ESTUDIO DE LOS IDEALES DEL ANILLO DE LAS FUNCIONES ENTERAS

por

RAFAEL AGUILÓ FUSTER

INTRODUCCIÓN

Las funciones enteras han sido objeto de multitud de trabajos después de las Memorias de Laguerre, Poincaré, Hadamard, Borel, etcétera, pero se han ocupado de cuestiones de crecimiento y distribución de los ceros, clasificándolas según el género, orden, estudio de valores asintóticos, etc.; el presente trabajo las enfoca desde un punto de vista distinto, independiente de estas consideraciones, aquí se hace el estudio de sus propiedades algebraicas. El anillo que forman es de los más sencillos de anillos no noetherianos, tiene propiedades que lo asemejan a anillos de ideales principales, así que el ideal engendrado por dos ideales principales es principal, que las funciones que admiten descomposición factorial en elementos primos, ésta es única, etc.

Este anillo es un subanillo del de series de potencias formales, y el de series de potencias convergentes de una variable, sobre el cuerpo de los números complejos, que son estudiadas por Krull, W. Thimm, etcétera.

El anillo estudiado tiene la propiedad de que es monogéneo (einartig), es decir, que todo ideal primo, excepto del nulo y del unidad es maximal.

El presente trabajo está dividido, primero en unos preliminares, luego el Cap. I en el estudio de ideales principales, el II en el de ideales no principales, el cual no es exhaustivo, se puede prolongar la investigación de algunos puntos relativos a ideales maximales, y el III a valoración, estudiando las valoraciones exponenciales del cuerpo de funciones meromorfas tales que el anillo de valoración correspondiente contenga al de funciones enteras (único caso que tiene ligazón con el estudio del anillo de funciones enteras) no ocupándose si son posibles otras valoraciones.

En varias cuestiones es precisa la aplicación del Axioma de la Elección de Zermelo, y sus consecuencias.

1. — PRELIMINARES.

Las funciones enteras forman un anillo $\mathfrak{E}$, sus elementos unitarios son las funciones enteras cuyas inversas también lo son (o sea, las funciones enteras sin ceros, o con el valor cero excepcional), que, como es sabido, su expresión general es de la forma $e^{g(t)}$ donde $g(t)$ es una función entera arbitraria (en particular, una constante o un polinomio).[1]

Sea $f(t) \in \mathfrak{E}$, todos sus elementos asociados[2] son de la forma $e^{g(t)} f(t)$ con $\forall g(t) \in \mathfrak{E}$, y sólo éstos.

Sea $\forall f(t) \in \mathfrak{E}$ y $f(t) \neq 0$; indiquemos con S_f su conjunto de ceros, que es un conjunto de números complejos en el que un elemento puede estar repetido un número finito de veces, que llamaremos multiplicidad del elemento (que corresponde a los ceros múltiples), y que es finito (incluyendo el vacío correspondiente a las funciones unitarias) o infinito numerable, con el único punto de acumulación el del infinito.[3]

Dos funciones asociadas tienen el mismo conjunto de ceros, y recíprocamente, según el teorema de factores primarios de WEIERSTRASS.[4] En otras palabras: *los conjuntos de ceros están en correspondencia biunívoca con las clases de funciones enteras asociadas. (Exclusión de la función nula), en particular la clase unitaria con el conjunto vacío.*

Antes de proseguir, conviene precisar las operaciones con los conjuntos de ceros.

La intersección $S_f \cap S_g$ son los elementos comunes a S_f y S_g, y la multiplicidad de cada elemento en $S_f \cap S_g$ es el mínimo de las multiplicidades en S_f y S_g.

La reunión $S_f \cup S_g$ son los elementos pertenecientes a S_f o a S_g y la multiplicidad de un elemento de $S_f \cup S_g$ es el máximo de las multiplicidades en S_f y en S_g. (Si $\alpha \notin S_f$ diremos que es de multiplicidad nula).

(1) Goursat, pág. 147.
(2) Van der Waerden (1), párr. 20, pág. 69 y sigs.
(3) Goursat, párr. 308, pág. 148.
(4) Goursat, párr. 308, pág. 146 y sigs.

La suma $S_f + S_g$ son los elementos pertenecientes a S_f o a S_g y la multiplicidad de un elemento de $S_f + S_g$ es la suma de las multiplicidades en S_f y en S_g.

La diferencia $S_f - S_g$ son los elementos pertenecientes a S_f y no a S_g y la multiplicidad de un elemento de $S_f - S_g$ es la diferencia de multiplicidades en S_f y en S_g si ésta es ≥ 0, y 0 si es < 0.

Evidentemente estas cuatro operaciones proporcionan otro conjunto de ceros, las tres primeras son asociativas y conmutativas y se pueden extender a un número finito. La primera se puede extender también a un número infinito, y en cambio las otras dos si se extienden a un número infinito pueden proporcionar puntos de acumulación a distancia finita o puntos de multiplicidad infinita.

A la función entera producto de dos funciones enteras corresponde el conjunto de ceros suma de los conjuntos de ceros de cada factor, es decir

$$S_{fg} = S_f + S_g$$

Si $S_f \neq \phi$ contiene más de un punto, o un punto de multiplicidad superior a uno, se puede descomponer en suma de dos conjuntos no vacíos y recíprocamente, la suma de dos conjuntos de ceros no vacíos contiene más de un punto o un punto de multiplicidad superior a uno. De aquí resulta:

Los elementos primos de $\mathfrak{E}$ son las funciones con un solo cero y éste de multiplicidad uno.

Son, por tanto, de la forma

$$e^{g(t)} \; (t - a)$$

donde a es un número complejo arbitrario.

Evidentemente $\mathfrak{E}$ no es de descomposición factorial,(1) pues sólo se pueden descomponer en producto de factores primos (en número finito) las funciones enteras cuyo conjunto de ceros es finito, es decir: las asociadas a polinomios, y en éstas la descomposición es única (salvo factores unitarios, naturalmente).

(1) Van der Waerden (1) párr. 22, pág. 69 y sgs.

CAPÍTULO I

Ideales principales de $\mathfrak{E}$

Sea f la función engendradora del ideal (f), consiste en todas las funciones enteras cuyo conjunto de ceros contiene a S_f, y sólo en éstas, excluyendo el ideal (0) hay una correspondencia biunívoca entre los ideales principales de ε y los conjuntos de ceros, incluyendo el conjunto vacío que corresponde al ideal unidad.

LEMA. — *Sean f y g dos funciones enteras con $S_f \cap S_g = \phi$. Existen otras dos funciones enteras φ y ψ de modo que se verifica idénticamente*

$$1 = \varphi(t) f(t) + \psi(t) g(t) \tag{I, 1}$$

DEMOSTRACIÓN. — Cusideremos el cuerpo cociente del anillo ε es decir, el cuerpo de las funciones meromorfas.

