SOBRE UNA GENERALIZACIÓN DE LOS CRITERIOS DE TRANSITIVIDAD RELATIVOS A ESTRUCTURAS INICIALES Y DE LOS CRITERIOS DE TRANSITIVIDAD RELATIVOS A ESTRUCTURAS FINALES

por

JOAQUÍN M.ª CASCANTE DÁVILA

INTRODUCCIÓN

En la presente nota se establecen dos criterios que generalizan respectivamente, los criterios de transitividad que figuran en los n.os 3 y 5 del § 2, Chap. IV del Livre I de N. Bourbaki [1] (*), relativos a estructuras iniciales o a estructuras finales sobre un conjunto E para una familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, de conjuntos $(A_\iota)_{\iota\in I}$ dotados cada uno de una estructura $\mathscr{S}_\iota$ de la misma especie, y una familia de aplicaciones $(f_\iota)_{\iota\in I}$ de E en A_ι o de A_ι en E respectivamente.

Dichos criterios generalizados establecen la equivalencia de la existencia de una estructura inicial $\mathcal{J}$ (resp. final $\mathcal{F}$) sobre un conjunto E para una familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, y de la existencia de una estructura inicial $\mathcal{J}^*$ (resp. final $\mathcal{F}^*$) sobre un conjunto E^* imagen de E mediante una biyección h de E sobre E^*, para una cierta familia $(B_\lambda, \mathscr{S}_\lambda', f^*_\lambda)_{\lambda\in L}$, verificando ciertas condiciones bien precisadas por los criterios, siendo estas estructuras iniciales (resp. finales) idénticas, salvo un isomorfismo, es decir, la biyección considerada h es un isomorfismo de E dotado de la estructura inicial $\mathcal{J}$ (resp. final $\mathcal{F}$) para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$ sobre E^* dotado de la estructura inicial $\mathcal{J}^*$ (resp. final $\mathcal{F}^*$) para la familia $(B_\lambda, \mathscr{S}_\lambda', f^*_\lambda)_{\lambda\in L}$.

Mediante estos dos criterios de transitividad generalizados, se deducen consecuencias que generalizan otras tantas que figuran en

(*) Véase la Nota Bibliográfica al final de la PARTE SEGUNDA. Para abreviar, en lo que sigue, siempre que nos refiramos a algún capítulo de la citada obra, antepondremos las iniciales N. B.

el ya citado Livre de N. BOURBAKI, y permiten asimismo establecer criterios nada inmediatos relativos a estructuras iniciales o finales sobre ciertos conjuntos especiales (conjuntos productos, conjuntos cocientes, subconjuntos de uno dado, etc.), criterios que figuran asimismo en el expresado Livre de N. BOURBAKI, pero que nosotros demostramos de un modo relativamente sencillo, por simple aplicación a los correspondientes casos particulares de los referidos criterios de transitividad generalizados.

Suponemos a lo largo de todo el trabajo, que nos desenvolvemos en una teoría $\mathscr{E}$ más fuerte que la teoría de conjuntos, en la cual hay definida una especie de estructura Σ (N. B. Livre I, Chap. IV, § 1, n.º 4, [1]), habiéndose definido además, para la especie Σ, una noción de σ-morfismo. (N. B. Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 1, [1]).

PARTE PRIMERA

CRITERIO DE TRANSITIVIDAD GENERALIZADO RELATIVO A ESTRUCTURAS INICIALES Y CONSECUENCIAS QUE SE DERIVAN DEL MISMO

1. *Lema preliminar.*— «Sea $(A_\iota)_{\iota\in I}$ una familia de conjuntos, dotado cada uno de una estructura $\mathscr{S}_\iota$ de especie Σ. Sean E, E^* dos conjuntos, y h una biyección de E^* sobre E. Consideremos para cada $\iota\in I$ una aplicación f_ι de E en A_ι, y pongamos para cada $\iota\in I$, $f_\iota^* = f_\iota \circ h$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:
α) Existe una estructura inicial $\mathfrak{I}$ sobre E de especie Σ para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$.
β) Existe una estructura inicial $\mathfrak{I}^*$ sobre E^* de especie Σ para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota^*)_{\iota\in I}$.

Además estas proposiciones entrañan que la estructura $\mathfrak{I}^*$ se obtenga transportando la estructura $\mathfrak{I}$ sobre E al conjunto E^* mediante la aplicación biyectiva $\overset{-1}{h}$».

En efecto, supuesto verificado α), sea $\mathfrak{I}^*$ la estructura obtenida transportando la estructura $\mathfrak{I}$ sobre E al conjunto E^* mediante la aplicación biyectiva $\overset{-1}{h}$. En virtud de (MO_{III}), (N. B. Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 1, [1]), se puede escribir: $h\in\sigma\,|\,E^*, E, \mathfrak{I}^*, \mathfrak{I}\,|$ y $\overset{-1}{h}\in\sigma\,|\,E, E^*, \mathfrak{I}, \mathfrak{I}^*\,|$, (1). Demostraremos que $\mathfrak{I}^*$ es una estructura inicial sobre E^* de especie Σ para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota^*)_{\iota\in I}$. Para ello, sea g una aplicación de un conjunto E' dotado de una estructura $\mathscr{S}'$ de especie Σ, en E^*. La relación:

$$g \in \sigma \,|\, E', E^*, \mathscr{S}', \mathfrak{I}^* \,|$$

entraña junto con la primera de las relaciones (1) y en virtud de (MO_{II}); (N. B. Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 1, [1]) la relación:

$$h \circ g \in \sigma \,|\, E', E, \mathscr{S}', \mathfrak{I} \,|$$

y en virtud de α) por aplicación de la condición (IN) que caracteriza a las estructuras iniciales (N. B. Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 3, [1]), ésta última a su vez entraña la relación:

$$(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota \circ (h \circ g) = (f_\iota \circ h) \circ g = f_\iota^* \circ g \in \sigma \,|\, E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \,|),$$

es decir, es un teorema en la teoría $\mathscr{E}$ la relación:

$$g \in |\, E', E^*, \mathscr{S}', \mathfrak{I}^* \,| \Longrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota^* \circ g \in \sigma \,|\, E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \,|)$$

Inversamente, la relación: $(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota^* \circ g \in \sigma \,|\, E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \,|)$ es idéntica a la: $(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota \circ (h \circ g) \in \sigma \,|\, E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \,|)$, que en virtud de la hipótesis α), y por aplicación de la referida condición (IN) entraña:

$$h \circ g \in \sigma \,|\, E', E, \mathscr{S}', \mathfrak{I} \,|$$

Combinando esta relación con la segunda de las relaciones (1), y teniendo en cuenta la indicada condición (MO_{II}), se obtiene la relación:

$$g \in \sigma \,|\, E', E^*, \mathscr{S}', \mathfrak{I}^* \,|$$

Así pués, α) entraña la relación:

$$g \in \sigma \,|\, E', E^*, \mathscr{S}', \mathfrak{I}^* \,| \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota^* \circ g \in \sigma \,|\, E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \,|)$$

Por consiguiente, la estructura $\mathfrak{I}^*$ sobre E^* por verificar la condición (IN) que caracteriza a las estructuras iniciales, es una estructura inicial sobre E^* para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota^*)_{\iota \in I}$, quedando por tanto establecida la relación $\alpha) \Longrightarrow \beta)$.

