

# RELATIVITÀ CINEMATICA E COSMOLOGIA « PROIETTIVA »

Memoria di

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

## 1. — TEORIE EVOLUZIONARIE E STAZIONARIE

E' noto che nella cosmologia vi sono due principali tipi di teorie, e cioè quelle evoluzionarie e quelle stazionarie. Secondo le teorie « evoluzionarie » (LEMAÎTRE, GAMOW...), l'Universo ha avuto origine a partire da uno stato iniziale iperdenso, e si espanderà indefinitamente (modello iperbolico), oppure si espanderà sino ad un certo valore del raggio, e poi si contrarrà di nuovo, e così via (modello pulsante). Le teorie « stazionarie » (BONDI, GOLD, HOYLE...), sostengono invece che l'Universo é sempre stato e rimarrà in uno stato di equilibrio stazionario. Perché ciò avvenga, nonostante l'espansione, occorre che si abbia una « creazione continua » di nuova materia dal nulla, e solo così viene soddisfatto il « principio cosmologico perfetto » di BONDI e GOLD. (1)

Tra queste due teorie tra loro irriducibili, può porsi la « relatività cinematica di MILNE, nella quale si introduce la nuova idea che l'Universo é descrivibile in due modi tra loro opposti, ma equivalenti, adoperando una « doppia scala » dei tempi (2). Inoltre occorre distinguere lo « spazio privato » euclideo, nel quale ogni osservatore fa la mappa degli eventi che osserva, e lo « spazio pubblico » iperbolico. Il MILNE infatti riteneva che la relatività generale fosse estranea alla grande tradizione della fisica-matematica, mentre la relatività cinematica era in grado di portare avanti il programma suggerito dal successo della relatività ristretta.

La teoria di MILNE, se a prima vista può sembrare suggestiva, perché potrebbe farci superare il dilemma posto dalle teorie evoluzionarie e stazionarie, ad un esame più approfondito rivela gravi difficoltà sia dal punto di vista fisico che matematico. Infatti la introduzione della doppia scala dei tempi introduce una certa arbi-

trarietà in tutta la teoria, la quale del resto non conserva affatto la eleganza e la semplicità matematica della relatività ristretta. Essa inoltre, pur volendo perfezionare la relatività, si basa ancora sul gruppo di LORENTZ, e per tale motivo EINSTEIN riteneva che la teoria di MILNE avesse una base teorica troppo limitata.

In questo lavoro faremo vedere che la nuova « relatività finale » proposta dal FANTAPPIÉ nel 1954 <sup>(3)</sup> ci permette di costruire nel modo più semplice una nuova « cosmologia proiettiva », nella quale si ritrovano entro uno schema logico coerente ed unitario i principali risultati delle teorie evoluzionarie e stazionarie e della relatività cinematica. La nuova teoria conserva inoltre il formalismo matematico della relatività ristretta, alla quale del resto si riduce non appena il raggio del cronotopo tende all'infinito.

## 2. — LA « RELATIVITÀ CINEMATICA » DI MILNE.

Nella relatività cinematica si suppone la validità di un « principio cosmologico », in base al quale l'Universo dovrà apparire allo stesso modo da qualsiasi punto dello spazio lo si osservi. Inoltre si ammette che ad ogni osservatore le galassie appaiono dotate di una velocità di fuga radiale e proporzionale alla distanza. Riferendoci per semplicità al caso bidimensionale  $(x, t)$  la legge velocità-distanza è la seguente

$$(2,1) \quad V = x/t$$

Questo sistema di galassie in espansione viene chiamato dal MILNE « substrato » e ad ogni osservatore le galassie appaiono addensarsi entro una sfera di raggio  $r = ct$ , che si espande alla velocità della luce. Al limite di questa sfera la densità di materia risulta infinita ed è questa la contropartita della discontinuità dovuta alla creazione.

Tutto questo accade se adoperiamo la scala del *tempo cinematico*  $(t)$ . Se invece adoperiamo il *tempo dinamico*  $\tau$  (o tempo Newtoniano), le galassie non sono in recessione, e l'Universo non ha avuto una origine nel tempo.

Il legame tra le due scale è dato dalla semplice relazione

$$(2,2) \quad \tau = t_0 + t_0 \log t/t_0$$

in cui la costante  $t_0$  è l'epoca nella quale le due scale coincidono: per  $t = t_0$  si ha infatti  $\tau = t_0$ . In tal modo lo zero del tempo  $t = 0$  diventa inaccessibile sulla scala  $\tau$ .

Nella teoria del MILNE la massa di un corpo varia non soltanto con la sua velocità, ma anche con la distanza spazio-temporale dall'osservatore 0, che sta nel suo spazio euclideo privato. Nel caso bidimensionale  $(x, t)$ , tale legge è la seguente (4).

$$(2,3) \quad m = m_0 \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{(1 - V^2/c^2)(t^2 - x^2/c^2)}}$$

Per  $x = V = 0$  si ottiene la massa della particella fondamentale posta nella origine, e cioè  $m = m_0$ . Se invece consideriamo una particella fondamentale, posta nel punto  $(x, t)$ , essa è dotata di una velocità radiale  $V = x/t$ , e sostituendo tale valore nella (2,3), otteniamo ancora  $m = m_0$ , cioè *le masse di tutte le particelle fondamentali sono uguali*, perché non dipendono dalla velocità di fuga.