La función meromorfa

$$\frac{1}{f(t)\, g(t)} \tag{I, 2}$$

tiene como polos los puntos de $S_f + S_g$, y éstos solamente. Cada polo contado con su multiplicidad respectiva. Por ser S_f y S_g disjuntos, es $S_f \cup S_g = S_f + S_g$, según el conocido teorema de MITTAG-LEFFLER es: [1]

$$\frac{1}{f(t)\, g(t)} = h(t) + \sum_k \left[G\left(\frac{1}{t - a_k}\right) + P_k(t) \right] \tag{I, 3}$$

con $a_k \in S_f \cup S_g$ y $G\left(\dfrac{1}{t - a_k}\right)$ la parte principal de (I,2) en el punto a_k. Pero si $a_k \in S_f \Longrightarrow a_k \notin S_g$, y recíprocamente, por tanto, el sumatorio que aparece en (I,3) se puede descomponer en dos: el relativo a los puntos de S_f y el relativo a los puntos de S_g, y $h(t)$ la podemos descomponer de forma arbitraria en suma de dos funciones enteras h_1 y h_2. Tenemos, pues, que (I,3) es la suma de

(1) Goursat, párr. 312, pág. 155 y sigs.

$$
(\mathrm{I},4) \qquad
\begin{aligned}
&h_1(t) + \sum_{\forall a_k \in S_f} \left[G\left(\frac{1}{t - a_k}\right) + P_k(t) \right] \\
&h_2(t) + \sum_{\forall a_e \in S_g} \left[G\left(\frac{1}{t - a_e}\right) + P_e(t) \right]
\end{aligned}
$$

el primero es una función meromorfa que tiene como polos los puntos de S_f, con sus multiplicidades respectivas, y el segundo una función meromorfa con los polos los puntos de S_g, también con sus multiplicidades respectivas. La primera fórmula de (I,4) es, por consiguiente de la forma $\dfrac{\psi(t)}{f(t)}$ y la segunda $\dfrac{\varphi(t)}{g(t)}$, es decir:

$$
(\mathrm{I},5) \qquad \frac{1}{f(t)\, g(t)} = \frac{\psi(t)}{f(t)} + \frac{\varphi(t)}{g(t)}
$$

de donde resulta (I,1). q.e.d.

COROLARIO. — *Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones enteras arbitrarias, y $h(t)$ una función entera cuyo conjunto de ceros sea $S_f \cap S_g$, entonces existen otras dos funciones enteras $\varphi(t)$ y $\psi(t)$ tales que se verifica idénticamente :*

$$
(\mathrm{I},6) \qquad h(t) = \varphi(t)\, f(t) + \psi(t)\, g(t).
$$

DEMOSTRACIÓN. — Sean $S_{f_1} = S_f - S_f \cap S_g$ y $S_{g_1} = S_g - S_f \cap S_g$ como $S_f \cap S_g \subset S_f$, se verifica

$$
S_f = S_{f_1} + S_f \cap S_g \qquad S_g = S_{g_1} + S_f \cap S_g
$$

es decir

$$
f = \varepsilon\, f_1\, h \qquad g = \eta\, g_1\, h
$$

donde ε y η son elementos unitarios de $\mathfrak{E}$, y

$$
(\mathrm{I},7) \qquad S_{f_1} \cap S_{g_1} = \phi
$$

pues $\forall\, a \in S_{f_1} \Longrightarrow a \in S_f$, si $a \notin S_g$, $\Longrightarrow a \notin S_{g_1}$, o inversamente, ya estaría demostrado.

Si $a \in S_f \cap S_g$, sean n_a, m_a, ν_a las multiplicidades de a en S_f, S_g, $S_f \cap S_g$ respectivamente. Es $\nu_a = \text{mín}\ \{n_a,\ m_a\}$; si $a \in S_{f_1}$, su multiplicidad es $n_a - \nu_a$, y si $a \in S_{g_1}$, su multiplicidad es $m_a - \nu_a$ y estos dos números no pueden ser ambos positivos, por tanto si $a \in S_{f_1} \Longrightarrow a \notin S_{g_1}$ y recíprocamente, de donde resulta (I,7).

Según el lema, $\exists\ \varphi_1(t)$ y $\psi_1(t)$ tales que se verifica idénticamente

$$1 = \varphi_1(t)\, f_1(t) + \psi_1(t)\, g_1(t) \tag{I,8}$$

multiplicando ambos miembros por $h(t)$, y llamando

$$\varphi(t) = \varepsilon^{-1}\varphi_1(t), \qquad \psi(t) = \eta^{-1}\psi_1(t)$$

resulta (I,6) q.e.d.

De aquí resulta:

TEOREMA 1. — *El ideal engendrado por dos funciones enteras f y g es principal y corresponde al conjunto de ceros $S_f \cap S_g$.*

DEMOSTRACIÓN. — Si $S_f \cap S_g = \phi$, es consecuencia inmediata de (I,1), si $S_f \cap S_g = S_h \neq \phi$, es consecuencia inmediata de (I,6) y de

$$\text{(I,9)} \qquad \begin{aligned} f &= vh \\ g &= sh \end{aligned}$$

pues $S_h \subset S_f \Longleftrightarrow (f) \subset (h)$ y $S_h \subset S_g \Longleftrightarrow (g) \subset (h)$ de donde (I,9)[1] q.e.d.

TEOREMA 2. — *El ideal engendrado por un número finito de funciones enteras $f_1, f_2, \dots f_n$ es principal y corresponde al conjunto de ceros de $S_{f_1} \cap S_{f_2} \cap \dots \cap S_{f_n}$.*

La demostración por inducción completa no ofrece ninguna dificultad.

TEOREMA 3. — *El ideal m.c.m de (f) y (g), o sea $(f) \cap (g)$*[2] *es principal y corresponde al conjunto de ceros $S_f \cup S_g$, y el ideal producto (fg)*[2] *corresponde* a $S_f + S_g$.

En efecto: Sea $S_h = S_f \cup S_g \Longrightarrow (h) \subset (f)$ y $(h) \subset (g)$ y $\forall\ \varphi \epsilon (f) \cap (g) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow S_\varphi \supset S_f$ y $S_\varphi \supset S_g$ o sea $S_\varphi \supset S_f \cup S_g = S_h \Longleftrightarrow \varphi \in (h) \Longrightarrow (h) = (f) \cap (g)$ la segunda parte es inmediata. q.e.d.

La extensión a un número finito por inducción completa no ofrece ninguna dificultad.

(1) Van der Waerden: (1) párr. 21, pág. 67.
(2) Van der Waerden: (1) párr. 20, pág. 65.
(2) Van der Waerden: (2) párr. 91, pág. 22 y sigs.

TEOREMA 4. — *El ideal intersección de infinitos ideales principales es principal, y corresponde al conjunto de ceros reunión de los conjuntos de ceros de cada uno de estos ideales, si esta reunión no tiene ningún punto de acumulación a distancia finita ni ningún punto de multiplicidad infinita, en caso contrario es el ideal* (0).

