr] & & A_2 \\
& A_2 \cup A_1 \arrow[ur, "d_2"'] &
\end{tikzcd}$$

En efecto:

Como $A_1 \subset A_3 \Rightarrow A_1 \cap A_2 \subset A_3 \cap A_2 = 0$, se verifica que $A_1 \cap A_2 = 0$, y de acuerdo con la proposición anterior, definimos, $d'_2 = e'c'$, siendo $e' = (c'b'_2)^{-1}$, en que

$$c'b'_2 \colon A_2 \xrightarrow{b'_2} A_1 \cup A_2 \xrightarrow{c'} A_2 \cup A_2/A_1$$

Consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A_1 \cup A_2 \arrow[r, "c'"] \arrow[dd, "g"] & A_1 \cup A_2/A_1 \arrow[d, "h"] \\
A_2 \arrow[ur, "b'_2"] \arrow[dr, "b_2"'] & & A_3 \cup A_2/A_1 \arrow[d, "k"] \\
& A_3 \cup A_2 \arrow[ur, "l"] \arrow[r, "c"'] & A_3 \cup A_2/A_3
\end{tikzcd}$$

en que h y k están tomados de forma que, $h' = lg$, $c = kl$, y g es el morfismo natural de $A_1 \cup A_2$ en $A_3 \cup A_2$. De aquí se deduce que, $khc'b'_2 = klgb'_2 = cb_2$; y de ahí se deduce que, $e' = e\,(cb_2)\,e' = ekh$, y si consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A_1 \cup A_2 \arrow[r, "c'"] \arrow[dd, "g"] & A_1 \cup A_2/A_1 \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "e'"] & \\
& A_3 \cup A_2/A_1 \arrow[d, "k"] & A_2 \\
A_3 \cup A_2 \arrow[r, "c"] & A_3 \cup A_2/A_3 \arrow[ur, "e"'] &
\end{tikzcd}$$

tenemos que, $d_2 g = ecg = ekhc' = e'$, con lo que queda demostrada la proposición.

PROPOSICIÓN **3.3.** Si $\{A', a'\}$, $\{A_3, a_3\}$, $\{A_2, a_2\}$ son subobjetos de A, tales que, $A_2 \cap A_3 = O$, $A_1 \subset A_3$, se verifica que, $A_1 = (A_1 \cup A_2) \cap A_3$.

En efecto:

Si consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "b'_1"] \arrow[d, "d"] & A_1 \cup A_2 \arrow[r, "e'"] \arrow[d, "g"] & A_2 \arrow[d, "1_{A_2}"] \\
A_3 \arrow[r, "b_3"] & A_3 \cup A_2 \arrow[r, "e"] & A_2
\end{tikzcd}$$

en que d es el morfismo natural de inclusión, 1_{A_2} es un epimorfismo, lo que implica por la proposición 2.6 que, $A_1 = (A_1 \cup A_2) \cap A_3$.

PROPOSICIÓN **3.4.** Si $\{A_1, a_1\}$, $\{A_2, a_2\}$, $\{A_3, a_3\}$ son subobjetos de A, tales que $A_1 \supset A_3$, se verifica la igualdad, $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = A_1 \cup (A_2 \cap A_3)$.

En efecto:

Si se designa por $f\colon A \to A/A_2 \cap A_3$ la aplicación natural, de acuerdo con la proposición 2.15, la relación anterior es equivalente a la relación, $f\,[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] = f\,[A_2 \cup (A_2 \cap A_3)]$.

De acuerdo con la proposición 2.9, $f[A_1 \cup (A_2 \cap A_3)] = fA_1$; de acuerdo con la proposición 2.15, $f[(A_1 \cup A_2) \cap A_3] = f(A_1 \cup A_2) \cap \cap fA_3 = (fA_1 \cup fA_2) \cap fA_3$, es decir, hemos de comprobar la relación, $fA_1 = (fA_1 \cup fA_2) \cap fA_3$, en que $fA_1 \supset fA_3$, de acuerdo con la proposición 2.13 y $fA_2 \cap fA_3 = f\,(A_2 \cap A_3) = O$, de acuerdo con la proposición 2.15, relación que está demostrada por la proposición 3.3.

Miguel L. Laplaza
Instituto Jorge Juan del C.S.I.C.

BIBLIOGRAFIA

(1) Mitchell, B.: «Theory of Categories». Academic Press. 1965.

Como nos ha comunicado el referente de la revista este resultado es conocido para categorías abelianas. (Seminario Grothendieck 1957, Algèhe homologique).