ALGUNOS CRITERIOS RELATIVOS A ESTRUCTURAS INICIALES Y A ESTRUCTURAS FINALES

por

JOAQUÍN M.ª CASCANTE DÁVILA

INTRODUCCION

Este trabajo complementa otro nuestro anterior (*) publicado en COLLECTANEA MATHEMATICA (VOL. XVII- Fasc. 3.º Año 1965), y en el mismo se establecen ciertos criterios notables relativos a estructuras iniciales o a estructuras finales sobre un conjunto E, para una familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, de conjuntos $(A_\iota)_{\iota\in I}$ dotados cada uno de una estructura $\mathcal{S}_\iota$ de la misma especie, y una familia de aplicaciones $(f_\iota)_{\iota\in I}$ de E en A_ι $(\iota \in I)$ o de A_ι en E $(\iota \in I)$, respectivamente.

Se adoptan en este trabajo las mismas notaciones, nomenclatura y definiciones que figuran en el Chap. IV del Livre I de N. BOURBAKI [2], por lo que en el transcurso del mismo nos referimos con frecuencia, a la citada obra de N. BOURBAKI, razón por la cual, para abreviar siempre que aludimos a la misma anteponemos las iniciales *N.B.*

Finalmente, suponemos a lo largo de todo el trabajo que nos desenvolvemos en una teoría $\mathcal{E}$ más fuerte que la teoría de conjuntos, en la cual hay definida una especie de estructura Σ, (*N.B.*, Livre I, Chap. IV, § 1, n.º 4 [2]) habiéndose definido además, para la especie Σ una noción de σ — morfismo (N.B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 1, [2]).

(*) «Sobre una generalización de los criterios de transitividad relativos a estructuras iniciales y de los criterios de transitividad relativos a estructuras finales» [1], (págs. 263-280). Véase la Nota Bibliográfica al final de la presente Memoria.

Es deber por parte nuestra, mencionar aquí expresamente que ambos trabajos se han realizado en el Seminario Matemático adscrito a la Cátedra de «Análisis Matemático 2.º y 3.º» de la Facultad de Ciencias de la Universidad de La Laguna, la cual es beneficiaria de una Ayuda para el Fomento de la Investigación Universitaria.

PARTE PRIMERA

CRITERIOS NOTABLES RELATIVOS A ESTRUCTURAS INICIALES

CSTIN — 1. «Sean E un conjunto, $(A_\iota)_{\iota\in I}$ una familia de conjuntos, dotado cada A_ι de una estructura $\mathscr{S}_\iota$ de especie Σ. Sean además $(A_\iota^*)_{\iota\in I}$ y $(h_\iota)_{\iota\in I}$, respectivamente, otra familia de conjuntos y una familia de aplicaciones, teniendo asimismo ambas I como conjunto de índices, y tales que para todo $\iota \in I$, sea h_ι una biyección de A_ι sobre A_ι^*. Para cada $\iota \in I$, designemos por $\mathscr{S}_\iota^*$, la estructura sobre A_ι^*, obtenida transportando la estructura $\mathscr{S}_\iota$ sobre A_ι al conjunto A_ι^*, mediante la aplicación biyectiva h_ι. Consideremos finalmente, para cada $\iota \in I$ una aplicación f_ι de E en A_ι, y pongamos $f_\iota^* = h_\iota \circ f_\iota$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) Existe una estructura inicial $\mathfrak{I}$ sobre E de especie Σ para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$.

b) Existe una estructura inicial $\tilde{\mathfrak{I}}$ sobre E de especie Σ para la familia $(A_\iota^*, \mathscr{S}_\iota^*, f_\iota^*)_{\iota\in I}$.

Ademas, estas proposiciones entrañan $\mathfrak{I} = \tilde{\mathfrak{I}}$».