DEMOSTRACIÓN. — Sean (f_i) $i \in I$ los ideales principales, I el conjunto de subíndices, si $\bigcup_{\forall i \in I} S_{f_i}$ no tiene puntos de acumulación a distancia finita, ni puntos de multiplicidad infinita, corresponde a un ideal principal (h), y $(h) \subset (f_i)$ para $\forall i$, por tanto

$$(h) \subset \bigcap_{\forall i \in I} (f_i)$$

por otra parte, $\forall g \in \mathfrak{E}$ tal que $g \in \bigcap_{\forall i \in I} (f_i) \supset S_g \supset S_{f_i}$ para $\forall i \in I$ por tanto contiene a su reunión, es decir $(g) \subset (h)$, y

$$\bigcap_{\forall i \in I} (f_i) \subset (h) \quad \text{o sea} \quad (h) = \bigcap_{\forall i \in I} (f_i)$$

Si $\bigcup_{\forall i \in I} S_{f_i}$ tuviera puntos de acumulación a distancia finita, o puntos de multiplicidad infinita $\forall g \in \bigcap_{\forall i \in I} (f_i)$ tendría como ceros todos los de esta reunión, es decir, $g(t)$ tendría puntos de acumulación de ceros a distancia finita, o ceros de multiplicidad infinita, en ambos casos exige que $g(t) \equiv 0$. q.e.d.

TEOREMA 5. — *El ideal cociente* [1] *de dos ideales principales* $(f) : (g)$ *es principal y corresponde al conjunto de ceros* $S_f - S_g$.

DEMOSTRACIÓN. — El ideal cociente está formado por las funciones φ tales que $\varphi g \equiv 0$ (f), o sea

$$S_{\varphi g} = S_\varphi + S_g \supset S_f \Longleftrightarrow S_\varphi \supset S_f - S_g$$

y recíprocamente, de donde resulta el teorema. q.e.d.

DEFINICIÓN. — Indicaremos con

$$(f^*) = (f) : (f') \tag{I,10}$$

(1) Van der Waerden (2) párr. 91, pág. 24 y sgs.

(f' la derivada de f), según el teorema 5, S_{f*} son todos los puntos de S_f pero con multiplicidad uno $((f^*) = (f) \Longleftrightarrow f$ desprovisto de ceros múltiples).

Si $S_f = a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ con las multiplicidades $n_1, n_2, \dots n_n, \dots$ respectivamente, es $S_{f*} = a_1, a_2, \dots a_n, \dots$ todos con multiplicidad uno.

Si el conjunto $\{n_i\}$ está acotado, llamando $\varrho = Sup\ n_i$ tenemos:

$$(f^*)^\varrho \subset (f) \tag{I,11}$$

y ϱ es el mínimo exponente para que se verifique (I, 11), de donde resulta que

$$(f^*) = \text{Rad}\ (f)\ ^{(1)}$$

(Rad $\mathfrak{A} = \{a \in \mathfrak{E},\ a^n \in \mathfrak{A}$ para un n entero $\geq 0\}$, en cambio si $\{n_i\}$ no está acotado, tenemos

$$\text{Rad}\ (f) \subset (f^*)$$

y no es ideal principal (se estudiará en el Cap. II).

Procedamos ahora a estudiar los ideales principales primos.

El ideal (0) es primo por ser $\mathfrak{E}$ un dominio de integridad.

Aparte de éste, tenemos el teorema:

TEOREMA 6. — *Un elemento primo de* $\mathfrak{E}$ [2] *engendra un ideal maximal (o sin divisores),*[3] *y un elemento compuesto un ideal no primo.*

DEMOSTRACIÓN. — Un elemento primo de $\mathfrak{E}$ es asociado a $t - a$

$$\forall g \in \mathfrak{E} \quad g(t) \equiv g(a) \quad (t - a)$$

y $g(a)$ es cualquier número complejo, de donde resulta

$$\mathfrak{E}/_{(t-a)} \cong \Omega \tag{I, 12}$$

donde Ω es el cuerpo de los números complejos, de donde resulta que el anillo de clases de restos respecto a $(t - a)$ es un cuerpo, es decir $(t - a)$ es maximal.

(1) Krull, pág. 6.
(2) Véase pág. 3.
(3) Van der Waerden (1), párr. 20, pág. 64.

Si $f = g\,h$
y g y h son no unitarios, resulta que $S_f = S_g + S_h$ y $S_g \subsetneq S_f$, $S_h \subsetneq S_f$, es decir: $g \not\equiv 0\ (f)$, $h \not\equiv 0\ (f)$, pero $g\,h \equiv 0\ (f)$ de donde (f) es no primo.
q.e.d.

De aquí resulta que los ideales principales primos, excepto el (0) y el (1) son también maximales.

TEOREMA 7. — *Los ideales principales primarios* [1] *son los* (f) *tales que* (f^*) *es primo, y sólo éstos.*

Es decir: si $f \neq 0$, S_f es vacío o consta de un solo punto de multiplicidad arbitraria.

DEMOSTRACIÓN. — Para los ideales (0) y (1) es trivial, si

$$f(t) = (t - a)^n\, e^{g(t)} \quad h\varphi \equiv 0\ (f) \ \text{y}\ h \not\equiv 0\,(f) \Longrightarrow \varphi^n \equiv 0\,(f)$$

pues $\varphi(a) = 0$ con multiplicidad ≥ 1.

Por el contrario, si S_f consta de más de un punto, podemos descomponer $f = \varphi\,h$, $(\varphi, h) = (1)$, $(\varphi) \neq (1)$ $(h) \neq (1)$ de donde

$$\varphi\,h \equiv 0\,(f),\ \varphi \not\equiv 0\,(f) \Longrightarrow h^n \not\equiv 0\,(f)$$

para $\forall\, n \geq 1$, es decir, (f) no es primario. q.e.d.

TEOREMA 8. — $\mathfrak{E}$ *no es noetheriano.*

DEMOSTRACIÓN. — $\exists\, f \in \mathfrak{E}$ con infinitos ceros, sea

$$S_f = a_1,\ a_2,\ \dots\ a_n,\ \dots$$

con multiplicidades $n_1,\ n_2,\ \dots\ n_n,\ \dots$
tenemos:

$$(f) \subset (f^*) \subsetneq (f^*) : (t - a_1) \subsetneq (f^*) : (t - a_1)(t - a_2) \subsetneq \dots \subsetneq$$
$$(f^*) : (t - a_1) \dots (t - a_n) \subsetneq \dots$$

una sucesión de ideales que no vale el signo = a partir de un valor en adelante. q.e.d.

TEOREMA 9. — *Todo ideal principal es intersección de ideales primarios en número finito o infinidad numerable.*

(1) Van der Waerden (2), párr. 92.