Se poi sviluppiamo in serie la (2,3), avremo

$$(2,4) \quad E = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 \left( V - \frac{x}{t} \right)^2 + \dots$$

la quale mostra che l'energia cinetica di un corpo è associata all'eccesso di velocità  $V$  rispetto alla velocità  $x/t$  nelle immediate vicinanze del substrato.

### 3 — IL GRUPPO PROIETTIVO DI FANTAPPIÉ

È noto che la relatività ristretta risulta caso-limite per  $r$  tendente all'infinito, di una nuova teoria, la «relatività finale», basata sul gruppo di FANTAPPIÉ, la quale è stata da me sviluppata adoperando la tecnica della geometria proiettiva (5). Infatti un Universo a curvatura costante dovrà apparire ai suoi osservatori come se fosse piatto, e quindi occorre fare la importante distinzione tra il «cronotopo assoluto» ( $V_4$  di DE SITTER a curvatura costante e di raggio  $r$ ), e gli infiniti «cronotopi relativi» (spazi  $S_4$  euclidei tangenti) nei quali ogni osservatore localizza e vede svolgersi gli eventi fisici. Lo spazio relativo ad un dato osservatore non è altro — come sappiamo — che la *rappresentazione geodetica* del cronotopo di DE SITTER, nel quale alle geodetiche di  $V_4$  corrispondono le rette di  $S_4$ . Gli spazi relativi sono tra loro legati dalle trasformazioni del gruppo di FANTAPPIÉ, a partire dal quale si può costruire una nuova cosmologia proiettiva.

Il calcolo esplicito delle trasformazioni del gruppo di FANTAPPIÉ è stato da me fatto in un precedente lavoro del 1956 (6). Se ci limi-

tiamo per maggiore semplicità al caso bidimensionale, e cioè con le due sole variabili  $(x, t)$ , le trasformazioni del gruppo di FANTAPPPIÉ sono essenzialmente di tre tipi :

a) *Trascinamenti con velocità  $V$*  — Tali trasformazioni

$$(3,1) \quad x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t' = \frac{t - \beta \frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

nelle quali  $\beta = V/c$ , coincidono formalmente con quelle di LORENTZ, ma ne differiscono perché adesso le coordinate  $(x, t)$  sono riferite allo spazio-tempo relativo ad un dato osservatore, cioè allo spazio tangente, con l'origine nel punto di tangenza.

b) *Traslazioni spaziali di un segmento  $T$*  :

$$(3,2) \quad x' = \frac{x + T}{1 - \alpha \frac{x}{r}}; \quad t' = \frac{t \sqrt{1 + \alpha^2}}{1 - \alpha \frac{x}{r}}$$

dove  $r$  è il raggio del cronotopo, ed  $\alpha = T/r$  è la traslazione misurata rispetto a tale raggio.

c) *Traslazioni temporali di un intervallo di tempo  $T_0$*  :

$$(3,3) \quad x' = \frac{x \sqrt{1 - \gamma^2}}{1 + \gamma \frac{t}{t_0}}; \quad t' = \frac{t + T_0}{1 + \gamma \frac{t}{t_0}}$$

dove  $t_0 = r/c$  è il tempo che la luce impiega a percorrere il raggio del cronotopo, e  $\gamma = c T_0/r = T_0/t_0$  è la traslazione misurata rispetto a  $t_0$ .

Le tre precedenti trasformazioni possono essere sintetizzate nella seguente, dove figurano simultaneamente i tre parametri  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  :

(3,4)

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2} + [\beta + \gamma(\alpha - \beta\gamma)] ct + T \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}}{\frac{x}{r} (\beta\gamma - \alpha) \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2} - (\alpha\beta - \gamma) \frac{ct}{r} + \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}} \\ t' &= \frac{\frac{\beta}{c} x \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2} + [1 + \alpha(\alpha - \beta\gamma)] t + T_0 \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}}{\frac{x}{r} (\beta\gamma - \alpha) \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2} - (\alpha\beta - \gamma) \frac{ct}{r} + \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}} \end{aligned}$$

e tale trasformazione risulta degenerare per  $\alpha = \beta = \gamma = 1$ , cioè per

$$V = c; \quad T = r; \quad T_0 = r/c = t_0$$

come si verifica facilmente.

4 — L'ETÀ DELL'UNIVERSO COME « DURATA LIMITE »

Una delle questioni più discusse in cosmologia é quella sul preciso significato da attribuire alla « età dell'Universo ». Alcuni, come HOYLE, affermano che pur potendosi parlare di età di una stella o di una galassia, in senso ordinario, questo non significa affatto che anche l'universo abbia una età finita. Anche il MILNE sosteneva che per ogni osservatore l'universo ha una età ben definita, ma non ha senso parlare di età dell'universo nella sua totalità.