En efecto supuesto verificado a) si g es una aplicación de un conjunto E' dotado de una estructura $\mathscr{S}'$ de especie Σ, en E, dotado de la estructura $\mathfrak{I}$, se obtienene en virtud de la condición (IN) que caracteriza a las estructuras iniciales (*N.B.*, Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 3, [2]), la relación:

$$g \in \sigma \mid E' E, \mathscr{S}', \mathfrak{I} \mid \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow f_\iota \circ g \in \sigma \mid E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \mid \quad (1)$$

Por otra parte, en virtud de la condición (MO_{III}), (*N.B.* Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 1, [2]), se verifica:

$$(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow h_\iota \in \sigma \mid A_\iota, A_\iota^*, \mathscr{S}_\iota, \mathscr{S}_\iota^* \mid \text{y } \overset{-1}{h_\iota} \in \sigma \mid A_\iota^*, A_\iota, \mathscr{S}_\iota^*, \mathscr{S}_\iota \mid) \quad (2)$$

Combinando (1) con la relación (2), y teniendo en cuenta la condición (MO_{II}), (*N.B.*, Livre I, Cahp. IV, § 2, n.º 1, [2]), se obtiene para todo $\iota \in I$, la relación:

$$f_\iota \circ g \in \sigma \mid E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \mid \Longleftrightarrow h_\iota \circ (f_\iota \circ g) = (h_\iota \circ f_\iota) \circ g =$$

$$f_\iota^* \circ g \in \sigma \mid E', A_\iota^*, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota^* \mid \qquad (3)$$

A partir de (3) y en virtud de (1), se verifica asimismo la relación:

$$g \in \sigma \mid E', E, \mathscr{S}', \mathfrak{J} \mid \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow f_\iota^* \circ g \in \sigma \mid E', A_\iota^*, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota^* \mid)$$

Por consiguiente, la estructura $\mathfrak{J}$ sobre E por verificar la condición (IN) que caracteriza a las estructuras iniciales, es una estructura inicial sobre E para la familia $(A_\iota^*, \mathscr{S}_\iota^*, f_\iota^*)_{\iota \in I}$, quedando, por tanto, establecida la relación a) $\Rightarrow$ b).

Recíprocamente, supuesto verificado *b*), y siendo g como antes, una aplicación de un conjunto E' dotado de una estructura $\mathscr{S}'$ de especie Σ, en E dotado de la estructura $\tilde{\mathfrak{J}}$, se obtiene en virtud de la referida condición (*IN*), la relación:

$$g \in \sigma \mid E', E, \mathscr{S}', \tilde{\mathfrak{J}} \mid \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow f_\iota^* \circ g \in \sigma \mid E', A_\iota^*, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota^* \mid)$$

Teniendo en cuenta (3), se deduce finalmente la relación:

$$g \in \sigma \mid E', E, \mathscr{S}', \tilde{\mathfrak{J}} \mid \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow f_\iota \circ g \in \sigma \mid E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \mid)$$

la cual es precisamente, la condición (IN) que caracteriza la estructura inicial $\tilde{\mathfrak{J}}$ sobre E para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$. Se obtiene pues b) $\Rightarrow$ a) que junto con el anterior resultado establecen a) $\Longleftrightarrow$ b).

La última parte del criterio se obtiene inmediatamente, teniendo en cuenta la propiedad de unicidad de la estructura inicial.

Este resultado combinado con el que establece el Lema Preliminar relativo a estructuras iniciales (PARTE PRIMERA, n.º 1, [1]), permite demostrar sin dificultad el siguiente criterio:

CSTIN — 2. «Sea $(A_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de conjuntos dotado cada A_ι de una estructura $\mathscr{S}_\iota$ de especie Σ. Sean además $(A_\iota^*)_{\iota \in I}$ y $(h_\iota)_{\iota \in I}$, respectivamente, otra familia de conjuntos y una familia de aplicaciones, teniendo asimismo ambas I como conjunto de índices, y tales que para todo $\iota \in I$, sea h_ι una biyección de A_ι sobre A_ι^*. Para cada $\iota \in I$, designemos por $\mathscr{S}_\iota^*$, la estructura sobre A_ι^* obtenida transportando la estructura $\mathscr{S}_\iota$ sobre A_ι al conjunto A_ι^* mediante la aplicación biyectiva h_ι. Sean E, E^* y h respectivamente, dos conjuntos y una aplicación, tales que h sea una biyección de E^* sobre E. Consideremos finalmente, para cada $\iota \in I$ una aplicación f_ι de E en A_ι, y pongamos $f_\iota^* = h_\iota \circ f_\iota \circ h$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) Existe una estructura inicial $\mathfrak{J}$ sobre E de especie Σ para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$.