Recíprocamente, supuesto verificado β), sea $\mathfrak{I}$ la estructura obtenida transportando la estructura $\mathfrak{I}^*$ sobre E^* al conjunto E, mediante la aplicación biyectiva h. Probemos que $\mathfrak{I}$ es una estructura inicial sobre E de especie Σ, para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$. Para ello, consideremos una aplicación g cualquiera de un conjunto E' dotado de una estructura $\mathscr{S}'$ de especie Σ en E. La relación: $g \in \sigma \mid E', E, \mathscr{S}', \mathfrak{I} \mid$ entraña teniendo en cuenta la segunda de las relaciones (1), en virtud de (MO_{II}) la relación $\overset{-1}{h} o\, g \in \sigma \mid E', E^*, \mathscr{S}', \mathfrak{I}^* \mid$ y en virtud de β) por aplicación de la condición (IN), ésta última a su vez entraña la relación:

$$(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota\, o\, g = (f_\iota^*\, o\, \overset{-1}{h})\, o\, g = f_\iota^*\, o\, (\overset{-1}{h}\, o\, g) \in \sigma \mid E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \mid),$$

es decir, es un teorema en la teoría $\mathscr{E}$ la relación:

$$g \in \sigma \mid E', E, \mathscr{S}', \mathfrak{I} \mid \Longrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota\, o\, g \in \sigma \mid E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \mid).$$

Inversamente, la relación $(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota\, o\, g \in \sigma \mid E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \mid)$ es idéntica a la relación: $(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota^*\, o\, (\overset{-1}{h}\, o\, g) \in \sigma \mid E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \mid)$, la cual en virtud de la hipótesis β), y mediante aplicación de la condición (IN), entraña la relación: $\overset{-1}{h}\, o\, g \in \sigma \mid E', E^*, \mathscr{S}', \mathfrak{I}^* \mid$, que combinada con la primera de las relaciones (1) y en virtud de la condición (MO_{II}), establece la relación $g \in \sigma \mid E', E, \mathscr{S}', \mathfrak{I} \mid$.
Por tanto β) entraña la relación:

$$g \in \sigma \mid E', E, \mathscr{S}', \mathfrak{I} \mid \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota\, o\, g \in \sigma \mid E', A_\iota, \mathscr{S}', \mathscr{S}_\iota \mid),$$

que es la condición (IN) que caracteriza la estructura inicial sobre E para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$.
Se obtiene pués, $\beta) \Longrightarrow \alpha)$ que junto con el anterior resultado establecen:

$$\alpha) \Longleftrightarrow \beta).$$

La última parte del Lema se obtiene inmediatamente, teniendo en cuenta la propiedad de unicidad de la estructura inicial.

De este Lema y de la definición de estructura inicial sobre un conjunto E para una familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, se obtiene el siguiente criterio de transitividad generalizado:

2. CSTG — «Sean E, E^* dos conjuntos, h una biyección de E^* sobre E; $(A_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de conjuntos, y para cada $\iota \in I$, sea $\mathscr{S}_\iota$ una estructura de especie Σ sobre A_ι. Sea $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ una partición de I, y sea $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de conjuntos teniendo L como conjunto de índices. Para cada $\lambda \in L$, sea h_λ una aplicación de E en B_λ, y pongamos $h^*_\lambda = h_\lambda\, o\, h$; para todo $\lambda \in L$ y todo $\iota \in J_\lambda$, sea $g_{\lambda\iota}$ una aplicación de B_λ en A_ι; se pone $f_\iota = g_{\lambda\iota}\, o\, h_\lambda$. Se supone que, para todo $\lambda \in L$, existe

una estructura inicial $\mathcal{S}'_\lambda$ sobre B_λ para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_{\lambda\iota})_{\iota\in J_\lambda}$. En estas condiciones, las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) existe una estructura inicial $\mathcal{J}$ sobre E para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$.

b) existe una estructura inicial $\mathcal{J}^*$ sobre E^* para la familia $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h^*_\lambda)_{\lambda\in L}$ Además, estas proposiciones entrañan que h es un isomorfismo de E^* dotado de la estructura $\mathcal{J}^*$ sobre E dotado de la estructura $\mathcal{J}$». (*)

En efecto, pongamos $f_\iota^* = f_\iota \circ h = g_{\lambda\iota} \circ (h_\lambda \circ h) = g_{\lambda\iota} \circ h^*_\lambda$, y sea F un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}_F$ de especie Σ, y u una aplicación de F en E^*. Observemos que por definición de estructura inicial, se verifica la siguiente equivalencia:

$$h_\lambda^* \circ u \in \sigma\,|\,F,\ B_\lambda,\ \mathcal{S}_F,\ \mathcal{S}'_\lambda\,| \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in J_\lambda \Longrightarrow g_{\lambda\iota} \circ (h_\lambda^* \circ u) =$$
$$= (g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda^*) \circ u = f_\iota^* \circ u \in \sigma\,|\,F,\ A_\iota,\ \mathcal{S}_F,\ \mathcal{S}_\iota\,|),$$

y por tanto, teniendo en cuenta que $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ es una partición de I, tiene lugar la equivalencia:

$$(\forall_\lambda)\ (\lambda\in L \Longrightarrow h_\lambda^* \circ u \in \sigma\,|F, B_\lambda, \mathcal{S}_F, \mathcal{S}'_\lambda\,|) \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I$$
$$\Longrightarrow f_\iota^* \circ u \in \sigma\,|\,F,\ A_\iota,\ \mathcal{S}_F,\ \mathcal{S}_\iota\,|)\quad (1)$$

Ahora bien, si $\mathcal{J}$ es una estructura inicial sobre E para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, en virtud del Lema preliminar existe una estructura inicial $\mathcal{J}^*$ sobre E^* para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota^*)_{\iota\in I}$, y h es un isomorfismo de E^* dotado de dicha estructura $\mathcal{J}^*$, sobre E dotado de la estructura $\mathcal{J}$, por lo que en virtud de la condición (IN) que caracteriza a las estructuras iniciales, se verifica la siguiente equivalencia:

$$u \in \sigma\,|\,F,\ E^*,\ \mathcal{S}_F,\ \mathcal{J}^*\,| \Longleftrightarrow (\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota^* \circ u \in \sigma\,|\,F,\ A_\iota,\ \mathcal{S}_F,\ \mathcal{S}_\iota\,|),$$

y por tanto teniendo en cuenta (1):

$$u \in \sigma\,|\,F, E^*, \mathcal{S}_F, \mathcal{J}^*\,| \Longleftrightarrow (\forall_\lambda)\ (\lambda \in L \Longrightarrow h_\lambda^* \circ u \in \sigma\,|\,F,\ B_\lambda,\ \mathcal{S}_F,\ \mathcal{S}'_\lambda\,|),$$

es decir, la existencia de una estructura inicial $\mathcal{J}$ sobre E, para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, entraña que $\mathcal{J}^*$ sea una estructura inicial sobre E^* para la familia $(B_\lambda, \mathcal{S}'_\lambda, h_\lambda^*)_{\lambda\in L}$.

(*) En particular si h es la aplicación idéntica de E sobre E, resulta el criterio de transitividad CST 10 que figura en N. B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 3, [1].

