SUR LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE-BOREL

par

AIMÉE BAILLETTE

F. SUNYER BALAGUER a démontré un lemme ([1], p. 93) sur les transformées de LAPLACE-BOREL des produits

$$\Lambda_m(z) = \prod_{n=m}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda^2_n}\right) \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

(λ_n) étant une suite croissante mesurable de nombres positifs.

F. SUNYER BALAGUER a posé la question (1) de savoir si ce lemme peut s'étendre aux suites (λ_n) non mesurables. La réponse est affirmative. En apportant quelques modifications à la démonstration faite dans [1], nous obtenons la proposition suivante:

PROPOSITION: Soit (λ_n) une suite croissante de nombres positifs, de densité supérieure finie

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n} = D^0 < \infty.$$

Posons

$$\Lambda_m(z) = \prod_{n=m}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{\lambda^2_n}\right) \qquad m = 1, 2, \ldots,$$

$$h(\alpha) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \log |\Lambda_1(re^{i\alpha})|,$$

et désignons par $\Phi_m(s)$ la transformée de LAPLACE-BOREL de $\Lambda_m(z)$. Soit K_ε, $\varepsilon > 0$, l'ensemble des points $s = \sigma + it$ qui satisfont quel que soit α

$$\sigma \cos \alpha - t \sin \alpha \leq h(\alpha) + \varepsilon.$$

---

(1) Ce problème m'a été communiqué oralement par F. SUNYER BALAGUER.

A l'extérieur de K_ε, on a, uniformément

$$\lim_{m\to\infty} \Phi_m(s) = \frac{1}{s}.$$

DÉMONSTRATION: Posons $z = re^{i\alpha}$.

1°) Soit $\frac{\pi}{4} \leq |\alpha| \leq \frac{3\pi}{4}$. On a, quel que soit n

$$\left| 1 - \frac{z^2}{\lambda^2_n} \right| \geq 1 ;$$

donc

$$\left| \Lambda_m(z) \right| = \left| \Lambda_1(z) \right| \prod_{n=1}^{m-1} \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda^2_n} \right|^{-1} \leq \left| \Lambda_1(z) \right|$$

2°) Soit $0 \leq |\alpha| < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{3\pi}{4} < |\alpha| \leq \pi$; on a

$$\left| 1 - \frac{z^2}{\lambda^2_n} \right|^2 = \frac{r^4}{\lambda^4_n} - 2\frac{r^2}{\lambda^2_n} \cos 2\alpha + 1 ;$$

donc

a) si $r^2 \leq 2\lambda^2_m \cos 2\alpha$, on a, pour $n \geq m$

$$\left| 1 - \frac{z^2}{\lambda^2_n} \right| \leq 1,$$

et

$$\left| \Lambda_m(z) \right| \leq 1 ;$$

b) Si $r^2 > 2\lambda^2_m \cos 2\alpha$, on a, pour $n \leq m - 1$

$$\left| 1 - \frac{z^2}{\lambda^2_n} \right| > 1,$$

et

$$\left| \Lambda_m(z) \right| = \left| \Lambda_1(z) \right| \prod_{n=1}^{m-1} \left| 1 - \frac{z^2}{\lambda^2_n} \right|^{-1} \leq \left| \Lambda_1(z) \right| ;$$

On a donc dans tous les cas

$$\left| A_m(z) \right| \leq \left| A_1(z) \right| + 1 .$$

Soit $s = \sigma + it$ un point du demi-plan Δ_α:

$$\sigma \cos \alpha - t \sin \alpha \geq h(\alpha) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

$$\Phi_m(s) - \frac{1}{s} = \int_0^\infty (A_m(re^{i\alpha}) - 1)\, e^{-sre^{i\alpha}} e^{i\alpha}\, dr ;$$

$$\left| \Phi_m(s) - \frac{1}{s} \right| \leq \int_0^R \left| A_m(re^{i\alpha}) - 1 \right| dr + \int_R^\infty (|A_1(re^{i\alpha})| + 2) \left| e^{-sre^{i\alpha}} \right| dr .$$

Pour R suffisamment grand on a

$$\left| \Phi_m(s) - \frac{1}{s} \right| < \int_0^R \left| A_m(re^{i\alpha}) - 1 \right| dr + \int_R^\infty e^{-r\varepsilon/4}\, dr .$$

La suite $A_m(re^{i\alpha})$ converge uniformément vers 1 pour $0 \leq r \leq R$; la suite $\Phi_m(s)$ converge donc uniformément vers $\frac{1}{s}$ dans le demi-plan Δ_α. La proposition résulte alors du fait que l'on peut recouvrir la région extérieure à K_ε par un nombre fini de demi-plans Δ_α.

BIBLIOGRAPHIE

[1] SUNYER BALAGUER, F. «*Aproximación de funciones holomorfas en una semifaja por sumas de exponenciales*». (Collectanea Math. Vol. XV 1963 p. 91-103).