Vediamo adesso come si presenta la questione nella nostra « cosmologia proiettiva ». E' noto che la relatività ristretta supera le gravi difficoltà dell'etere mediante la cosiddetta « legge di addizione delle velocità », in base alla quale la velocità  $c$  della luce ha una importanza tutta particolare, perché risulta irraggiungibile, e quindi, pur essendo finita, si comporta come se fosse infinita.

In modo perfettamente analogo, nella cosmologia proiettiva si introduce la nuova idea che *l'età dell'universo, pur essendo finita si comporta come se fosse infinita*, e cioè risulta una « durata limite » non superabile. Ed infatti sappiamo che dalla seconda delle (3,3) si trae una « legge di addizione delle durate »

$$(4,1) \quad \boxed{t = \frac{t_1 + t_2}{1 + t_1 t_2 / t_0^2}} \quad \text{con } t_0 = r/c$$

dalla quale si vede che per  $t_1 = t_0$ , si ha ancora  $t = t_0$ .

Si arriva così alla interessante conclusione che *l'età dell'universo é una « costante universale », il cui valore non aumenta al passare del tempo*: l'osservatore 0 si trova così sempre a distanza  $t_0$  dall'origine e dalla fine dell'universo. Ed infatti dalla prima delle (3,3) segue che per  $t = \pm t_0$  (cioé per  $\gamma = \pm 1$ )  $x' = 0$  qualunque sia  $x$ , e cioè l'universo ha avuto origine a partire da un punto  $t_0$  anni fa, e tra  $t_0$  anni si ridurrà di nuovo ad un punto.

Si vede allora che il « principio cosmologico » di DIRAC, in base

al quale c'è un profondo legame tra le costanti universali della microfisica e della cosmologia, tramite l'età dell'universo espressa in unità atomiche, non implica affatto una variazione delle costanti universali al passare del tempo, e questo perché *anche l'età dell'universo è una costante universale.*

Vediamo adesso come si comporta la velocità  $c$  della luce rispetto ai trascinamenti, alle traslazioni spaziali ed a quelle temporali. A questo scopo osserviamo che dalla (3,4) si trae la seguente legge che generalizza quella di addizione delle velocità (6).

$$(4,2) \quad W = \frac{(1 + \alpha^2) V_1 + (1 - \gamma^2) V_2 - \alpha \gamma c (1 - V_1 V_2/c^2)}{(1 + V_1 V_2/c^2) \sqrt{1 + \alpha^2 - \gamma^2}}$$

Sappiamo che per i punti che stanno sul cono-luce (e cioè che vediamo) si ha  $\alpha = \pm \gamma$  cioè  $T = \pm cT_0$  e quindi la (4,2) si riduce alla

$$(4,3) \quad W = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2/c^2} + \alpha^2 \frac{(V_1 - V_2) - c(1 - V_1 V_2/c^2)}{1 + V_1 V_2/c^2}$$

e si ha ancora  $W = c$  quando  $V_1 = c$  e  $V_2 \neq c$ , come nella relatività ristretta. Per un semplice trascinamento oppure per una traslazione spaziale o temporale avremo rispettivamente

$$(4,4) \quad W = \frac{V_1 + V_2}{1 + V_1 V_2/c^2}; \quad W = V_1 \sqrt{1 + \alpha^2}; \quad W = \frac{V_1}{\sqrt{1 - \gamma^2}}$$

e quindi, se  $V_1 = c$ , si otterrà nei tre casi esaminati

$$(4,5) \quad W = c; \quad W = c \sqrt{1 + \alpha^2} \geq c; \quad W = \frac{c}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \geq c$$

*Nella relatività finale quindi la velocità della luce è una velocità limite solo rispetto ai trascinamenti, oppure se consideriamo punti posti sul cono luce; negli altri casi la velocità  $c$  può essere superata (9).*

Una cosa analoga accade per la durata  $t_0 = r/c$ , la quale risulta una « durata limite » solo per le traslazioni temporali, ma può essere superata se ci riferiamo ai trascinamenti ed alle traslazioni spaziali. Dalle (3,1), (3,2) e (3,3) si ha infatti, per  $x = 0$

$$(4,6) \quad t' = \frac{t}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad t' = t \sqrt{1 + \alpha^2}; \quad t' = \frac{t + T_0}{1 + t T_0/t_0^2}$$

da cui segue, per  $t = t_0$

$$(4,7) \quad t' = \frac{t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq t_0; \quad t' = t_0 \sqrt{1+\alpha^2} \geq t_0; \quad t' = t_0$$

cioè solo nel terzo caso  $t_0$  risulta una durata limite.