Inversamente, si $\mathfrak{J}^*$ es una estructura inicial sobre E^* para la familia $(B_\lambda, \mathcal{S}_\lambda', h_\lambda^*)_{\lambda \in L}$, se verifica en virtud de (IN) la equivalencia:

$$u \in \sigma \mid F, E^*, \mathcal{S}_F, \mathfrak{J}^* \mid \Longleftrightarrow (\forall_\lambda) \, (\lambda \in L \Longrightarrow h^*_\lambda o\, u \in \sigma \mid F, B_\lambda, \mathcal{S}_F, \mathcal{S}_\lambda' \mid)$$

y por tanto, habida cuenta de la relación (1), se verifica asimismo la equivalencia:

$$u \in \sigma \mid F, E^*, \mathcal{S}_F, \mathfrak{J}^* \mid \Longleftrightarrow (\forall_\iota) \, (\iota \in I \Longrightarrow f_\iota^* \, o\, u \in \sigma \mid F, A_\iota, \mathcal{S}_F, \mathcal{S}_\iota \mid)$$

es decir, la existencia de una estructura inicial $\mathfrak{J}^*$ sobre E^* para la familia $(B_\lambda, \mathcal{S}_\lambda', h^*_\lambda)_{\lambda \in L}$, entraña que $\mathfrak{J}^*$ sea estructura inicial sobre E^* para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota^*)_{\iota \in I}$, y en virtud del referido Lema, que exista sobre E una estructura inicial $\mathfrak{J}$ para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)\iota \in I$, tal que h es un isomorfismo de E^* dotado de la estructura $\mathfrak{J}^*$, sobre E dotado de la estructura $\mathfrak{J}$.

El Criterio resulta así demostrado.

3. *Consecuencias que se derivan del Criterio de Transitividad Generalizado relativo a estructuras iniciales.* — Recordemos que cuando I es un conjunto reducido a un sólo elemento, la estructura inicial $\mathfrak{J}$ sobre E para la única terna $(A, \mathcal{S}, f)$, (si ella existe) es denominada «imagen recíproca mediante f, de la estructura $\mathcal{S}$», [la cual está caracterizada pués, por la condición (IN): $g \in \sigma \mid E', E, \mathcal{S}', \mathfrak{J} \mid \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow f o g \in \sigma \mid E', A, \mathcal{S}', \mathcal{S} \mid$], y que si A es un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}$ de especie, Σ, $E \subset A$, una parte de A, y j la inyección canónica de E en A, la estructura inicial sobre E imagen recíproca (si ella existe) de la estructura $\mathcal{S}$ mediante la inyección j, es designada «estructura inducida por $\mathcal{S}$ sobre E». Aplicando el Lema preliminar anterior se obtiene la siguiente:

Proposición I.— «Sean E y E^* dos conjuntos, y h una biyección de E^* sobre E. Sean por otra parte, A un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}$ de especie Σ, y f una aplicación de E en A. Para que exista sobre E una estructura $\mathfrak{J}$, imagen recíproca de $\mathcal{S}$ mediante la aplicación f, es necesario y suficiente que exista sobre E^* una estructura $\mathfrak{J}^*$ imagen recíproca de $\mathcal{S}$ mediante la aplicación $f \, o \, h$, y la biyección h de E^* (dotado de $\mathfrak{J}^*$) sobre E (dotado de $\mathfrak{J}$) es un isomorfismo». Simple aplicación del referido Lema, cuando I es un conjunto reducido a un sólo elemento, y además $(\forall_\iota)$ $(\iota \in I \Longrightarrow \mathcal{S}_\iota = \mathcal{S}$ y $f_\iota = f$ y $A_\iota = A)$.

En particular, si A es un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}$

de especie Σ, $E \subset A$, una parte de A, y j denota la inyección canónica de E en A, resulta la:

Proposición II.— «Sea A un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}$ de especie Σ, $E \subset A$, una parte de A, y h una biyección de un conjunto E^* sobre E. Para que $\mathcal{S}$ induzca sobre E una estructura $\mathcal{S}_E'$ de la misma especie Σ, es necesario y suficiente que exista sobre E^*, una estructura $\mathcal{S}_E^*$, imagen recíproca de $\mathcal{S}$ mediante $j \circ h$, y la biyección h de E^* (dotado de $\mathcal{S}_E^*$) sobre E (dotado de la estructura $\mathcal{S}_E'$ inducida por $\mathcal{S}$) es un isomorfismo».

El Criterio Generalizado $CSTG$, proporciona para las estructuras inducidas el siguiente «criterio de transitividad»:

Proposición III.— «Sean B una parte de un conjunto A, C una parte de B, $\mathcal{S}$ una estructura de especie Σ sobre A induciendo sobre B una estructura $\mathcal{S}'$ de la misma especie, y h una biyección de un conjunto C^* sobre C. Para que $\mathcal{S}$ induzca sobre C una estructura $\mathcal{S}''$ de especie Σ, es necesario y suficiente que exista sobre C^* una estructura $\mathcal{S}_C^*$ imagen recíproca de $\mathcal{S}'$ mediante la aplicación $j_{(C,B)} \circ h$, ($j_{(H,K)}$ designa la inyección canónica de $H \subset K$ en K), y la biyección h es un isomorfismo de C^* (dotado de $\mathcal{S}_{C^*}$), sobre C (dotado de la estructura $\mathcal{S}''$ inducida por la estructura $\mathcal{S}$ de A)». (*)

Esta proposición es caso particular de $CSTG$, suponiendo que I es un conjunto reducido a un único elemento, (y por tanto, L es asimismo un conjunto a un sólo elemento) y que además:

$$(\forall_\iota)\ (\iota \in I \Longrightarrow A_\iota = A \text{ y } \mathcal{S}_\iota = \mathcal{S});\ (\forall_\lambda)\ (\lambda \in L \Longrightarrow B_\lambda = B \text{ y } \mathcal{S}_\lambda' = \mathcal{S}'$$
$$\text{y } h_\lambda = j_{(C,B)}) \text{ y } (\forall_\lambda)\ (\forall_\iota)\ (\lambda \in L \text{ y } \iota \in I \Longrightarrow g_{\lambda\iota} = j_{(B,A)})$$

Se tiene sucesivamente, $(\forall_\iota)$ $(\iota \in I \Longrightarrow f_\iota = g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda = j_{(B,A)} \circ j_{(C,B)} = = j_{(C,A)})$ y $(\forall_\lambda)$ $(\lambda \in L \Longrightarrow h^*_\lambda = h_\lambda \circ h = j_{(C,B)} \circ h)$.

En virtud del referido criterio $CSTG$, la existencia de una estructura inicial sobre C para la terna $(A, \mathcal{S}, j_{(C,A)})$, es decir, la existencia sobre C de estructura inducida por $\mathcal{S}$, es equivalente a la existencia sobre C^* de estructura inicial para la terna $(B, \mathcal{S}', j_{(C,B)} \circ h)$, es decir, a la existencia sobre C^* de estructura imagen recíproca de la estructura $\mathcal{S}'$ mediante la aplicación $j_{(C,B)} \circ h$, y ambos conjuntos C^* y C

(*) En particular, cuando h es la aplicación idéntica de C sobre C, resulta el criterio CST 11, que figura en N. B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 4, [1].

dotados de las respectivas estructuras referidas, son isomorfos entre sí mediante la aplicación biyectiva h.