b) Existe una estructura inicial $\mathfrak{J}^*$ sobre E^* de especie Σ para la familia $(A^*_\iota, \mathcal{S}_\iota^*, f_\iota^*)_{\iota \in I}$.

Además, estas proposiciones entrañan que h sea un isomorfismo de E^* dotado de la estructura $\mathfrak{J}^*$ sobre E dotado de la estructura $\mathfrak{J}$».

En efecto, en virtud del referido Lema Preliminar relativo a estructuras iniciales (PARTE PRIMERA, n.º 1, [1]), la existencia de estructura inicial $\mathfrak{J}$ sobre E para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, es equivalente a la existencia de estructura inicial $\mathfrak{J}^*$ sobre E^* para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota \circ h)_{\iota \in I}$, y la estructura $\mathfrak{J}^*$ sobre E^*, se obtiene transportando la estructura $\mathfrak{J}$ sobre E (supuesta existente), al conjunto E^* mediante la aplicación biyectiva $\overset{-1}{h}$, es decir, h es un isomorfismo de E^* dotado de la estructura $\mathfrak{J}^*$, sobre E dotado de la estructura $\mathfrak{J}$.

Además, en virtud de CSTIN-1, la existencia de estructura inicial $\mathfrak{J}^*$ sobre E^* para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota \circ h)_{\iota \in I}$, es equivalente a la existencia de estructura inicial $\tilde{\mathfrak{J}}^*$ sobre E^* para la familia $(A_\iota^*, \mathcal{S}_\iota^*, h_\iota \circ (f_\iota \circ h))_{\iota \in I} = (A_\iota^*, \mathcal{S}_\iota^*, f_\iota^*)_{\iota \in I}$, y supuesto existente una de las dos estructuras iniciales se verifica, $\tilde{\mathfrak{J}}^* = \mathfrak{J}^*$, lo que concluye la demostración del criterio.

Aplicación. — Sea $(A_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de conjuntos, y para cada $\iota \in I$, sea $\mathcal{S}_\iota$ una estructura de especie Σ sobre A_ι; sea $E = \prod_{\iota \in I} A_\iota$, el conjunto producto de la familia $(A_\iota)_{\iota \in I}$, y sea pr_ι, la proyección de E en A_ι. Consideremos, por otra parte, una familia de conjuntos $(A_\iota^*)_{\iota \in I}$ y una familia de aplicaciones $(h_\iota)_{\iota \in I}$, teniendo asimismo ambas I, como conjunto de índices, y tales que para todo $\iota \in I$, sea h_ι una biyección de A_ι^* sobre A_ι, y denotemos para cada $\iota \in I$, por $\mathcal{S}_\iota^*$ la estructura sobre A_ι^*, obtenida transportando la estructura $\mathcal{S}_\iota$ sobre A_ι al conjunto A_ι^* mediante la aplicación biyectiva $\overset{-1}{h_\iota}$; finalmente, sea $E^* = \prod_{\iota \in I} A_\iota^*$, el conjunto producto de la familia $(A_\iota^*)_{\iota \in I}$, y sea pr_ι^*, la proyección de E^* en A_ι^*. Aplicando el criterio anterior, se obtiene el siguiente «criterio de extensión de la familia de isomorfismos $(h_\iota)_{\iota \in I}$ a los productos»:

«En las condiciones anteriores, para que la familia de estructuras $(\mathscr{S}_\iota)_{\iota \in I}$ admita una estructura producto $\mathscr{S}$, es necesario y suficiente que la familia de estructuras $(\mathscr{S}_\iota^*)_{\iota \in I}$ admita una estructura producto $\mathscr{S}^*$, y la extensión canónica h de la familia de aplicaciones $(h_\iota)_{\iota \in I}$ a los productos (N.B., Livre I, Chap. II, § 5, n.º 7, [3]), es un isomorfismo de E^* dotado de la estructura $\mathscr{S}^*$ sobre E dotado de la estructura $\mathscr{S}$».