Demostración. — Si f tiene un número finito de ceros, es decir, $S_f = a_1, a_2, \ldots a_n$ con n_i multiplicidad de a_i es

$$(f) = ((t - a_1)^{n_1}) \cap ((t - a_2)^{n_2}) \cap - - \cap ((t - a_n)^{n_n})$$

Si f tiene infinitos ceros, del teorema 4 resulta

$$(f) = \bigcap_{i=1}^{\infty} ((t - a_i)^{n_i}) \qquad \text{q.e.d.}$$

Teorema 10. — *$\mathfrak{E}$ es entero algebraicamente cerrado* [1] *en su cuerpo cociente.*

Demostración. — Sea τ una indeterminada.

$$F(\tau) = \tau^n + g_1 \tau^{n-1} + \ldots + g_{n-1} \tau + g_n$$

un polinomio de $\mathfrak{E}[\tau]$ con el coeficiente de mayor grado igual a 1. Si φ es una función meromorfa tal que $F(\varphi) = 0$, es suficiente demostrar que φ es una función entera.

En efecto : $\varphi = \dfrac{f}{g}$ es el cociente de dos funciones enteras que podemos suponer sin ceros comunes, es decir $(f, g) = (1)$, pues en caso contrario sería $(f, g) = (h)$ (teorema 1) y dividiríamos numerador y denominador por h. Sustituyendo en $F(\tau)$, y multiplicando por g^n, tenemos

$$f^n + g_1 f^{n-1} g + g_2 f^{n-2} g^2 + \ldots + g_{n-1} f g^{n-1} + g_n g^n = 0$$

todos los términos excepto el primero son congruentes con cero módulo (g), por tanto

$$f^n \equiv 0 \ (g)$$

lo que sólo es posible si $(g) = (1)$, es decir, g unitaria, y por tanto φ entera. q.e.d.

(1) Van der Waerden (2), Cap. XIV, pág. 73 (en alemán «ganz algebraisch-abgeschlossen).

CAPÍTULO II

Ideales no principales de $\mathfrak{E}$

1. — GENERALIDADES.

Sea $\mathfrak{A}$ un ideal de $\mathfrak{E}$. En el capítulo anterior hemos visto que si $\mathfrak{A}$ es engendrado por un número finito de elementos de $\mathfrak{E}$ es principal (teorema 1).

Sea $\mathfrak{A} = \{f_i\}$ $i \in I$ (conjunto de subíndices) el ideal engendrado por infinitas funciones,[1] sea

$$S = \bigcap_{\forall i \in I} S_{f_i} \tag{II, 1}$$

resulta que $S \subset S_{f_i}$ para cada i, de donde resulta que S es un conjunto de ceros de la forma especificada en pág. 4 (S puede ser el conjunto vacío). A S, por tanto, corresponde una clase de funciones asociadas. Sea g una función de esta clase (es decir, $S = S_g$) $\forall f \in \mathfrak{A}$ verifica $f \in (g)$, es decir :

$$\mathfrak{A} \subset (g) \tag{II, 2}$$

TEOREMA 11. — *Todo ideal principal divisor de* $\mathfrak{A}$ *es también divisor de* (g).

DEMOSTRACIÓN. — Sea $(\varphi) \supset \mathfrak{A}$ un ideal principal divisor del $\mathfrak{A}$ basta demostrar que $S_\varphi \subset S_g$, pues implica que $(\varphi) \supset (g)$.

Si S_φ no $\subset S_g$, $\exists\, a \in S_\varphi - S_g$, y una función engendradora de $\mathfrak{A}$, f_i, tal que $f_i(a) \neq 0$ ó $f_i(a) = 0$, de multiplicidad menor que en φ, pues de (II, 1) si $a \notin S_g \Longrightarrow \exists\, i$ tal que a $\notin S_{f_i}$ y si $a \in S_g \Longrightarrow a \in S_\varphi$ con multiplicidad mayor y $\exists\, i$ tal que $a \in S_{f_i}$ con la misma multiplicidad que en S_g, por tanto menor que en S_φ.

En cualquier caso resulta $f_i \notin (\varphi)$ y por tanto $\mathfrak{A}$ no $\subset (\varphi)$. q.e.d.

De donde resulta que (g) es el ideal principal mínimo que sea divisor de $\mathfrak{A}$.

TEOREMA 12. — *La condición necesaria y suficiente para que el ideal* $\mathfrak{A} = \{f_i\}$ *sea principal, es que el conjunto S dado por* (II,1), *pueda expresarse como intersección de un número finito de* S_{f_i}.

(1) Todo ideal es engendrado por un número finito o infinito de elementos, pues podemos tomar como engendradores todos sus elementos.

Demostración. — La condición es necesaria. En efecto: si existe un subconjunto finito de I, $(i_1, i_2, \ldots i_\nu)$ tal que

$$S_g = \bigcap_{\mu=1}^{\nu} S f_\mu$$

entonces

$$(g) = (f_{i_1}, f_{i_2}, \ldots f_{i_\nu})$$

(teorema 2) es decir,

$$(g) \subset \mathfrak{A}$$

y comparando con (II, 2) resulta

$$\mathfrak{A} = (g)$$

La condición es suficiente. En efecto: si $\mathfrak{A}$ es principal, debe ser $\mathfrak{A} = (g)$ según el teorema 11; por consiguiente, por $g \in \mathfrak{A}$ será

$$g = \sum_{\mu=1}^{\nu} \varphi_\mu f_{i\mu} \qquad (\varphi_\mu \text{ funciones enteras})$$

combinación lineal de un número finito de engendradores de $\mathfrak{A}$, y por tanto

$$S_g \supset \bigcap_{\mu=1}^{\nu} S_{f_{i\mu}} \supset \bigcap_{\forall i \in I} S_{f_i}$$

por tanto debe ser

$$S_g = \bigcap_{\mu=1}^{\nu} S_{f_{i\mu}}$$

q.e.d.

Corolario. — *Si existe una función $h \in \mathfrak{A}$ asociada a un polinomio (es decir: S_h finito) entonces es $\mathfrak{A}$ principal.*

Demostración. — Se verifica

$$(h) \subset \mathfrak{A} \subset (g) \Longrightarrow S_h \supset S_g$$

pero $h = \sum_{v=1}^{n} \varphi_v f i_v$ con φ_v enteras, y $S_h = \bigcap_{v=1}^{n} S_{f_{iv}}$ y $S_h - S_g$ es finito, si fuese vacío, sería $S_h = S_g \Longrightarrow (h) = (g)$ y ya estaría demostrado, si no, a $\forall a_p \in S_h - S_g$ $\exists$ una f_{ip} tal que $f_{ip}(a_p) \neq 0$ si $a_p \notin S_g$ ó $f_{ip}(a_p) = 0$ con multiplicidad menor que en h si $a_p \in S_g$, y como los a_p son finitos es $S_g = S_h \bigcap_{\forall p} S f_{ip}$, por tanto es intersección finita.

q.e.d.

Como ejemplo, vamos a hallar el radical de un ideal principal (f) (véase pág. 9).