3'. *Estructura producto.*— Sea $(A_\iota)_{\iota\in I}$ una familia de conjuntos cuyo conjunto de índices no es vacío, y sobre cada conjunto A_ι, sea $\mathcal{S}_\iota$ una estructura de especie Σ; sea $E = \prod_{\iota\in I} A_\iota$, el conjunto producto de la familia $(A_\iota)_{\iota\in I}$, y sea pr_ι la proyección de E en A_ι. Como se sabe se llama estructura producto de la familia $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota\in I}$, la estructura inicial (si ella existe) sobre E para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, pr_\iota)_{\iota\in I}$.

El Criterio $CSTG$ establece de un modo sencillo para las estructuras producto, (*) el siguiente «criterio de asociatividad»:

«Sea $(A_\iota)_{\iota\in I}$ una familia de conjuntos, y para cada $\iota \in I$, sea $\mathcal{S}_\iota$ una estructura de especie Σ sobre A_ι. Sea $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ una partición de I. Se supone que sobre cada producto parcial $B_\lambda = \prod_{\iota\in J_\lambda} A_\iota$, la familia $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota\in J_\lambda} J_\lambda$ admite una estructura producto $\mathcal{S}_\lambda'$. En estas condiciones, para que la familia $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota\in I}$ admita una estructura producto $\mathcal{S}$, es necesario y suficiente que la familia $(\mathcal{S}_\lambda')_{\lambda\in L}$ admita una estructura producto $\mathcal{S}'$, y la aplicación canónica de $E = \prod_{\iota\in I} A_\iota$, dotado de la estructura $\mathcal{S}$, sobre $F = \prod_{\lambda\in L} B_\lambda$ dotado de la estructura $\mathcal{S}'$ es un isomorfismo».

Este criterio es caso particular de $CSTG$, haciendo $E = \prod_{\iota\in I} A_\iota$; $E^* = F = \prod_{\lambda\in L} B_\lambda$, adoptando para h la aplicación canónica de F sobre E, y para todo $\lambda \in L$, se elige como h_λ la proyección pr_{J_λ} de índice J_λ de $E = \prod_{\iota\in I} A_\iota$ en B_λ, es decir, para todo $\lambda \in L$, (véase N. B., Chap. II, § 5, n.º 4, [2]) la aplicación h_λ está definida como sigue:

$$G \in E = \prod_{\iota\in I} A_\iota \to h_\lambda(G) = G_0\, \Delta_{J_\lambda} \in \prod_{\iota\in J_\lambda} A_\iota = B_\lambda, \; (\Delta_{J_\lambda}, \text{diagonal de } J_\lambda \times J_\lambda)$$

o bién, utilizando la notación indicial:

$$(a_\iota)_{\iota\in I} \in \prod_{\iota\in I} A_\iota \to (a_\iota)_{\iota\in J_\lambda} = b_\lambda \in B_\lambda = \prod_{\iota\in J_\lambda} A_\iota$$

(*) Este criterio de asociatividad, figura en N. B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 4, [1], aunque no su demostración, limitándose a indicar que se obtiene por aplicación del criterio de transitividad CST 10 (Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 3, [1]). Como puede comprobarse, la demostración del mismo sin el criterio de transitividad generalizado $CSTG$, no es en absoluto inmediata.

y $\overset{-1}{h}$ [existente siempre, por ser la aplicación canónica biyectiva, (N. B., Livre I, Chap. II, § 5, n.º 5 [2])] está definida por:

$$G \in E \to \overset{-1}{h}(G) = (pr_{J_\lambda} G)_{\lambda \in L} = (G \circ \Delta_{J_\lambda})_{\lambda \in L} \in F$$

o, utilizando asimismo la notación indicial:

$$(a_\iota)_{\iota \in I} \in E \to (a_\iota)_{\iota \in J_\lambda})_{\lambda \in L} = (b_\lambda)_{\lambda \in L} \in F$$

De acuerdo con las notaciones de *CSTG*, para todo $\lambda \in L$, $h^*_\lambda = h_\lambda \circ h$, será por tanto la aplicación:

$$(b_\mu)_{\mu \in L} = ((a_\iota)_\iota \in J_\mu)_{\mu \in L} \in F \to h^*_\lambda ((b_\mu)_{\mu \in L}) = h_\lambda (h((b_\mu)_{\mu \in L})) = pr_{J_\lambda} ((a_\iota)_{\iota \in I}) =$$
$$= (a_\iota)_{\iota \in J_\lambda} = b_\lambda = pr_\lambda ((b_\mu)_{\mu \in L}) \in B_\lambda$$

es decir, h^*_λ es la proyección pr_λ de índice λ, de F en B_λ.

Finalmente, para todo $\lambda \in L$ y todo $\iota \in J_\lambda$, adoptamos como $g_{\lambda\iota}$, la proyección $pr_{\lambda\iota}$ de índice ι de $B_\lambda = \prod_{\iota \in J_\lambda} A_\iota$ en A_ι; $f_\iota = g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda$, será por consiguiente la aplicación de E en A_ι, definida por:

$$G \in E \to f_\iota (G) = g_{\lambda\iota} (h_\lambda (G)) = g_{\lambda\iota} (G \circ \Delta_{J_\lambda}) = pr_{\lambda\iota} (G \circ \Delta_{J_\lambda}) =$$
$$= (G \circ \Delta_{J_\lambda}) (\iota) = G (\iota) = pr_\iota (G) \in A_\iota$$

(Véase N. B., Livre I, Chap. II, § 5, n.º 3, [2], es decir, para todos $\iota \in I$, f_ι coincide con la proyección pr_ι de índice ι de E en A_ι. Como las condiciones requeridas por *CSTG* son verificadas, se concluye por aplicación del mismo, que la existencia de estructura inicial $\mathscr{S}$ sobre $E = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, pr_\iota)_{\iota \in I}$, es decir, de estructura producto $\mathscr{S}$ de la familia $(\mathscr{S}_\iota)_{\iota \in I}$, es equivalente a la existencia de estructura inicial $\mathscr{S}'$ sobre $F = \prod_{\lambda \in L} B_\lambda$ para la familia $(B_\lambda, \mathscr{S}_\lambda', pr_\lambda)_{\lambda \in L}$, es decir, de estructura $\mathscr{S}'$ producto de la familia $(\mathscr{S}_\lambda')_{\lambda \in L}$, y la aplicación canónica $\overset{-1}{h}$ de $E = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ dotado de $\mathscr{S}$ sobre $F = \prod_{\lambda \in L} B_\lambda$, dotado de $\mathscr{S}'$, es un isomorfismo.

El criterio resulta así demostrado.

El criterio siguiente relaciona los conceptos de estructura producto y de estructura imagen recíproca:

Proposición IV.— «Sea $(A_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de conjuntos, y para cada $\iota \in I$, sean $\mathscr{S}_\iota$ una estructura de especie Σ sobre A_ι, y f_ι una aplicación de un conjunto E en A_ι. Consideremos asimismo un conjunto E^* y una biyección h de E^* sobre E. Se supone que existe sobre el conjunto producto $A = \prod_{\iota \in I} A_\iota$ una estructura $\mathcal{S}_0$ producto de la familia $(\mathcal{S}_\iota)_{\iota \in I}$.