Este criterio es caso particular del anterior, adoptando para h la extensión de la familia de biyecciones $(h_\iota)_{\iota \in I}$ a los productos; h será asimismo una biyección (Véase ref. acabada de citar), y teniendo en cuenta, que la estructura producto $\mathscr{S}$ de la familia de estructuras $(\mathscr{S}_\iota)_{\iota \in I}$ es la estructura inicial (si existe) sobre E para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, pr_\iota)_{\iota \in I}$, así como la estructura producto $\mathscr{S}^*$ de la familia de estructuras $(\mathscr{S}_\iota^*)_{\iota \in I}$, es la estructura inicial (si existe) sobre E^* para la familia $(A_\iota^*, \mathscr{S}_\iota^*, pr_\iota^*)_{\iota \in I}$.

Por otra parte, teniendo en cuenta que la extensión canónica h de la familia de aplicaciones $(h_\iota)_{\iota \in I}$ a los productos, se define como sigue (N.B., Livre I, Chap. II, § 5, n.º 7, [3]):

$$G^* \in E^* = \prod_{\iota \in I} A_\iota^* \to h\,(G^*) = F_{G^*} \in E = \prod_{\iota \in I} A_\iota$$

siendo F_{G^*} el grafo de la aplicación:

$\iota \in I \to h_\iota\,(G^*(\iota)) \in A_\iota \subset \bigcup_{\varkappa \in I} A_\varkappa$ (1), grafo F_{G^*} que es un elemento de $E = \prod_{\iota \in I} A_\iota$, se obtiene, para todo $\iota \in I$, como imagen $pr_\iota\,(h\,(G^*))$, con $G^* \in E^*$, la siguiente:

$pr_\iota\,(h\,(G^*)) = pr_\iota\,(F_G{}^*) = F_{G^*}\,(\iota)$ (Véase N.B., Livre I, Chap. II, § 5, n.º 3, [3]), y como $F_G{}^*$ es el grafo de la aplicación (1), se tiene: $F_G{}^*\,(\iota) = h_\iota\,(G^*\,(\iota))$, por lo que: $pr_\iota\,(h(G^*)) = h_\iota\,(G^*\,(\iota))$, y teniendo presente que en el caso que nos ocupa para todo $\iota \in I$, es $f_\iota^* = \overset{-1}{h_\iota} \circ pr_\iota \circ h$, resulta como consecuencia:

$$f_\iota^*\,(G^*) = (\overset{-1}{h_\iota} \circ pr_\iota \circ h)\;(G^*) = \overset{-1}{h_\iota}\;(pr_\iota\,(h\,(G^*))) = \overset{-1}{h_\iota}\;(h_\iota\,(G^*\,(\iota))) =$$
$$= (\overset{-1}{h_\iota} \circ h_\iota)\;(G^*\,(\iota)) = I_{A_\iota^*}\,(G^*\,(\iota)) = G^*\,(\iota) = pr_\iota^*\,(G^*)$$

Así pues, como $G^* \in E^* = \prod_{\iota \in I} A_\iota^*$ es arbitrario, se puede escribir para todo $\iota \in I$, la relación:

$(\forall G^*)\;(G^* \in E^* \Rightarrow f_\iota^*\;(G^*) = pr_\iota^*\;(G^*))$, la cual a su vez establece la relación: $(\forall_\iota)\;(\iota \in I \Rightarrow f_\iota^* = pr_\iota^*)$.