#### 5 — LA « DOPPIA SCALA » DEI TEMPI

Abbiamo visto che la curvatura dello spazio e del tempo, vengono tradotte nello  $S_4$  tangente in una serie di deformazioni delle distanze e delle durate. Nasce così nel modo più naturale una « doppia scala » sia spaziale che temporale a seconda che effettuiamo le misure sul cronotopo assoluto o su quello relativo.

Il cronotopo relativo ad un dato osservatore 0 non è altro che il « modello di KLEIN » della geometria non euclidea, nel quale i movimenti in sé del cronotopo di DE SITTER vengono rappresentati dalle proiettività che mutano in sé l'assoluto di CAYLEY-KLEIN, che nel caso bidimensionale ha per equazione  $r^2 + x^2 - c^2t^2 = 0$ , cioè in forma adimensionale

$$(5,1) \quad 1 + \alpha^2 - \gamma^2 = 0$$

L'invariante proiettivo della geometria non euclidea, e cioè la « distanza iperbolica » tra due punti non è altro che il logaritmo del birapporto. Se la distanza è di tipo temporale, essa è data da

$$(5,2) \quad \tau = \frac{t_0}{2} \log \frac{t_0 + t}{t_0 - t}$$

e ci fornisce il legame tra le due scale « assoluta » ( $\tau$ ) e « relativa » ( $t$ ) del tempo.

Per confrontare questa formula con quella (2,2) della teoria di MILNE, è necessario tener presente che nella relatività finale il tempo si misura a partire dal punto dello spazio-tempo in cui si trova l'osservatore, e quindi dal presente (perché l'osservatore sta sempre al centro dello spazio tangente). Nella relatività cinematica invece il tempo viene misurato a partire dall'istante della creazione. Occorre quindi fare nella (2,2) la seguente sostituzione  $\tau \rightarrow \tau + t_0$  ed inoltre  $t \rightarrow t + t_0$ . La formula di MILNE diventa allora simile alla (5,2)

$$(5,3) \quad \tau_0 = t_0 \log \frac{t_0 + t}{t_0}$$

Nella relatività cinematica, al variare del tempo  $\tau$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ , il tempo  $t$  varia da  $-t_0$  (istante iniziale) a  $+\infty$ . Nella cosmologia proiettiva invece, al variare di  $\tau$  da  $-\infty$  a  $+\infty$ , il tempo  $t$  varia da  $-t_0$  (istante iniziale) a  $+t_0$  (istante finale).

Inoltre bisogna tener presente che nella teoria di MILNE vale il principio cosmologico, e quindi le due scale del tempo sono in coincidenza solo all'epoca attuale, ma non lo erano nel passato e non lo saranno nel futuro. Nella relatività finale vale invece il principio cosmologico perfetto, e quindi le due scale coincidono sempre nel punto in cui sta l'osservatore: al passare del tempo esso si porta con sé il cronotopo « relativo » e quindi rimane sempre al centro dello spazio tangente, e cioè nel punto di tangenza.

#### 6 — LA LEGGE VELOCITÀ-DISTANZA E LA ESPANSIONE DELL'UNIVERSO

Abbiamo fatto vedere in precedenti lavori (6), (7) che dalla seconda delle (3,3) si ricava la seguente relazione velocità-distanza

$$(6,1) \quad V = \frac{c}{r} \frac{x}{1 + ct/r} = H(t) x$$

dove si è indicato con  $H(t)$  il *parametro di HUBBLE*. E siccome  $H(t) = \frac{\dot{R}}{R}$ , ne segue che nella nostra cosmologia proiettiva la funzione  $R(t)$  è data dalla seguente espressione

$$(6,2) \quad R(t) = 1 + \frac{ct}{r} = 1 + \gamma$$

da cui segue che il « parametro di decelerazione » è nullo

$$(6,3) \quad q = -\ddot{R}/RH^2 = 0$$

Se ci riferiamo poi allo spazio di contemporaneità dell'osservatore, nel quale  $t = 0$ , si vede che in esso vale una legge rigorosamente lineare

$$(6,4) \quad \boxed{V = \frac{c}{r} x}$$

e quindi *nella relatività finale la costante di HUBBLE è data da  $c/r$ , che è l'inverso della età dell'universo  $t_0$ .*



La (6,1) acquista un aspetto più interessante, se introduciamo in essa l'età dell'universo  $t_0 = r/c$

$$(6,5) \quad \boxed{V = \frac{x}{t_0 + t}}$$

essa viene a coincidere con la (2,1) di MILNE, cioè  $V = x/t$  se si fa la solita sostituzione  $t_0 + t \rightarrow t$  per tener conto del diverso modo con cui viene computato il tempo nelle due teorie.