Entonces, para que exista una estructura inicial $\mathcal{S}$ sobre E para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$, es necesario y suficiente que exista sobre E^* una estructura $\mathcal{S}^*$ imagen recíproca de $\mathcal{S}_0$ mediante la aplicación $x \to f(h(x)) = (f_\iota(h(x)))_{\iota \in I}$ de E^* en A; la estructura $\mathcal{S}$ se obtiene entonces, transportando la estructura $\mathcal{S}^*$ sobre E^*, al conjunto E mediante la aplicación biyectiva h» (*)

La demostración se obtiene sin dificultad a partir de $CSTG$, suponiendo $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ reducido a un sólo elemento, así como $(\forall \lambda)$ $(\lambda \in L \Rightarrow B_\lambda = A$ y $h_\lambda = f$ y $\mathcal{S}_\lambda' = \mathcal{S}_0)$, y finalmente, $(\forall \lambda)$ $(\forall \iota)$ $(\lambda \in L$ y $\iota \in I \Rightarrow g_{\lambda\iota} = pr_\iota)$ (pr_ι proyección de índice ι de A en A_ι) Como $f_\iota = pr_\iota \circ f$, se tendrá por tanto:

$$(\forall \lambda)\ (\forall \iota)\ (\lambda \in L \text{ y } \iota \in I \Rightarrow g_{\lambda\iota} \circ h_\lambda = f_\iota),$$

y además por lo precedente:

$$(\forall \lambda)\ (\lambda \in L \Rightarrow h_\lambda^* = h_\lambda \circ h = f \circ h).$$

Verificándose, las condiciones requeridas en $CSTG$, se puede afirmar que la existencia de una estructura inicial $\mathcal{S}$ sobre E para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$ es equivalente a la existencia de una estructura inicial $\mathcal{S}^*$ sobre E^* para la familia $(A, \mathcal{S}_0, f \circ h)$, es decir, a la existencia de estructura $\mathcal{S}^*$ sobre E^*, imagen recíproca de $\mathcal{S}_0$ mediante la aplicación $x \to f(h(x)) = (f_\iota(h(x)))_{\iota \in I}$ de E^* en A, y la biyección h es un isomorfismo de E^* dotado de $\mathcal{S}^*$ sobre E dotado de $\mathcal{S}$.

El criterio resulta así demostrado.

Una aplicación interesante del anterior criterio es la siguiente:

Proposición V.— «Sea $(\mathcal{S}_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de estructuras de especie Σ sobre un mismo conjunto A; se designa para todo $\lambda \in L$, por A_λ el conjunto A dotado de la estructura $\mathcal{S}_\lambda$, y por I_λ la aplicación idéntica de A sobre A_λ. Sean B el conjunto producto $A^L = \prod_{\lambda \in L} A_\lambda$, Δ_B la diagonal de este producto (Véase N. B. , Livre I, Chap. II, § 5, n.º 3, [2]), y h la aplicación recíproca de la aplicación diagonal de A sobre Δ_B,

(*) En particular, si h es la aplicación idéntica I_E de E sobre E, resulta el criterio CST 15 de N. B., Livre I, § 2, n.º 4, [1].

es decir, $\overset{-1}{h}(x)$ siendo por tanto el elemento $(x_\lambda)_{\lambda \in L}$, tal que $x_\lambda = x$ para todo $\lambda \in L$. Se supone que existe sobre B, la estructura producto $\mathscr{S}'$ de la familia $(\mathscr{S}_\lambda)_{\lambda \in L}$. En estas condiciones, las proposiciones siguientes son equivalentes:

α) existe una estructura inicial $\mathscr{S}$ sobre A para la familia $(A_\lambda, \mathscr{S}_\lambda, I_\lambda)_{\lambda \in L}$.

β) existe sobre Δ_B una estructura $\mathscr{S}''$ inducida por la estructura $\mathscr{S}'$.

Además estas proposiciones entrañan que h sea un isomorfismo de Δ_B dotado de la estructura $\mathscr{S}''$ sobre A dotado de la estructura $\mathscr{S}$. En particular, cuando todas las estructuras $\mathscr{S}_\lambda$ son idénticas, h es un isomorfismo de A dotado de esta estructura común, sobre Δ_B dotado de $\mathscr{S}''$».

Esta proposición es caso particular del criterio anterior, (*) en la que los conjuntos E, A y E^*, que intervienen en el mismo, se suponen que son respectivamente los A, B, y Δ_B que figuran en la Proposición.

La aplicación h que figura en el criterio, es precisamente la aplicación recíproca de la aplicación diagonal de A sobre Δ_B, así como $\mathscr{S}_0$ y $\mathscr{S}^*$ se suponen que son respectivamente $\mathscr{S}'$ y $\mathscr{S}''$. Finalmente, se suponen sustituidos I, $\mathscr{S}_\iota$, f_ι, A_ι respectivamente por L, $\mathscr{S}_\lambda$, I_λ, A_λ.

Después de estas sustituciones, observemos que la aplicación $f \circ h$ que figura en el enunciado del criterio, es la aplicación:

$$(x_\lambda)_{\lambda \in L} \in \Delta_B \rightarrow (I_\mu\ (h\ ((x_\lambda)_{\lambda \in L})))_{\mu \in L} = (x_\lambda)_{\lambda \in L} \in B = \prod_{\lambda \in L} A_\lambda,$$

es decir, $f \circ h$ es la inyección canónica $j(\Delta_B, B)$ de Δ_B en B, por lo que la estructura $\mathscr{S}''$ sobre Δ_B, imagen recíproca de la estructura $\mathscr{S}'$ sobre B mediante la aplicación $f \circ h$, es precisamente la estructura inducida sobre Δ_B por $\mathscr{S}'$. El resto de lo afirmado en la Proposición es inmediato.

(*) El criterio anterior que generaliza el criterio *CST* 15, de N. B. (Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 4, [1]), puede aparecer a primera vista un tanto artificioso. El razonamiento empleado en la demostración de la Proposición V, pone de manifiesto que esta aparente artificiosidad no es supérflua.

PARTE SEGUNDA

CRITERIO DE TRANSITIVIDAD GENERALIZADO RELATIVO A ESTRUCTURAS FINALES Y CONSECUENCIAS QUE SE DERIVAN DEL MISMO

1. *Lema preliminar.* — «Sea $(A_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de conjuntos, dotado cada uno de una estructura $\mathcal{S}_\iota$ de especie Σ. Sean E, E^* dos conjuntos, y h una biyección de E sobre E^*. Consideremos para cada $\iota \in I$ una aplicación g_ι de A_ι en E, y pongamos para cada $\iota \in I$, $g_\iota^* = h \circ g_\iota$. Las proposiciones siguientes son equivalentes:

α) Existe una estructura final $\mathcal{F}$ sobre E de especie Σ para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$.

β) Existe una estructura final $\mathcal{F}^*$ sobre E^* de especie Σ para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota^*)_{\iota \in I}$.

Además estas proposiciones entrañan que la estructura $\mathcal{F}^*$ se obtenga transportando la estructura $\mathcal{F}$ sobre E al conjunto E^* mediante la aplicación biyectiva h».