Como las condiciones requeridas en CSTIN-2 son verificadas, se concluye, por aplicación del mismo, que la existencia de estructura inicial $\mathscr{S}$ sobre $E = \prod_{\iota\in I} A_\iota$ para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, pr_\iota)_{\iota\in I}$, es decir, de estructura $\mathscr{S}$ producto de la familia $(\mathscr{S}_\iota)_{\iota\in I}$, es equivalente a la existencia de estructura inicial $\mathscr{S}^*$ sobre $E^* = \prod_{\iota\in I} A_\iota^*$ para la familia $(A_\iota^*, \mathscr{S}_\iota^*, pr_\iota^*)_{\iota\in I}$, es decir, de estructura $\mathscr{S}^*$ producto de la familia $(\mathscr{S}_\iota^*)_{\iota\in I}$, y la extensión canónica h de la familia de biyecciones $(h_\iota)_{\iota\in I}$ a los productos, de $E^* = \prod_{\iota\in I} A_\iota^*$ dotado de $\mathscr{S}^*$, sobre $E = \prod_{\iota\in I} A_\iota$ dotado de $\mathscr{S}$, es un isomorfismo.

Resulta así demostrado el criterio.

PARTE SEGUNDA

CRITERIOS NOTABLES RELATIVOS A ESTRUCTURAS FINALES:

CSTFI-1. «Sean E un conjunto, $(A_\iota)_{\iota\in I}$ una familia de conjuntos, dotado cada A_ι de una estructura $\mathscr{S}_\iota$ de especie Σ. Sean además $(A_\iota^*)_{\iota\in I}$ y $(h_\iota)_{\iota\in I}$, respectivamente, otra familia de conjuntos y una familia de aplicaciones, teniendo asimismo ambas I, como conjunto de índices, y tales que para todo $\iota \in I$, sea h_ι una biyección de A_ι^* sobre A_ι. Para cada $\iota \in I$, designemos por $\mathscr{S}_\iota^*$, la estructura sobre A_ι^*, obtenida transportando la estructura $\mathscr{S}_\iota$ sobre A_ι, al conjunto A_ι^* mediante la aplicación biyectiva $\overset{-1}{h_\iota}$. Consideremos finalmente para cada $\iota \in I$ una aplicación g_ι de A_ι en E, y pongamos $g_\iota^* = g_\iota \circ h_\iota$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) Existe una estructura final $\mathcal{F}$ sobre E de especie Σ para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, g_\iota)_{\iota\in I}$.

b) Existe una estructura final $\widetilde{\mathcal{F}}$ sobre E de especie Σ para la familia $(A_\iota^*, \mathscr{S}_\iota^*, g_\iota^*)_{\iota\in I}$.

Además, estas proposiciones entrañan $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}$».

En efecto, supuesto verificado a), si f es una aplicación de E dotado de la estructura $\mathcal{F}$ en un conjunto E' dotado de una estructura $\mathscr{S}'$ de especie Σ, se obtiene, en virtud de la condición (FI) que caracteriza a las estructuras finales (N.B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 5, [2]), la relación:

$$f \in \sigma \,|\, E, E', \mathcal{F}, \mathcal{S}' \,| \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow f \circ g_\iota \in \sigma \,|\, A_\iota, E', \mathcal{S}_\iota, \mathcal{S}' \,|) \quad (1)$$

Por otra parte, en virtud de la condición (MO_{III}), (N.B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 1, [2]), se verifica:

$$(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow h_\iota \in \sigma \,|\, A_\iota^*, A_\iota, \mathcal{S}_\iota^*, \mathcal{S}_\iota \,| \text{ y } \overset{-1}{h_\iota} \in \sigma \,|\, A_\iota, A_\iota^*, \mathcal{S}_\iota, \mathcal{S}_\iota^* \,|) \quad (2)$$

Combinando (1) con la relación (2), y teniendo en cuenta la condición (MO_{II}), (N.B., Livre I, Chap IV, § 2, n.º 1, [2]), se obtiene para todo $\iota \in I$, la relación:

$$f \circ g_\iota \in \sigma \,|\, A_\iota, E', \mathcal{S}_\iota, \mathcal{S}' \,| \Longleftrightarrow (f \circ g_\iota) \circ h_\iota = f \circ (g_\iota \circ h_\iota) = f \circ g_\iota^* \in$$
$$\in \sigma \,|\, A_\iota^*, E', \mathcal{S}_\iota^*, \mathcal{S}' \,| \quad (3)$$