Como sabemos, es el conjunto de funciones enteras de las cuales una potencia pertenece al ideal (f). Si S_f tiene sus multiplicidades acotadas es (f^*) el radical de (f), si no es

$$\text{Rad } (f) = \{f,\ f_1,\ f_2,\ \dots\ f_n,\ \dots\}$$

con

$$(f_1) = (f^*) \cap (f) : (f^*),\ (f_2) = (f^*) \cap (f_1) : (f^*)$$

y en general

$$(f_n) = (f^*) : (f_{n-1}) : (f^*)$$

es decir :

S_{f_n} se obtiene de $S_{f_{n-1}}$, conservando los puntos de multiplicidad uno, y reduciendo en una unidad las multiplicidades de los restantes puntos. $(S_{f_0} = S_f)$.

En efecto :

$\forall f_n \in \text{Rad } (f)$, pues $f_n^u \in (f)$, recíprocamente, si $g \in \text{Rad } (f)$, $\exists\ n > 0$ tal que $g^n \in (f) \Rightarrow g \in (f_n)$, y $\forall\, g \in \mathfrak{A} = \{f, f_1, \dots f_n, \dots\}$ es $g = \sum_{v=0}^{n} \varphi_v f_v \in (f_n)$ pues $(f_i) \subset (f_{i+1})$.

Aquí es

$$\bigcap_{v=0}^{\infty} S_{f_v} = S_{f^*}$$

y es intersección finita sólo si es $f_n = f_{n+1}$ a partir de un n en adelante, es decir : si las multiplicidades de los ceros están acotadas.

2. — *Caso* $S = \phi$

En este caso el ideal correspondiente a S es el ideal unidad, por consiguiente del teorema 11 se deduce que $\mathfrak{A}$ no es múltiplo de ningún ideal principal excepto del unidad, y recíprocamente.

Del teorema 12 tenemos que $\mathfrak{A} = (1)$ si y sólo si la intersección de un número finito de S_{f_i} es vacía. En particular si la intersección de un número finito de S_{f_i} es finita, según el corolario a dicho teorema.

Tenemos :

TEOREMA 13. — *La condición necesaria y suficiente para que el ideal* $\mathfrak{A} = \{f_i\}$, $i \in I$ *no sea principal, y no sea múltiplo de ningún ideal principal excepto del ideal unidad es que* $\forall\, \varphi(t) \in \mathfrak{A}$ *tenga infinitos* *ceros, y dado al arbitrio un número real* $R > 0$, $\exists\ \varphi(t) \in \mathfrak{A}$ *tal que todos sus ceros sean de módulo superior a* R.

DEMOSTRACIÓN. — La condición es necesaria. En efecto: $\forall\ \varphi(t) \in \mathfrak{A}$ es de la forma

$$\varphi = \sum_{v=1}^{r} \varphi_v f_{iv}$$

y el conjunto $S_r = \bigcap_{v=1}^{r} S_{f_{iv}}$ debe tener infinitos elementos, pues si fuera finito sería $\mathfrak{A} = (1)$, y $S_\varphi \supset S_r$, por tanto φ tiene infinitos ceros. Por otra parte, $\forall\, S_{f_i}$ tiene un número finito de elementos de módulo igual o menor que R, sean $a_1, a_2, \ldots a_\mu$. Para $\forall\ a_v$ ($\nu = 1, 2 \ldots \mu$) $\exists$ un $S_{f_{iv}}$ tal que $a_v \notin S_{f_{iv}}$, pues en caso contrario $a_v \in S_{f_{ir}}$ para $\forall\ i \in I$, y por consiguiente, la $\cap\ S_{f_i}$ no sería vacía. Las funciones enteras

$$f_i,\ f_{i_1} \ldots f_{i_\mu}$$

engendran un ideal principal $(\varphi(t))$ (teorema 1), y $S_\varphi = S_{f_i} \cap S_{f_{i_1}} \cap \ldots \cap S_{f_{i\mu}}$ no contiene ningún punto a_v, y como $S_\varphi \subset S_{f_i}$ no contiene ningún punto en $|t| \leq R$, y por otra parte $\varphi \in \mathfrak{A}$.

La condición es suficiente. En efecto: si para $\forall\ R > 0\ \exists\ \varphi \in \mathfrak{A}$ con todos sus ceros de módulo superior a R, $\bigcap_{\forall i \in I} S_{f_i}$ debe ser vacía, pues si a pertenece a esta intersección $\Rightarrow \varphi(a) = 0$ y si $R > |a|$ está en contradicción con la hipótesis.

Además, si $\forall\ \varphi \in \mathfrak{A}$ tiene infinitos ceros, $\mathfrak{A}$ no puede ser principal, pues el único ideal principal que contiene al $\mathfrak{A}$ es el unidad (teorema 11), y por tanto si $\mathfrak{A}$ fuera principal sería $\mathfrak{A} = (1)$, y habría funciones de $\mathfrak{A}$ sin ceros, lo que está en contradicción con la hipótesis.

q.e.d.

Ejemplos:

1) Las funciones enteras

$$\frac{1}{\Gamma(t)}, \frac{1}{\Gamma(t+1)}, \ldots \frac{1}{\Gamma(t+n)}, \ldots$$

tienen como conjunto de ceros

$S_{\frac{1}{\Gamma(t)}}$ = números enteros no positivos

$S_{\frac{1}{\Gamma(t+)}}$ = números enteros negativos

$$S_{\frac{1}{\Gamma(t+n)}} = \text{números enteros} \leq -n$$

Su intersección es vacía, pero la de un número finito de ellos no lo es, es decir:

$$\mathfrak{A} = \left\{ \frac{1}{\Gamma(t)}, \frac{1}{\Gamma(t+1)}, \dots \frac{1}{\Gamma(t+n)}, \dots \right\}$$

no es principal ni está contenido en ningún ideal principal excepto el unidad.

2) Las funciones enteras

$$\frac{\operatorname{sen} \pi t}{t}, \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2}}{t}, \dots \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi t}{2^n}}{t}, \dots$$

sus conjuntos de ceros son:

Todos los enteros excepto el 0.
» » » pares excepto el 0.
$\dot{4}$ » » »

....

» » » $\dot{\overline{2^n}}$ excepto el cero.

....

cuya intersección es vacía, pero no la de un número finito.
Importante es el siguiente teorema: (1)

TEOREMA 14. — *Todo ideal* $\mathfrak{A}$ *no principal, y no contenido en ningún ideal principal excepto del unidad, está contenido en un ideal maximal no principal.*

DEMOSTRACIÓN. — De los ideales conteniendo al $\mathfrak{A}$ y distintos del unidad hagamos una cadena ordenada por contención, la reunión de éstos es otro ideal que los contiene, por consiguiente se puede aplicar el Lema de ZORN (2), es decir, habrá elemento maximal $\mathfrak{M}$,

(1) Este teorema es consecuencia del teorema general para todos los anillos conmutativos con elemento unidad, $\forall$ ideal $\mathfrak{A} \neq (1)$ está contenido en un ideal maximal.
(2) Birkhoff, pág. 42.

el cual no está contenido más que en sí mismo y en el ideal unidad, es decir, es ideal maximal. q.e.d.