En efecto, supuesto verificado α), sea $\mathcal{F}^*$ la estructura obtenida transportando la estructura $\mathcal{F}$ sobre E, al conjunto E^* mediante la aplicación biyectiva h. Se tiene entonces, en virtud de (MO_{III}), (Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 1, [1]).

$$h \in \sigma \,|\, E, E^*, \mathcal{F}, \mathcal{F}^* \,|\, \text{ y } \overset{-1}{h} \in \sigma \,|\, E^*, E, \mathcal{F}^*, \mathcal{F} \,|\, (1).$$

Demostremos que $\mathcal{F}^*$ es una estructura final sobre E^*, de especie Σ, para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota^*)_{\iota \in I}$. Para ello, sea f una aplicación de E^* dotado de la estructura $\mathcal{F}^*$ en un conjunto E' dotado de una estructura $\mathcal{S}'$ de especie Σ. La relación: $f \in \sigma \,|\, E^*, E', \mathcal{F}^*, \mathcal{S}' \,|$ entraña junto con la primera de las relaciones (1) y en virtud de (MO_{II}), (N. B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 1 [1]) la relación:

$$f \circ h \in \sigma \,|\, E, E', \mathcal{F}, \mathcal{S}' \,|$$

y en virtud de α), por aplicación de la condición (FI) que caracteriza a las estructuras finales (N. B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 5, [1]), esta última a su vez entraña la relación:

$$(\forall_\iota) \; (\iota \in I \Longrightarrow (f \circ h) \circ g_\iota = f \circ (h \circ g_\iota) = f \circ g_\iota^* \in \sigma \,|\, A_\iota, E', \mathcal{S}_\iota, \mathcal{S}' \,|\,)$$

es decir, es un teorema en la teoría $\mathscr{E}$ la relación:

$$f \in \sigma \,|\, E^*,\, E',\, \mathcal{F}^*,\, \mathscr{S}' \,| \implies (\forall_\iota)\ (\iota \in I = f \circ g_\iota^* \in \sigma \,|\, A_\iota,\, E',\, \mathscr{S}_\iota,\, \mathscr{S}' \,|\,)$$

Inversamente, la relación $(\forall_\iota)\ (\iota \in I \implies f \circ g_\iota^* \in \sigma \,|\, A_\iota,\, E',\, \mathscr{S}_\iota,\, \mathscr{S}' \,|\,)$ es idéntica a la: $(\forall_\iota)\ (\iota \in I = (f \circ \overset{-1}{h}) \circ g_\iota \in \sigma \,|\, A_\iota,\, E',\, \mathscr{S}_\iota,\, \mathscr{S}' \,|\,)$, que en virtud de la hipótesis α), y por aplicación de la referida condición (FI) entraña:

$$f \circ h \in \sigma \,|\, E,\, E',\, \mathcal{F},\, \mathscr{S}' \,|$$

Combinando esta relación con la segunda de las relaciones (1), y teniendo en cuenta la indicada condición (MO_{II}), se obtiene la relación:

$$f \in \sigma \,|\, E^*,\, E',\, \mathcal{F}^*,\, \mathscr{S}' \,|$$

Así pués, α) entraña la relación:

$$f \in \sigma \,|\, E^*, E', \mathcal{F}^*,\, \mathscr{S}' \,| \iff (\forall_\iota)\,(\iota \in I \implies f \circ g_\iota^* \in \sigma \,|\, A_\iota,\, E',\, \mathscr{S}_\iota,\, \mathscr{S}' \,|\,).$$

Por consiguiente, la estructura $\mathcal{F}^*$ sobre E^*, por verificar la condición (FI) que caracteriza a las estructuras finales, es una estructura final sobre E^* para la familia $(A_\iota,\, \mathscr{S}_\iota,\, g_\iota^*)_{\iota \in I}$, quedando por tanto establecida la relación $\alpha) \implies \beta)$.

Recíprocamente, supuesto verificado β), sea $\mathcal{F}$ la estructura obtenida transportando la estructura $\mathcal{F}^*$ sobre E^*, al conjunto E mediante la aplicación biyectiva $\overset{-1}{h}$. Probemos que $\mathcal{F}$ es una estructura final sobre E de especie Σ, para la familia $(A_\iota,\, \mathscr{S}_\iota,\, g_\iota)_{\iota \in I}$. Para ello consideremos una aplicación f cualquiera de E dotado de $\mathcal{F}$, en un conjunto E' dotado de una estructura $\mathscr{S}'$ de especie Σ. La relación: $f \in \sigma \,|\, E, E', \mathcal{F},\, \mathscr{S}' \,|$ entraña teniendo en cuenta la segunda de las relaciones (1), y en virtud de (MO_{II}) la relación $f \circ \overset{-1}{h} \in \sigma \,|\, E^*, E', \mathcal{F}^*, \mathscr{S}' \,|$, y en virtud de β) por aplicación de la condición (FI), esta última a su vez entraña la relación:

$$(\forall_\iota)\,(\iota \in I \implies (f \circ \overset{-1}{h}) \circ g_\iota^* = f \circ (\overset{-1}{h} \circ g_\iota^*) = f \circ g_\iota \in \sigma \,|\, A_\iota.\, E',\, \mathscr{S}_\iota,\, \mathscr{S}' \,|\,)$$

es decir, es un teorema en la teoría $\mathscr{E}$ la relación:

$$f \in \sigma \,|\, E,\, E',\, \mathcal{F},\, \mathscr{S}' \implies (\forall_\iota)\ (\iota \in I \implies f \circ g_\iota \in \sigma \,|\, A_\iota,\, E',\, \mathscr{S}_\iota,\, \mathscr{S}' \,|\,)$$

Inversamente, la relación: $(\forall_\iota)\,(\iota \in I \implies f \circ g_\iota \in \sigma \,|\, A_\iota, E',\, \mathscr{S}_\iota,\, \mathscr{S}' \,|\,)$ es idéntica a la relación: $(\forall_\iota)\,(\iota \in I \implies (f \circ \overset{-1}{h}) \circ g_\iota^* \in \sigma \,|\, A\iota, E',\, \mathscr{S}_\iota,\, \mathscr{S}' \,|\,)$, la cual en virtud de la hipótesis β), y mediante aplicación de la referida condición (FI) entraña la relación: $f \circ \overset{-1}{h} \in \sigma \,|\, E^*, E', \mathcal{F}^*, \mathcal{S}' \,|$ que junto con la primera de las relaciones (1) y en virtud de la condición (MO_{II}), establece la relación: $f \in \sigma \,|\, E, E', \mathcal{F}, \mathcal{S}' \,|$.

Así pués, β) entraña la relación:

$$f \in \sigma \,|\, E, E', \mathcal{F}, \mathcal{S}' \,| \iff (\forall_\iota)\,(\iota \in I \implies f \circ g_\iota \in \sigma \,|\, A_\iota, E', \mathcal{S}_\iota, \mathcal{S}' \,|),$$

que es la condición (FI) que caracteriza la estructura final sobre E para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$.

Se obtiene pués: $\beta) \implies \alpha$), que junto con el anterior resultado establecen:

$$\alpha) \iff \beta).$$

La última parte del Lema se obtiene inmediatamente, teniendo en cuenta la propiedad de unicidad de la estructura final.