Se poi introduciamo i tre numeri adimensionali

$$(6,6) \quad \alpha = x/r; \quad \beta = v/c; \quad \gamma = ct/r = t/t_0$$

la (6,1) acquista un aspetto ancora più semplice

$$(6,7) \quad \boxed{\beta = \frac{\alpha}{1 + \gamma}}$$

e ci fornisce un legame tra i tre parametri  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ . Se invece ci riferiamo allo spazio di contemporaneità, la (6,4) si può scrivere così

$$(6,8) \quad \beta = \alpha$$

Possiamo quindi concludere che nella scala  $t$  (e cioè nello spazio tempo  $S_4$  tangente) l'universo ci appare in espansione, ed il parametro di HUBBLE  $H(t) = (t_0 + t)^{-1}$  aumenta man mano che ci avviciniamo all'epoca iniziale, diventando infinito per  $t = -t_0$ : a tale epoca l'universo era ridotto ad un punto, mentre all'epoca  $+t_0$  si ridurrà di nuovo ad un punto. Se invece ci poniamo nella scala assoluta  $\tau$ , il tempo scorre tra  $-\infty$  e  $+\infty$ , (perché l'osservatore rimane al centro del suo spazio tangente), e quindi l'universo gli appare sempre allo stesso modo <sup>(10)</sup>.

#### 7 — IL «TEMPO PROPRIO» E LA VARIAZIONE DELLA MASSA

Per ottenere la formula che generalizza quella del «tempo proprio»

$$(7,1) \quad dt = dt' \sqrt{1 - \beta^2}$$

della relatività ristretta, scriviamo la seconda delle (3,4) per  $x = 0$

$$(7,2) \quad t' = \frac{[1 + \alpha(\alpha - \beta\gamma)]t + T_0 \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}}{(\gamma - \alpha\beta) \frac{ct}{r} + \sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}}$$

differenziamo i due membri e poi poniamo  $t = 0$ . Semplificando e ricordando che  $cT_0/r = \gamma$ , avremo

$$dt' = \frac{1 + \alpha^2 - \alpha\beta\gamma - \gamma^2 + \alpha\beta\gamma}{\sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}} dt$$

e quindi, in definitiva

$$(7,3) \quad \boxed{dt = dt' \frac{\sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}}{1 + \alpha^2 - \gamma^2}}$$

la quale, per  $r$  tendente all'infinito, si riduce a quella della relatività ristretta (7.1).

Dalla (7,3) si trae la nuova legge di variazione della massa di un corpo con la sua velocità e con la sua distanza dall'osservatore 0 (posto al centro dello spazio tangente). A questo scopo teniamo presente che nella relatività ristretta la quantità di moto di un corpo di massa  $m$  e dotato di velocità  $V_i$ , viene così definita

$$(7,4) \quad p_i = m_0 \frac{dx_i}{d\tau} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{dx_i}{dt} = m V_i$$

dove  $d\tau$  è il « tempo proprio », e si è posto

$$(7,5) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

In modo del tutto analogo, ricaviamo dalla (7,3) la legge di variazione della massa, valida nella cosmologia proiettiva

$$(7,6) \quad \boxed{m = m_0 \frac{1 + \alpha^2 - \gamma^2}{\sqrt{1 - \beta^2 + (\alpha - \beta\gamma)^2}}}$$

la quale è dello stesso tipo di quella (2,3) di MILNE, nel senso che anche qui la massa di un corpo varia non solo con la sua velocità, ma anche con la sua distanza spazio-temporale dall'osservatore.

Se teniamo presente che nel caso di una galassia lontana, la sua velocità è praticamente quella radiale di fuga, data dalla (6,7), si avrà  $\alpha - \beta\gamma = \beta$  e quindi la (7,6) si riduce alla

$$(7,7) \quad m = m_0(1 + \alpha^2 - \gamma^2)$$

Possiamo quindi dire che sui punti dell'assoluto, di equazione (5,1), la massa del corpo si annulla. In effetti noi vediamo le galassie non solo lontane nello spazio, ma anche nel tempo, e quindi si avrà pure  $\alpha = \pm \gamma$ . La (7,7) diventa allora

$$(7,8) \quad m = m_0$$

come nella teoria di MILNE. *Le galassie si allontanano da noi con una velocità che compensa esattamente la variazione di massa per effetto della loro distanza spazio-temporale.* La velocità di fuga delle galassie che osserviamo, non produce quindi alcuna variazione della loro massa.

Per ottenere la legge di variazione della massa col tempo (nella scala  $t$ ), poniamo nella (7,6)  $\alpha = \beta = 0$ , ed otteniamo

$$(7,9) \quad \boxed{m = m_0(1 - \gamma^2)}$$

da cui segue che se ci spostiamo nel tempo di  $\pm t_0$  la massa del corpo si annulla. La massa dell'universo varia quindi col tempo, ed inizialmente era nulla, se ci riferiamo alla scala  $t$ . Sulla scala  $\tau$  non si avrà invece alcuna variazione della massa.

Un risultato particolarmente interessante otteniamo se ci poniamo sullo spazio di contemporaneità. In tal caso si ha  $\gamma = 0$ , e per la (6,8)  $\beta = \alpha$ . La (7,6) ci dà allora la seguente legge di variazione della massa con la distanza spaziale:

$$(7,10) \quad \boxed{m = m_0(1 + \alpha^2)}$$

e cioè la massa aumenta con la distanza dall'osservatore 0.