3. — *Caso que I sea numerable.* En este caso podemos suponer que I es el conjunto de los números naturales; en este caso es :

(II, 3) $$\mathfrak{A} = \{f_1, f_2, \dots f_n, \dots\}$$

con

(II, 4) $$\bigcap_{n=1}^{\infty} S_{f_n} = \phi \qquad \bigcap_{n=1}^{h} S_{f_n} \neq \phi \qquad (h \text{ número natural arbitrario})$$

(la intersección de un número finito de S_{f_i} si $h = \text{máx}\ i$ contiene $\bigcap_{n=1}^{h} S_{f_i}$, y por tanto no es vacía).

Consideremos los ideales principales

(II, 5) $$(\varphi_1) = (f_1), (\varphi_2) = (f_1, f_2), \dots (\varphi_n) = (f_1, f_2, \dots f_n) \dots$$

las funciones enteras φ_n están determinadas salvo factores unitarios. Tenemos :

(II, 6) $$S\varphi_n = \bigcap_{i=1}^{n} S_{f_i}$$

y por consiguiente

(II, 7) $$S\varphi_n \supset S\varphi_{n-1}$$

Sea

(II, 8) $$\mathfrak{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n, \dots\}$$

TEOREMA 15. — *Se verifica* $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$.

DEMOSTRACIÓN. — $\forall\, g \in \mathfrak{B}$ es de la forma

(II, 9) $$g = \Sigma \gamma_v \varphi_v$$

donde sólo un número finito de γ_v son distintas de cero. Sea $n = \underset{\gamma_v \neq 0}{\text{Máx}}\ v$, entonces

$$g \in (\varphi_n) \subset \mathfrak{A}$$

pues si $v < \mu \Longrightarrow (\varphi_v) \subset (\varphi_\mu)$. Es decir,

(II, 10) $$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$$

Por otra parte, $\forall f \in \mathfrak{A}$ es de la forma

$$f = \Sigma \varrho_v f_v \tag{II, 11}$$

con sólo un número finito de $\varrho_v \neq 0$. Sea $n = \underset{\varrho_v \neq 0}{\text{Máx}}\ v$, entonces es:

$$f \in (f_1, f_2, \dots f_n) = (\varphi_n) \subset \mathfrak{B} \tag{II, 12}$$

es decir:

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \tag{II, 13}$$

y de (II, 10) y (II, 13) resulta

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} \tag{II, 14}$$

q.e.d.

Del teorema 13, resulta que $S\varphi_n$ tiene infinitos elementos para cada n, y a $\forall R > 0$ (real) corresponde un número natural ν tal que para $n \geq \nu$ es $S\varphi_n$ exterior al círculo $|t| = R$.

Por tanto es:

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\varphi_n) \tag{II, 15}$$

y en la sucesión

$$(\varphi_1) \subset (\varphi_2) \subset \dots \subset (\varphi_n) \subset \dots$$

hay infinitos distintos, y se pueden suprimir los repetidos.

TEOREMA 16. — *Si I es numerable, $\mathfrak{A}$ no es primo.*

DEMOSTRACIÓN. — Veamos primeramente que no es maximal. Sea: $\forall g \in \varepsilon$, si $\exists n$ tal que $Sg \cap S\varphi_n = \Phi \Longleftrightarrow (\varphi_n, g) = (1) \Longrightarrow (\mathfrak{A}, g) = (1)$. (Es suficiente que $\exists\, n$ tal que $Sg \cap S\varphi_n$ sea finito, según corolario del teorema 12).

Si $\exists\, n$ tal que $S_g \supset S_{\varphi n} \Longleftrightarrow g \in (\varphi_n) \Longrightarrow g \in \mathfrak{A}$

Si se verifica $S_g \cap S_{\varphi n} \neq \Phi$, y $S_g \not\supset S_{\varphi n}$ para $\forall n$, entonces $(\mathfrak{A}, g) \neq (1)$, pues si $(\mathfrak{A}, g) = (1)$ de (II, 15) debe ser $(\varphi_n, g) = (1)$ a partir de un valor de n en adelante, y análogamente $g \notin \mathfrak{A}$, pues sería $g \in (\varphi_n)$ a partir de un n.

Un tal S_g existe siempre, pues sea

$$b_1 \in S\varphi_1 - S\varphi_2,\ b_2 \in S\varphi_2 - S\varphi_3,\ \dots\ b_n \in S\varphi_n - S\varphi_{n+1},\ \dots\text{.}\ [1]$$

(1) Se aplica aquí el Axioma de la Elección.

el conjunto

$$S_g = \{b_1, b_2, \dots b_n, \dots\}$$

su intersección con $\forall S\varphi_n$ no es vacía, pues contiene b_n, si para $\forall n$ $\exists m > n$ tal que $S\varphi_m - S\varphi_{m+1}$, conste de más de un elemento, entonces Sg no $\supset S\varphi_n$ para $\forall n$. (Ejemplo 2, pág. 17).

Pero si a partir de un n en adelante $S\varphi_n - S\varphi_{n+1}$, consta de un solo elemento (ejemplo 1, pág. 16), entonces $S_g \supset S_{\varphi_n}$ a partir de un ν y verificará para todo $n \geq \nu$ que $S_{\varphi_n} - S_{\varphi_\nu}$ es finito, si

$$S_{\varphi_\nu} = \{c_1, c_2, \dots c_n, \dots\}$$

tomemos

$S_g = \{c_1, c_3, \dots c_{2n-1}, \dots\}$ y cumple las condiciones exigidas.

En ambos casos es

$$\text{(II, 16)} \qquad \mathfrak{A} \underset{\neq}{\subset} (\mathfrak{A}, g) \underset{\neq}{\subset} (1)$$

por tanto $\mathfrak{A}$ no es maximal.

Veamos que no es primo, sea g verificando (II, 16), sea

$$(h) = (\varphi_1) : (g) \qquad S_h = S_{\varphi_1} - S_g$$

Si $\exists n$ tal que

$$S_h \cap S_{\varphi_n} = \phi \Longleftrightarrow (S_{\varphi_1} - S_g) \cap S\varphi_n = \phi \Longleftrightarrow S_{\varphi_1} \cap S_{\varphi_n} - S_g \cap S_{\varphi_n} =$$
$$= \phi \Longleftrightarrow S_{\varphi_n} = S_{\varphi_1} \cap S_{\varphi_n} \subset S_g \cap S_{\varphi_n} \Longleftrightarrow S_g \cap S_{\varphi_n} = S_{\varphi_n} \Longleftrightarrow S_g \supset S_{\varphi_n}$$

(contradicción).

Si $\exists n$ tal que

$$S_h \supset S_{\varphi n} \Longleftrightarrow S_{\varphi_1} - S_g \supset S_{\varphi n} \Longleftrightarrow S_{\varphi_1} \cap S_g - S_g \supset S_{\varphi n} - S_g \Longleftrightarrow S_{\varphi n}$$
$\cap\, S_g = \phi$ (pues $S_{\varphi_1} \cap S_g \subset S_g \Longrightarrow S_{\varphi_1} \cap S_g - S_g = \phi$) contradicción.