De esta Lema y de la definición de estructura final sobre un conjunto E para una familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_\iota)_{\iota \in I}$, se obtiene el siguiente criterio de transitividad generalizado:

2. *CSTG.*— «Sean E, E^* dos conjuntos, h una biyección de E sobre E^*; $(A_\iota)_{\iota \in I}$ una familia de conjuntos, y para cada $\iota \in I$, sea $\mathcal{S}_\iota$ una estructura de especie Σ sobre A_ι. Sea $(J_\lambda)_{\lambda \in L}$ una partición de I, y sea $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ una familia de conjuntos teniendo L como conjunto de índices. Para todo $\lambda \in L$, sea h_λ una aplicación de B_λ en E, y pongamos $h^*_\lambda = h \circ h_\lambda$; para todo $\lambda \in L$ y todo $\iota \in J_\lambda$, sea $g_{\iota\lambda}$ una aplicación de A_ι en B_λ; se pone $f_\iota = h_\lambda \circ g_{\iota\lambda}$. Se supone que, para todo $\lambda \in L$, existe una estructura final $\mathcal{S}_\lambda'$ sobre B_λ para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, g_{\iota\lambda})_{\iota \in J_\lambda}$. En estas condiciones, las proposiciones siguientes son equivalentes:

a) existe una estructura final $\mathcal{F}$ sobre E para la familia $(A_\iota, \mathcal{S}_\iota, f_\iota)_{\iota \in I}$.

b) existe una estructura final $\mathcal{F}^*$ sobre E^* para la familia $(B_\lambda, \mathcal{S}_\lambda', h^*_\lambda)_{\lambda \in L}$.

Además, estas proposiciones entrañan que la biyección h sea un isomorfismo de E dotado de la estructura $\mathcal{F}$ sobre E^* dotado de la estructura $\mathcal{F}^*$.» (*)

En efecto, pongamos $f_\iota^* = h \circ f_\iota = h \circ (h_\lambda \circ g_{\iota\lambda}) = (h \circ h_\lambda) \circ g_{\iota\lambda} = h^*_\lambda \circ g_{\iota\lambda}$, y sea F un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}_F$ de espe-

(*) En particular, si h es la aplicación idéntica de E sobre E, resulta el criterio de transitividad CST 19 que figura en N. B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 5, [1].

cie Σ, y u una aplicación de E^* en F. Observemos que por definición de estructura final, se verifica la siguiente equivalencia:

$$u \circ h_\lambda^* \in \sigma \mid B_\lambda, F, \mathscr{S}_\lambda', \mathscr{S}_F \mid \Longleftrightarrow (\forall_\iota) (\iota \in J_\lambda \Longrightarrow (u \circ h_\lambda^*) \circ g_{\iota\lambda} =$$

$$= u \circ (h_\lambda^* \circ g_{\iota\lambda}) = u \circ f_\iota^* \in \sigma \mid A_\iota, F, \mathscr{S}_\iota, \mathscr{S}_F \mid),$$

y por tanto, teniendo en cuenta que $(J_\lambda)_{\lambda\in L}$ es una participación de I, tiene lugar la equivalencia:

$$(\forall_\lambda) (\lambda \in L \Longrightarrow u \circ h_\lambda^* \in \sigma \mid B_\lambda, F, \mathscr{S}_\lambda', \mathscr{S}_F \mid) \Longleftrightarrow (\forall_\iota) (\iota \in I \Longrightarrow u \circ f_\iota^* \in$$

$$\sigma \mid A_\iota, F, \mathscr{S}_\iota, \mathscr{S}_F \mid) \ (1)$$

Ahora bien, si $\mathcal{F}$ es una estructura final sobre E para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, en virtud del Lema preliminar, existe una estructura final $\mathcal{F}^*$ sobre E^* para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota^*)_{\iota\in I}$, y h es un isomorfismo de E dotado de la estructura $\mathcal{F}$, sobre E^* dotado de la estructura $\mathcal{F}^*$, por lo que en virtud de la condición (FI) que caracteriza a las estructuras finales, se verifica la siguiente equivalencia:

$$u \in \sigma \mid E^*, F, \mathcal{F}^*, \mathscr{S}_F \mid \Longleftrightarrow (\forall_\iota) (\iota \in I \Longrightarrow u \circ f_\iota^* \in \sigma \mid A_\iota, F, \mathscr{S}_\iota, \mathscr{S}_F \mid)$$

y por tanto teniendo en cuenta (1):

$$u \in \sigma \mid E^*, F, \mathcal{F}^*, \mathscr{S}_F \mid \Longleftrightarrow (\forall_\lambda) (\lambda \in L \Longrightarrow u \circ h_\lambda^* \in \sigma \mid B_\lambda, F, \mathscr{S}_\lambda', \mathscr{S}_F \mid)$$

es decir, la existencia de una estructura final $\mathcal{F}$ sobre E, para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, entraña que $\mathcal{F}^*$ sea una estructura final sobre E^* para la familia $(B_\lambda, \mathscr{S}_\lambda', h_\lambda^*)_{\lambda\in L}$.

Inversamente, si $\mathcal{F}^*$ es una estructura final sobre E^* para la familia $(B_\lambda, \mathscr{S}_\lambda', h_\lambda^*)_{\lambda\in L}$, se verifica en virtud de (FI) la equivalencia:

$$u \in \sigma \mid E^*, F, \mathcal{F}^*, \mathscr{S}_F \mid \Longleftrightarrow (\forall_\lambda) (\lambda \in L \Longrightarrow u \circ h_\lambda^* \in \sigma \mid B_\lambda, F, \mathscr{S}_\lambda', \mathscr{S}_F \mid)$$

y por tanto, habida cuenta de la relación (1), se verfica asimismo la equivalencia:

$$u \in \sigma \mid E^*, F, \mathcal{F}^*, \mathscr{S}_F \mid \Longleftrightarrow (\forall_\iota) (\iota \in I \Longrightarrow u \circ f_\iota^* \in \sigma \mid A_\iota, F, \mathscr{S}_\iota, \mathscr{S}_F \mid)$$

es decir, la existencia de una estructura final $\mathcal{F}^*$ sobre E^*, para la familia $(B_\lambda, \mathscr{S}_\lambda', h_\lambda^*)_{\lambda\in L}$, entraña que $\mathcal{F}^*$ sea estructura final sobre E^* para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota^*)_{\iota\in I}$, y en virtud del referido Lema, que exista sobre E una estructura final $\mathcal{F}$ para la familia $(A_\iota, \mathscr{S}_\iota, f_\iota)_{\iota\in I}$, tal que h es un isomorfismo de E dotado de la estructura $\mathcal{F}$, sobre E^* dotado de la estructura $\mathcal{F}^*$.

El criterio resulta así demostrado.

3. *Consecuencias que se derivan del Criterio de Transitividad Generalizado relativo a estructuras finales.* — Recordemos que cuando I es un conjunto reducido a un sólo elemento, la estructura final $\mathcal{F}$ sobre E para la única terna $(A, \mathcal{S}, f)$ es denominada, (si ella existe) «imagen directa mediante f de la estructura $\mathcal{S}$», y que en particular, si A es un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}$, de especie Σ, R una relación de equivalencia en A, y φ la aplicación canónica de A sobre el conjunto $E = A/R$, la estructura final sobre E, imagen directa (si ella existe) de la estructura $\mathcal{S}$, mediante la aplicación canónica φ, es designada «estructura cociente de $\mathcal{S}$ por la relación R».