Se infine il moto del corpo che consideriamo è rettilineo ed uni-

forme, si avrà  $T = VT_0$  (se inizialmente sta nella origine) e quindi  $\alpha = \beta\gamma$ . Otteniamo così la formula

$$(7,11) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = m_0 \gamma^2 \sqrt{1 - \beta^2}$$

cioé, nella scala  $t$ , la massa diminuisce al crescere del tempo.

#### 8 — MASSA, ENERGIA, MOMENTO DI INERZIA

Nella relatività ristretta, sviluppando in serie la (7,5), abbiamo

$$(8,1) \quad m = m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} + \dots \right)$$

cioé, indicando con  $T = 1/2 m_0 v^2$  l'energia cinetica del corpo

$$(8,2) \quad m = m_0 + T/c^2$$

e moltiplicando per  $c^2$  i due membri

$$(8,3) \quad E = mc^2 = m_0 c^2 + T$$

da cui segue che se la velocità del corpo é nulla, la sua energia non é nulla (come accadeva nella fisica classica), ma esso possiede una energia intrinseca, data da

(8,4)

$E = m_0 c^2$
---------------

che é la celebre relazione di equivalenza di EINSTEIN <sup>(11)</sup>. Ogni massa equivale quindi ad una energia, e viceversa ogni energia equivale ad una massa, sia pure piccolissima ( $m_0 = E/c^2$ ).

Vediamo adesso cosa accade nella relatività finale. : dalla (7,10) si ricava una relazione analoga alla (8,2)

$$(8,5) \quad m = m_0 + I/r^2$$

dove si é indicato con  $I = m_0 x^2$  il momento di inerzia polare del punto di massa  $m$ , rispetto all'osservatore 0 (che sta al centro dello spazio tangente). Moltiplicando i due membri della (8,5) per  $r^2$ , avremo

$$(8,6) \quad J = mr^2 = m_0 r^2 + I$$

e se il punto materiale sta nella origine 0 (e quindi  $x = 0$ ), il suo momento polare di inerzia non é nullo (come accadeva nella fisica classica), ma esiste un momento di inerzia «intrinseco» dato da

(8,7)

$$J = m_0 r^2$$

Nella relatività finale si avrebbe allora una equivalenza (tramite il raggio  $r$  del cronotopo) tra la massa  $m_0$  di un corpo ed il suo momento di inerzia polare.

Questo legame tra massa e raggio del cronotopo conferma nel modo più semplice la validità del principio di MACH, in base al quale le proprietà inerziali della materia sono strettamente connesse alla struttura dell'universo su scala cosmologica.

## 9 — MECCANICA E COSMOLOGIA

È noto che nella meccanica classica la massa  $m_0$  di un corpo ci indica la sua *inerzia alla traslazione*, e se il corpo possiede la velocità  $v$ , ad esso compete la energia cinetica  $T = \frac{1}{2} m_0 v^2$ . Se invece si studiano fenomeni nei quali intervengono moti rotatori, occorre considerare il *momento di inerzia* assiale del corpo, che ci dà la sua *inerzia alla rotazione*.

È poiché ogni spostamento rigido nello spazio é sempre scomponibile in una rotazione ed in una traslazione, il moto del corpo é governato dalle «equazioni cardinali della dinamica», le quali riflettono questo duplice aspetto traslatorio e rotatorio del moto

$$(9,1) \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{R}; \quad \frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{M}$$

dove si sono indicati con  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{K}$  rispettivamente il risultante e il momento risultante delle quantità di moto del solido rispetto ad un punto fisso, e con  $\mathbf{R}$  ed  $\mathbf{M}$  il risultante ed il momento risultante, rispetto al medesimo centro, di tutte e sole le forze esterne agenti sul solido.

Passando alla relatività ristretta appare, tramite la costante universale  $c$ , un profondo legame tra le misure spaziali e temporali, e

quindi tra la massa e l'energia del corpo. Viene in tal modo unificato il duplice aspetto materiale ed energetico della meccanica, ed i due teoremi, delle quantità di moto e delle forze vive

$$(9,2) \quad \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{F}; \quad \frac{dT}{dt} = \mathbf{F} \times \mathbf{v}$$

vengono, riuniti assieme. In conseguenza non valgono più separatamente il principio della conservazione della massa e della energia, ma un unico principio, quello della conservazione della massa-energia.

Chiediamoci allora cosa accadrà passando alla nuova cosmologia proiettiva. In uno spazio-tempo a curvatura costante *accade il fatto notevole che le traslazioni diventano delle particolari rotazioni*, e quindi non si possono più distinguere le rotazioni dalle traslazioni. Le due equazioni cardinali della dinamica vengono in tal modo unificate, e viene a sparire il duplice aspetto rotatorio e traslatorio nei fenomeni meccanici <sup>(12)</sup>.