Por tanto

$$h \notin \mathfrak{A} \text{ y } (\mathfrak{A}, h) \neq (1)$$

pero $g\,h \in (\varphi_1) \Longrightarrow g\,h \in \mathfrak{A}$, y ni g ni h pertenecen a $\mathfrak{A}$. q.e.d.

El ideal $(\mathfrak{A}, g)$ (II, 16) tampoco será primo, y por tanto no maximal, pues tiene también una infinidad numerable de engendradores, es:

$$\mathfrak{A}_1 = (\mathfrak{A}, g) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\varphi_i, g) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\psi_i) \qquad (\psi_i) = (\varphi_i, g)$$

y tenemos

$$\mathfrak{A} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_1 \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_2 \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_n \underset{\neq}{\subset} \cdots \qquad \mathfrak{A}_n = (\mathfrak{A}_{n-1}, g_{n-1})$$

sea

$$\mathfrak{A}_\omega = \bigcup_{i=D}^{\infty} \mathfrak{A}_i$$

Si $\forall g_\omega \in \mathfrak{E}$, es $g_\omega \in \mathfrak{A}_\omega \Longleftrightarrow g_\omega \in \mathfrak{A}_n$ para un n.

Si $(\mathfrak{A}_\omega, g_\omega) = (1) \Longleftrightarrow (\mathfrak{A}_n, g_\omega) = (1)$ para un n.

$\mathfrak{A}_\omega$ tiene también una infinidad numerable de engendradores, pues tiene los φ_i más los g_i. Por consiguiente, tampoco es primo (ni maximal), y existe

$$\mathfrak{A}_\omega \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_{\omega+1} \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_{\omega+1} \underset{\neq}{\subset} \cdots .$$

cuya reunión indicamos por $\mathfrak{A}_{\omega 2}$.

De aquí.

$$\mathfrak{A}_{\omega 2} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_{\omega 2+1} \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_{\omega 2+n} \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

cuya reunión es $\omega_{\omega 3}$, y así sucesivamente.

Sea

$$\mathfrak{A}_\omega \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_{\omega 2} \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_{\omega 3} \underset{\neq}{\subset} \cdots \underset{\neq}{\subset} \mathfrak{A}_{\omega n} \underset{\neq}{\subset} \cdots$$

cuya reunión es $\mathfrak{A}\omega^2$. De este modo llegamos a $\forall \mathfrak{A}_\alpha$ con α número ordinal transfinito de segunda clase, (1) y sólo a éstos. En efecto: Todos los obtenidos son de segunda clase, pues son siguientes de uno o límites de sucesiones, y contiene el primer elemento, si contiene a α contiene $\alpha+1$, y si contiene una sucesión contiene al primero de los siguientes. γ $\forall$ $\mathfrak{A}_\alpha$ para α de segunda clase tiene una infinidad numerable de en-

(1) Sierpinski, pág. 211 y sgs.

gendradores. Para $\alpha = 0$ es cierto ($\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}$) supongámoslo cierto para todo ordinal $< \alpha$. Si α es de primera especie, $\mathfrak{A}_\alpha$ se obtiene de $\mathfrak{A}_{\alpha-1}$ adjuntando un generador, si α es de segunda especie $\mathfrak{A}_\alpha$ es la reunión de $\mathfrak{A}_\beta$ con $\forall \beta < \alpha$, y $\mathfrak{A}_\alpha$ tendrá como engendradores una reunión numerable de conjuntos numerables (según la hipótesis de inducción), es decir: será numerable (1).

Por tanto, el conjunto de ω_α contiene ω_0, si contiene ω_α contiene $\omega_{\alpha+1}$, y si contiene todos los de una sucesión, contiene el primero de los siguientes, por tanto contiene a todos los de segunda clase. (2)

4. — Ideales maximales.

Ya hemos demostrado la existencia de ideales maximales no principales en el teorema 14.

Sea $\mathfrak{A} = \{f_i\}$ $i \in I$ un ideal maximal no principal. Según lo visto en el párrafo 2, es necesario que I sea infinito no numerable, y que no exista ninguna infinidad numerable de engendradores.

Los S_{f_i} cumplen las condiciones que su intersección sea vacía, pero no la de un número finito de ellas.

Por ser $\mathfrak{A}$ maximal $\Longleftrightarrow \forall g \in \mathfrak{E}$ ó $a) \, g \in \mathfrak{A}$, ó $b)$ $(\mathfrak{A}, g) = (1)$
En $a) \Longleftrightarrow \exists\ i_1, i_2, \dots i_v \in I$ (v finito) tal que

$$S_g \supset S_{f_i} \cap S_{f_{i_2}} \cap \dots \cap S_{f_{i_v}} \tag{II, 17}$$

en $b) \Longleftrightarrow \exists\ i_1\ i_2 \dots i_\nu \in I$ (ν finito) tal que

$$S_g \cap S_{q_{i_1}} \cap S_{f_{i_2}} \cap \dots \cap S_{f_{i_v}} = \phi. \tag{II, 18}$$

Teorema 17. — *En un ideal maximal no principal existen engendradores sin ceros múltiples.*

Demostración. — Sea $\mathfrak{A} = \{f_i\}$ y $\mathfrak{A}^* = \{f_i{}^*\}$ (véase pág. 9) evidentemente

$$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}^* \tag{II, 19}$$

pero $\mathfrak{A}^* \neq (1)$, pues si $\mathfrak{A}^* = (1) \Longleftrightarrow \exists\, i_1, i_2, \dots iv$ (ν finito) tal que

$S_{f^*_{i_1}} \cap S_{f^*_{i_2}} \cap \dots \cap S_{f^*_{iv}} = \phi \Longleftrightarrow S_{f_i} \cap S_{fi2} \cap \dots \cap S_{fi\nu} = \phi \Longleftrightarrow \mathfrak{A} = (1)$

(1) Sierpinski, pág. 124.
(2) Sierpinski, págs. 211 y sgs.

contrario a la hipótesis.

Por ser $\mathfrak{A}$ maximal, se deduce de (II, 19) y de $\mathfrak{A}^* \neq (1)$ que

(II, 20) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$$

y los engendradores de $\mathfrak{A}^*$ no tienen ceros múltiples. q.e.d.

TEOREMA 18. — *Cualquier ideal primo salvo el* (0) *y el* (1) *es maximal.*

DEMOSTRACIÓN. — Para ideales principales ya está demostrado (teorema 6); basta, por tanto, demostrarlo para ideales no principales.

Sea $\mathfrak{A}$ un ideal no principal no maximal, basta demostrar que es no primo.

Descompondremos la demostración en tres partes.

a) $\exists f \in \mathfrak{A}$ con ceros simples. Por ser $\mathfrak{A}$ no maximal $\exists g \in \mathfrak{E}$ tal que $g \notin \mathfrak{A}$ y $(\mathfrak{A}, g) \neq (1)$.