A partir de (3), y en virtud de (1), se verifica asimismo la relación:

$$f \in \sigma \,|\, E, E', \mathcal{F}, \mathcal{S}' \,| \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow f \circ g_\iota^* \in \sigma \,|\, A_\iota^*, E', \mathcal{S}_\iota^*, \mathcal{S}' \,|)$$

Por consiguiente, la estructura $\mathcal{F}$ sobre E por verificar la condición (FI) que carateriza a las estructuras finales, es una estructura final sobre E para la familia $(A_\iota^*, \mathcal{S}_\iota^*, g_\iota^*)_{\iota \in I}$, quedando por tanto establecida la relación a) $\Rightarrow$ b).

Recíprocamente, supuesto verificado b), y siendo f como antes, una aplicación de E dotado de la estructura $\tilde{\mathcal{F}}$ en un conjunto E' dotado de una estructura $\mathcal{S}'$ de especie Σ, se obtiene, en virtud de la referida condición (FI), la relación:

$$f \in \sigma \,|\, E, E', \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{S}' \,| \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow f \circ g_\iota^* \in \sigma \,|\, A_\iota^*, E', \mathcal{S}_\iota^*, \mathcal{S}' \,|)$$

Teniendo en cuenta (3), se deduce finalmente la relación:

$$f \in \sigma \,|\, E, E', \tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{S}' \,| \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow f \circ g_\iota \in \sigma \,|\, A_\iota, E', \mathcal{S}_\iota, \mathcal{S}' \,|)$$

la cual es precisamente la condición (FI) que caracteriza la estructura final $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre E, para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$. Se obtiene pues, b) $\Rightarrow$ a) que junto con el anterior resultado establecen a) $\Longleftrightarrow$ b).

La última parte del criterio, se obtiene inmediatamente, teniendo en cuenta la propiedad de unicidad de la estructura final.

Este resultado combinado con el que establece el Lema Preliminar relativo a estructuras finales (PARTE SEGUNDA, n.º 1, [1]), permite demostrar sin dificultad el siguiente criterio:

CSTFI-2. «Sea $(A_\iota)_{\iota\in I}$ una familia de conjuntos dotado cada A_ι de una estructura $\mathscr{S}_\iota$ de especie Σ. Sean además $(A_\iota^*)_{\iota\in I}$ y $(h_\iota)_{\iota\in I}$, respectivamente, otra familia de conjuntos y una familia de aplicaciones, teniendo asimismo ambas, I como conjunto de índices, y tales que para todo $\iota \in I$, sea h_ι una biyección de A_ι^* sobre A_ι. Para cada $\iota \in I$, designemos por $\mathscr{S}_\iota^*$, la estructura sobre A_ι^*, obtenida transportando la estructura $\mathscr{S}_\iota$ sobre A_ι al conjunto A_ι^* mediante la aplicación biyectiva $\overset{-1}{h_\iota}$. Sean E, E^* y h respectivamente, dos conjuntos y una aplicación, tales que h sea una biyección de E sobre E^*. Consideremos finalmente, para cada $\iota \in I$, una aplicación g_ι de A_ι en E, y pongamos $g_\iota^* = h \circ g_\iota \circ h_\iota$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) Existe una estructura final $\mathcal{F}$ sobre E de especie Σ para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, g_\iota)_{\iota\in I}$.

b) Existe una estructura final $\mathcal{F}^*$ sobre E^* de especie Σ para la familia $(A_\iota^*, \mathscr{S}_\iota^*, g_\iota^*)_{\iota\in I}$.

Además, estas proposiciones entrañan que h sea un isomorfismo de E dotado de la estructura $\mathcal{F}$ sobre E^* dotado de la estructura $\mathcal{F}^*$».