Inoltre dal legame trovato tra massa e momento di inerzia, *si deduce la non validità su scala cosmologica del principio di conservazione della massa energia*, come viene suggerito da alcuni cosmologi (JEANS, HOYLE...). Infatti è noto che la legge di conservazione dell'impulso-energia è una conseguenza della *invarianza per traslazioni* delle leggi fisiche, mentre la legge di conservazione del momento della quantità di moto segue dalla *invarianza per rotazioni* delle leggi fisiche. Passando al gruppo di FANTAPPIÉ si viene a perdere la invarianza per traslazioni (che vengono assimilate a particolari rotazioni), e quindi si perviene alla conclusione che la legge di conservazione della energia-quantità di moto, vale solo localmente, mentre su scala cosmologica vale la legge di conservazione del momento della quantità di moto, opportunamente generalizzata. Al limite relativistico ( $r \rightarrow \infty$ ) quest'ultima legge si decompone nelle due valide nella relatività ristretta.

Esamineremo in un successivo lavoro quali modifiche deve subire la meccanica relativistica, per renderla invariante per il gruppo di FANTAPPIÉ.

## 10 — LA LEGGE DELLA GRAVITAZIONE E LA COSMOLOGIA

Abbiamo visto che utilizzando opportunamente le ricerche del CARTAN sui rapporti tra teoria dei gruppi e geometria differenziale

(non olonoma), si può costruire una «relatività generale» proiettiva, basata sul gruppo di FANTAPPPIÉ. In questa nuova teoria (8) il tensore di curvatura si decompone, per  $r$  tendente all'infinito, nel solito *tensore di curvatura* (o curvatura di «rotazione») e nel *tensore di torsione* (o curvatura di «traslazione»). Nella nostra teoria quindi la torsione appare in presenza di interazione tra materia ed elettricità, mentre è nulla se è presente solo la materia o solo la elettricità.

Adesso ci proponiamo di vedere come deve essere perfezionata la legge della gravitazione di NEWTON in un universo statico ed a curvatura costante. In tal caso la equazione di POISSON

$$(10,1) \quad \Delta\varphi = 0$$

dove  $\varphi$  è il potenziale gravitazionale, viene così modificata

$$(10,2) \quad \Delta\varphi + \frac{1}{r^2} \partial_0^2 \varphi = 0$$

L'operatore  $\partial_0$  rappresenta la derivazione rispetto alla quinta coordinata omogenea, derivata che compare anche nelle equazioni di MAXWELL, generalizzate (5), e della quale ci proponiamo di stabilire il significato.

A questo scopo osserviamo che se la funzione  $\varphi$  è omogenea di grado  $n$ , si avrà, in base al teorema di EULERO sulle funzioni omogenee

$$(10,3) \quad x^0 \partial_0 \varphi + x^i \partial_i \varphi = n\varphi \quad (i = 1, 2, 3)$$

da cui  $x^0 \partial_0 \varphi = n\varphi - x^i \partial_i \varphi$ . Ne segue che

$$(n - x^i \partial_i) (n\varphi - x^i \partial_i \varphi) = x^0 \partial_0 \varphi + x^{02} \partial_0^2 \varphi$$

Sviluppato il prodotto, e posto  $x_0 = 1$ , per passare a coordinate non omogenee, otteniamo la seguente formula

$$(10,4) \quad \partial_0^2 \varphi = n(n-1)\varphi - 2(n-1)x^i \partial_i \varphi + x^i x^k \partial_i \partial_k \varphi$$

Ora la forza di gravità  $f_i$  deve essere una funzione omogenea di grado zero. Infatti le coordinate  $(x_i, x_0)$  e  $(\lambda x_i, \lambda x_0)$  rappresentano lo stesso punto, e quindi dovrà aversi

$$(10,5) \quad f_i(x_i, x_0) = f_i(\lambda x_i, \lambda x_0)$$

Tale condizione é soddisfatta se la funzione  $f_i$  é omogenea di grado zero. In conseguenza, la funzione  $\varphi$  dovrà essere omogenea di grado uno ( $n = 1$ ) e la (10,4) si riduce alla

$$(10,6) \quad \partial_0^2 \varphi = x^i x^k \partial_i \partial_k \varphi$$

L'equazione di POISSON generalizzata (10,2) si scrive così, in coordinate non omogenee

$$(10,7) \quad \Delta \varphi + \frac{x^i x^k}{r^2} \partial_i \partial_k \varphi = 0$$

Vogliamo dimostrare che questa equazione differenziale ammette la seguente soluzione

$$(10,8) \quad \varphi = -\frac{1}{\varrho} + \frac{\varrho}{r^2} \quad \text{con} \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