Aplicando el Lema preliminar anterior se obtiene la siguiente:

Proposición I.— «Sean E y E^* dos conjuntos, y h una biyección de E sobre E^*. Sean por otra parte, A un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}$ de especie Σ, y f una aplicación de A en E. Para que exista sobre E una estructura $\mathcal{F}$ imagen directa de $\mathcal{S}$ mediante la aplicación f, es necesario y suficiente que exista sobre E^* una estructura $\mathcal{F}^*$ imagen directa de $\mathcal{S}$ mediante la aplicación $h \circ f$, y la biyección h de E (dotado $\mathcal{F}$) sobre E^* (dotado de $\mathcal{F}^*$) es un isomorfismo».

Simple aplicación del referido Lema, cuando I es un conjunto reducido a un sólo elemento, y además $(\forall_\iota)$ $(\iota \in I \Longrightarrow A_\iota = A$ y $\mathcal{S}_\iota = \mathcal{S}$ y $f_\iota = f)$.

En particular, si A es un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}$ de especie Σ, en el que hay definido una relación de equivalencia R, y φ denota la aplicación canónica de A sobre $E = A/R$, resulta la:

Proposición. II.— «Sean A un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}$ de especie Σ, en el que hay definido una relación de equivalencia R, y h una biyección de $E = A/R$ sobre un conjunto E^*. Para que exista estructura $\mathcal{F}$ cociente de $\mathcal{S}$ por la relación de equivalencia R, es necesario y suficiente, (designando por φ la aplicación canónica de A sobre A/R), que exista sobre E^* una estructura $\mathcal{F}^*$, imagen directa de $\mathcal{S}$ mediante la aplicación $h \circ \varphi$, y $E = A/R$ dotado de $\mathcal{F}$ es isomorfo a E^* dotado de $\mathcal{F}^*$».

El criterio de transitividad generalizado $CSTG$ relativo a estructuras finales, permite demostrar sin dificultad el criterio siguiente que figura en N. B., Livre I, Chap. IV, § 2, n.º 6, [1]:

Proposición III.— «Sean A un conjunto dotado de una estructura $\mathcal{S}$ de especie Σ, R una relación de equivalencia en A, tal que exista sobre A/R una estructura cociente $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ por R. Sea S una relación de equivalencia en A, menos fina que R, (N. B., Livre I, Chap. II, § 6, n.º 7, [2]) y sea S/R, la relación de equivalencia en A/R, cociente de S por R (véase ref. citada). Para que exista sobre $(A/R)/(S/R)$ una estructura cociente $\mathcal{S}''$ de $\mathcal{S}'$ por S/R, es necesario y suficiente que exista sobre A/S una estructura cociente $\mathcal{S}_0''$ de $\mathcal{S}$ por S, y la aplicación canónica de A/S (dotado de $\mathcal{S}_0''$), sobre $(A/R)/(S/R)$ (dotado de $\mathcal{S}''$) es un isomorfismo».

En efecto, sean φ y ψ respectivamente, las aplicaciones canónicas de A sobre A/R y de A sobre A/S; sea $\tilde{h}$ la función deducida de ψ por paso al cociente según R (N. B., Livre I, Chap. II, § 6, n.º 5, [2]). Sea $\tilde{h} = h_2 \, o \, \chi$, la descomposición canónica de $\tilde{h}$, en la que χ es la aplicación canónica de A/R sobre $(A/R)/(S/R)$, h_2 una aplicación biyectiva de $(A/R)/(S/R)$ sobre A/S (N. B., Livre I, Chap. II, § 6, n.º 5, [2]):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[dr, "\psi=\tilde{h}\circ\varphi"] & \\ A/R \arrow[u, shift right, "s"'] \arrow[r, "\tilde{h}"'] & A/S=\tilde{h}(A/R)=(\tilde{h}\circ\varphi)(A) \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} A/R \arrow[d, "\chi"'] \arrow[dr, "\tilde{h}=h_2\circ\chi"] & \\ (A/R)(S/R) \arrow[r, "h_2"'] & A/S=\tilde{h}_2(A/R)=h((A/R)(S/R)) \end{tikzcd}$$

Apliquemos $CSTG$, suponiendo que I es un conjunto reducido a un sólo elemento; L será por tanto, asimismo un conjunto de un sólo elemento, y además evidentemente: $(\forall_\lambda)\,(\lambda \in L \Rightarrow J_\lambda = I)$. Tomemos: $E = (A/R)/(S/R)$, $E^* = A/S$, y supongamos: $(\forall_\iota)\,(\iota \in I \Rightarrow A_\iota = A/R$ y $\mathcal{S}_\iota = \mathcal{S}')$, y $(\forall_\lambda)\,(\lambda \in L \Rightarrow B_\lambda = A$ y $\mathcal{S}_\lambda' = \mathcal{S})$, y que la biyección h considerada en $CSTG$ sea la aplicación biyectiva h_2. Por otra parte, supondremos que el único elemento de la familia $(h_\lambda)_{\lambda \in L}$ es la aplicación $\chi \, o \, \varphi$, con lo que:

$$(\forall_\lambda)\,(\lambda \in L \Rightarrow h_\lambda{}^* = h \, o \, h_\lambda = h_2 \, o \, (\chi \, o \, \varphi) = (h_2 \, o \, \chi) \, o \, \varphi = \tilde{h} \, o \, \varphi = \Psi)$$

Finalmente, supondremos que el único elemento de la familia $(g_{\iota\lambda})_{(\iota,\lambda) \in I \times L}$ es una sección s asociada a la aplicación canónica φ de A

sobre A/R (N. B., Livre I, Chap. II, § 3, n.º 8 y § 6, n.º 2, [2]); evidentemente:

$$(\forall_\iota)\,(\iota \in I \Longrightarrow f_\iota = h_\lambda \circ g_{\iota\lambda} = (\varkappa \circ \varphi) \circ s = \chi \circ (\varphi \circ s) = \chi \circ I_{A/R} = \chi)$$

Resulta así, por aplicación del referido criterio, la equivalencia de las proposiciones siguientes:

α) existe una estructura final $\mathcal{S}''$ sobre $(A/R)/(S/R)$ para la terna $(A/R, \mathcal{S}', \chi)$, es decir, existe una estructura cociente de $\mathcal{S}'$ por S/R.

β) existe una estructura final $\mathcal{S}_0'$ sobre A/S para la terna $(A, \mathcal{S}', \psi)$, es decir, existe una estructura cociente de $\mathcal{S}$ por S.

Además, estas proposiciones entrañan que h_2 sea un isomorfismo de $(A/R)/(S/R)$ dotado de $\mathcal{S}''$ sobre A/S dotado de $\mathcal{S}_0'$.
Resulta así demostrado el criterio.

SEMINARIO MATEMATICO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

[1] N. Bourbaki.— «*Théorie des ensembles*», Chap. IV, Hermann & Cie., Editeurs. Paris (1958).

[2] N. Bourbaki.— «*Théorie des ensembles*», Chap. I y II, Hermann & Cie., Editeurs. Paris (1960).