En efecto, en virtud del referido Lema Preliminar relativo a estructuras finales (PARTE SEGUNDA, n.º 1, [1]), la existencia de estructura final $\mathcal{F}$ sobre E para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, g_\iota)_{\iota\in I}$, es equivalente a la existencia de estructura final $\mathcal{F}^*$ sobre E^* para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, h \circ g_\iota)_{\iota\in I}$, y la estructura $\mathcal{F}^*$ sobre E^*, se obtiene transportando la estructura $\mathcal{F}$ sobre E (supuesta existente) al conjunto E^* mediante la aplicación biyectiva h, o lo que es lo mismo, h es un isomorfismo de E dotado de la estructura $\mathcal{F}$ sobre E^* dotado de la estructura $\mathcal{F}^*$.

Además, en virtud de CSTFI-1, la existencia de estructura final $\mathcal{F}^*$ sobre E^* para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, h \circ g_\iota)_{\iota\in I}$, es equivalente a la existencia de estructura final $\widetilde{\mathcal{F}}^*$ sobre E^* para la familia $(A_\iota^*, \mathscr{S}_\iota^*, (h \circ g_\iota) \circ h_\iota)_{\iota\in I} = (A_\iota^*, \mathscr{S}_\iota^*, g_\iota^*)_{\iota\in I}$, y supuesto existente una de las dos estructuras finales, se verifica $\widetilde{\mathcal{F}}^* = \mathcal{F}^*$, lo que concluye la demostración del criterio.

APLICACIÓN. Sea $(X_\iota)_{\iota\in I}$, una familia de conjuntos, y para cada $\iota\in I$, sea $\mathscr{S}_\iota$ una estructura de especie Σ sobre X_ι; pongamos $A = \bigcup_{\iota\in I} X_\iota$. Consideremos, para cada $\iota\in I$ la aplicación biyectiva j_ι de X_ι en $A \times I$, definida como sigue: $x \in X_\iota \to j_\iota(x) = (x, \iota) \in A \times I$; designemos, para cada $\iota\in I$ por X_ι', la imagen $j_\iota(X_\iota)$ mediante la biyección j_ι, y para cada $\iota\in I$, sea $\mathscr{S}_\iota'$ la estructura sobre X_ι' obtenida transportando la estructura $\mathscr{S}_\iota$ sobre X_ι al conjunto X_ι' mediante la aplicación biyectiva j_ι. Pongamos $S = \bigcup_{\iota\in I} X_\iota' \subset A \times I$; como se sabe, (N.B., Livre I, Chap. II, § 4, n.º 8, [3]), S es la «suma de la familia de conjuntos $(X_\iota)_{\iota\in I}$»; y la estructura final $\mathscr{S}$ sobre S (si existe), para la familia $(X_\iota, \mathscr{S}_\iota, j_\iota)_{\iota\in I}$, la denominaremos «estructura suma de la familia de estructuras $(\mathscr{S}_\iota)_{\iota\in I}$». Por aplicación de CSTFI-1, suponiendo E = S, y que

$$(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Rightarrow A_\iota = X_\iota \text{ y } A_\iota^* = X_\iota' \text{ y } \mathscr{S}_\iota^* = \mathscr{S}_\iota' \text{ y } h_\iota = \overset{-1}{j_\iota} \text{ y } g_\iota = j_\iota),$$

teniendo en cuenta, además, que para todo $\iota \in I$, es $g_\iota \circ h_\iota = j_\iota \circ \overset{-1}{j_\iota} = i_\iota'$ (i_ι', inyección canónica de X_ι' en S), resulta el criterio siguiente:

«Condición necesaria y suficiente para que la familia de estructuras $(\mathscr{S}_\iota)_{\iota\in I}$ admita estructura suma $\mathscr{S}$, es que exista estructura final $\mathscr{S}'$ sobre el conjunto suma $S = \bigcup_{\iota\in I} X_\iota'$ de la familia de conjuntos $(X_\iota)_{\iota\in I}$, relativa a la familia $(X_\iota', \mathscr{S}_\iota', i_\iota')_{\iota\in I}$, ($i_\iota'$, inyección canónica de X_ι' en S), y supuesta existente una de tales estructuras, se verifica $\mathscr{S} = \mathscr{S}'$».