A questo scopo osserviamo che si ha

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{x}{\varrho^3} + \frac{1}{r^2} \frac{x}{\varrho}; \quad x^i \partial_i \varphi = \frac{1}{\varrho} + \frac{\varrho}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\varrho^3 - 3 \varrho x^2}{\varrho^6} + \frac{1}{r^2} \frac{\varrho - x^2/\varrho}{\varrho^2}$$

e relazioni analoghe per le derivate rispetto ad  $y$  e  $z$ . Inoltre si trova che

$$x^i x^k \partial_i \partial_k \varphi = -2/\varrho$$

e quindi, in definitiva

$$\Delta \varphi + \frac{1}{r^2} x^i x^k \partial_i \partial_k \varphi = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{2}{\varrho} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{2}{\varrho} = 0$$

Una verifica meno laboriosa si può fare utilizzando la (10,2). Se ricordiamo che la funzione  $\varphi$  é omogenea di primo grado, la (10,7) diventa

$$(10,9) \quad \varphi = -\frac{x_0^2}{\varrho} + \frac{\varrho}{r^2}$$



Ne segue subito che

$$\Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{2}{\varrho}; \quad \partial_0 \varphi = -\frac{2x_0}{\varrho}; \quad \partial_0^2 \varphi = -\frac{2}{\varrho}$$

e quindi

$$\Delta \varphi + \frac{1}{r^2} x^i x^k \partial_i \partial_k \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{2}{\varrho} - \frac{1}{r^2} \frac{2}{\varrho} = 0$$

Si ottiene così la legge di NEWTON generalizzata

$$(10,10) \quad \boxed{F = k m m' \left( \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2} \right)}$$

e questo perché

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varrho} = \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( -\frac{1}{\varrho} + \frac{\varrho}{r^2} \right) = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}$$

Ne segue che per  $\varrho \rightarrow \infty$  la forza gravitazionale non tende più a zero, ma ad un valore  $F_0 = kmm'/r$ , che è la forza gravitazionale esercitata dalle due masse, poste alla distanza  $r$  (raggio del cronotopo).

Per comprendere meglio il significato fisico della (10,10), osserviamo che, in base alla (7,10), sullo spazio di contemporaneità, la massa di un corpo cresce all'aumentare della sua distanza dall'osservatore, e quindi si avrà

$$(10,11) \quad F = \frac{km}{\varrho^2} m' \left( 1 + \frac{\varrho^2}{r^2} \right)$$

la quale non è che la (10,10), scritta sotto altra forma. Nella legge di NEWTON generalizzata si tiene quindi conto della variazione della massa di un corpo con la sua distanza dall'osservatore, e cioè della equivalenza tra massa di un corpo e suo momento polare di inerzia.

La (10,11) si può scrivere così

$$(10,12) \quad F = \frac{km m^1}{\varrho^2} + m^1 H^2 \varrho_0$$

dove si sono indicati con  $H = c/r$  la costante di Hubble e con  $\varrho_0 = km/c^2$  il "raggio gravitazionale" della massa  $m$ .

## NOTE E BIBLIOGRAFIA

- (1) H. BONDI. — *Cosmology*. — Cambridge at the University press, 1961.
- (2) E. A. MILNE. — *Kinematic Relativity*. — Oxford, at the Clarendon press, 1948.
- (3) L. FANTAPPIÉ. — *Su una nuova teoria di relatività finale*. — Rend. Acc. Lincei, ser 8.º, vol 17, (1954) ; *Sui fondamenti gruppi della fisica*, Collectanea Mathematica, vol. XI, fasc. 2 (1959).
- (4) E. A. MILNE. — Op. cit., pag. 71.
- (5) G. ARCIDIACONO. — *La relatività di Fantappié*, Collectanea Mathematica, vol. X, fasc. 2.º (1958).
- (6) G. ARCIDIACONO. — *Sul significato fisico della teoria di relatività finale*, Rend. Acc. Lincei ser. 8.º, vol. XX (1956) ; *Relatività finale e Cosmologia*, Collectanea Mathematica, vol. XII, fasc. 1 (1960).
- (7) G. ARCIDIACONO - N. VIRGOPIA. — *A new approach to red-shift laws*. — Rend. Lincei, sett-ott. 1965.
- (8) G. ARCIDIACONO. — *Gli spazi di Cartan e le teorie unitarie*. — Collectanea Mathematica, vol. XVI fasc. 2-3 (1964).
- (9) Le « quasars » presentano spostamenti verso il rosso, corrispondenti a velocità apparenti iper-c. Vedi E. SCHATZMAN, *Données récentes en cosmologie*, Sciences n.º 40, 1965.
- (10) Per le galassie che osservano  $x = ct$ , e quindi la (6.7) diventa  $\beta = \alpha : (1 - \alpha)$ . Ne segue che  $v = c$  per  $x = r/2$ .
- (11) V. FOCK, *The theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, Oxford 1964, pag. 76.
- (12) Recentemente il gruppo dei movimenti in sé del cronotopo di DE SITTER è stato utilizzato nello studio delle particelle elementari. Vedi C. FRONSDAL, *Elementary Particles in a curved space*, Rev. of Mod. Physics, vol. 37, n.º 1 (1965).