Por otra parte, si $(X_\iota)_{\iota\in I}$ es una familia de conjuntos mutuamente disjuntos, y se pone como antes, $A = \bigcup_{\iota\in I} X_\iota$, S es la imagen $h\ (A)$ de A mediante la biyección h: $A \to S$, definida como sigue: $(\forall_\iota)$ $(\iota \in I \Rightarrow h_{|X_\iota} = j_\iota)$, (N.B., Livre I, Chap. II, § 4, n.º 8, [3]; $h_{|X_\iota}$ denota la restricción de h a X_ι), y designando para todo $\iota \in I$, por i_ι la inyección canónica de X_ι en A, se verifica para cada $\iota \in I$:

$$(i_\iota \circ \overset{-1}{j_\iota})\ (X_\iota') = \overset{-1}{j_\iota}(X_\iota') = X_\iota$$

y como consecuencia:

$$h \circ i_\iota \circ \overset{-1}{j_\iota} = h_{|X_\iota} \circ \overset{-1}{j_\iota} = j_\iota \circ \overset{-1}{j_\iota} = I_{X_\iota'} \quad \text{(para todo } \iota \in I).$$

Se verifica, por tanto, para cada $\iota \in I$, la relación:

$(\forall x')$ $(x' \in X_\iota' \Rightarrow (h \circ i_\iota \circ j_\iota)(x') = I_{X'_\iota}(x') = i_\iota'\ (x') \in S)$, es decir, $(\forall_\iota)$ $(\iota \in I \Rightarrow h \circ i_\iota \circ \overset{-1}{j_\iota} = i_\iota')$. Aplicando CSTFI-2, suponiendo como antes, que: $(\forall_\iota)$ $(\iota \in I \Rightarrow A_\iota = X_\iota$ y $A_\iota^* = X_\iota'$ y $\mathscr{S}_\iota^* = \mathscr{S}_\iota'$ y $h_\iota = \overset{-1}{j_\iota})$, así como, que $E = A$; $E^* = S$, y $(\forall_\iota)$ $(\iota \in I \Rightarrow g_\iota = i_\iota)$, se obtiene la equivalencia de las siguientes proposiciones:

α) Existe una estructura $\mathscr{S}$ sobre S, suma de la familia de estructuras $(\mathscr{S}_\iota)_{\iota \in I}$.

β) Existe una estructura fina) $\tilde{\mathscr{S}}$ sobre $A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$, para la familia $(X_\iota, \mathscr{S}_\iota, i_\iota)_{\iota \in I}$, ($i_\iota$, inyección canónica de X_ι en A).

Además, estas proposiciones entrañan que la reunión A de la familia de conjuntos $(X_\iota)_{\iota \in I}$, dotada de la estructura $\tilde{\mathscr{S}}$ sea isomorfa de la suma S de la referida familia de conjuntos, dotada de la estructura $\mathscr{S}$ suma de la familia de estructuras $(\mathscr{S}_\iota)_{\iota \in I}$, mediante la aplicación biyectiva h de A sobre S, que para cada $\iota \in I$ prolonga la biyección $j_\iota : X_\iota \to X_\iota'$, a $A = \bigcup_{\iota \in I} X_\iota$.

Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias
Universidad de la Laguna

NOTA BIBLIOGRAFICA

[1] J. M.ª CASCANTE. «*Sobre una generalización de los criterios de transitividad relativos a estructuras iniciales y de los criterios de transitividad relativos a estructuras finales*», Collectanea Mathematica, Vol. XVII- Fasc. 3.º - Año 1965.

[2] N. BOURBAKI. - «*Théorie des ensembles*», Chap. IV, Hermann & Cie., Editeurs. Paris (1958).

[3] N. BOURBAKI. - «*Théorie des ensembles*» Chap I y II, Hermann & Cie., Editeurs. Paris (1960).