Sea

$$(h) = (f) : (g) \quad ; \quad S_h = S_f - S_g$$

como S_f no tiene puntos repetidos $\Rightarrow S_h \cap S_g = \phi$
pero

$$hg \in (f) \subset \mathfrak{A},\ g \notin \mathfrak{A} \Rightarrow h \in \mathfrak{A} \text{ (suponemos } \mathfrak{A} \text{ primo)}$$

pero

$(h, g) = (1)$, $h \in \mathfrak{A} \Rightarrow (h, g) \subset (\mathfrak{A}, g) = (1)$ contradicción.

b) $\forall f \in \mathfrak{A}$ tiene ceros múltiples, pero $\exists f \in \mathfrak{A}$ con multiplicidad de ceros acotada. Sea $S_f = a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ y n_i la multiplicidad de a_i.

$$\varrho = \text{Máx } n_i$$

$$f^* \notin \mathfrak{A}$$

pues tiene ceros simples, pero

$$f^{*\varrho} \in (f) \subset \mathfrak{A}$$

lo que es imposible si $\mathfrak{A}$ es primo (pues si $\mathfrak{A}$ fuera primo $f^{*\varrho} = f^* f^{*\varrho-1}$, $f^* \notin \mathfrak{A} \Rightarrow f^{*\varrho-1} \in \mathfrak{A}$, y $f^{*\varrho-1} \in \mathfrak{A}$, ... $f^* \in \mathfrak{A}$, contradicción).

c) $\forall f \in \mathfrak{A}$ tiene ceros múltiples con multiplicidades no acotadas.

Entonces, $f^* \notin \mathfrak{A}$

por tener f^* ceros simples; de $(f) \subset (f^*)$ se deduce

(II, 21) $$f \in \mathfrak{A} \cap (f^*)$$

y $\mathfrak{A} \cap (f^*)$ es principal, pues si indicamos por S_g la intersección de los ceros de sus engendradores, se verifica

$$S_f \supset S_g \underset{\neq}{\supset} S_{f*} \tag{II, 22}$$

pues si $S_g = S_{f*} \Longrightarrow (f^*)$ es el ideal principal mínimo que contiene $\mathfrak{A} \cap (f^*)$ (teorema 11), y $f^{*2} \in (f^*) \Longrightarrow f^{*2} \in \mathfrak{A} \cap (f^*)$, por tanto existiría en $\mathfrak{A}$ una función con todos sus ceros dobles, que es contrario a la hipótesis c).

Sea g una función entera correspondiente a S_g, de (II, 22) se deduce que $S_{f*} = S_{g*}$, o sea $(f^*) = (g^*)$. Si $\mathfrak{A} \cap (f^*)$ no fuera principal, tendríamos

$$\mathfrak{A} \cap (f^*) \underset{\neq}{\subset} (g) \tag{II, 23}$$

pero $\forall h \in \mathfrak{E}$, tal que $(h) \underset{\neq}{\subset} (g) \Longrightarrow h \in \mathfrak{A} \cap (f^*)$ (teorema 11)

Sea $\forall a_\nu \in S_{f*}$, y sea $((t - a_\nu) g)$ correspondiente a $S_g + a_\nu$, por tanto tenemos

$$((t - a_\nu) g) \underset{\neq}{\subset} (g) \Longrightarrow (t - a_\nu)\, g \in \mathfrak{A} \cap (f^*) \Longrightarrow (t - a_\nu)\, g \in \mathfrak{A} \Longrightarrow g \in \mathfrak{A}$$

Supuesto $\mathfrak{A}$ primo, pues evidentemente $t - a_\nu \notin \mathfrak{A}$ (por ser $(t - a_\nu)$ maximal). Y además $g \in (f^*)$, de donde

$$g \in \mathfrak{A} \cap (f^*)$$

que comparada con (II, 23) resulta

$$\mathfrak{A} \cap (f^*) = (g) \tag{II, 24}$$

Sea a_ν un punto de multiplicidad mayor que uno de S_g, y sea $(h) = (g) : (t - a_\nu)$

es

$$(g) \underset{\neq}{\subset} (h) \underset{\neq}{\subset} (f^*)$$

$$h \notin \mathfrak{A}$$

pues en caso contrario tendríamos la contradicción $h \in (g)$.

Tenemos, pues, $t - a_\nu \notin \mathfrak{A}$, $h \notin \mathfrak{A}$, $(t - a_\nu)\, h \in (g) \subset \mathfrak{A}$, por tanto hay contradicción en suponer $\mathfrak{A}$ primo.

q.e.d.

5. — *Caso que* $\cap S_{f_i} \neq \phi$. — Sea

$$S_g = \bigcap_{\forall i \in I} S_{f_i}$$

y $\mathfrak{A} = \{f_i\}$, $\forall h \in \mathfrak{A}$ es $h = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu f_{i\nu}$, sea

$$\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} : (g)$$

$\tilde{\mathfrak{A}}$ está engendrado por $(f_i) : (g)$, en efecto:

$$\forall \varphi \in \tilde{\mathfrak{A}}$$

es

$$\varphi g \in \mathfrak{A}$$

y

$$\varphi g = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu f_{i\nu}$$

y

$$\varphi = \sum_{\nu=1}^{n} \varrho_\nu \tilde{f}_{i\nu} \qquad (\tilde{f}_{i\nu}) = (f_{i\nu}) : (g)$$

recíprocamente,

$$\bigcap_{\forall i \in I} S_{\tilde{f}_{i\nu}} = \phi$$

pues $S_{\tilde{fi}} = S_{fi} - Sg$, y resulta

$$(g)\,\tilde{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$$

por tanto tenemos:

TEOREMA 19. — *Cualquier ideal no principal es el producto de un ideal principal por un ideal no principal y no contenido en ningún ideal principal más que en el unidad.*

Si $\tilde{\mathfrak{A}}$ es maximal, entre $\mathfrak{A}$ y (g) no hay ningún ideal intermedio.

El teorema 18 es válido en este caso.

Dicho de otra forma, el anillo $\mathfrak{E}$ es monogéneo. (1)

(1) Krull, párr. 9, pág. 22. En alemán «einartig».

CAPÍTULO III

VALORACIÓN

Según hemos visto (teorema 18) los únicos ideales primos de $\mathfrak{E}$ son los ideales (0) y (1), y los ideales maximales.

De ideales maximales hay de dos clases :

1.ª) Ideales maximales principales $(t - a)$ siendo a cualquier número complejo.

2.ª) Ideales maximales no principales.

Sea $\mathfrak{M}$ un ideal maximal de una u otra clase, tenemos el siguiente

TEOREMA 20. — *Los ideales* $\mathfrak{M}^0 = (1)$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^2$, ... $\mathfrak{M}^n$, ... *son todos distintos, y la intersección de todos ellos es el ideal* (0) *si y sólo si* $\mathfrak{M}$ *es maximal principal, y en este caso* $\forall\, g \in \mathfrak{E}, g \neq 0$ *le corresponde un entero* $\alpha \geq 0$ *tal que* $g \in \mathfrak{M}^\alpha$ *y* $g \notin \mathfrak{M}^{\alpha+1}$, *si a* $h \in \varepsilon$, *y* $h \neq 0$ *le corresponde* β, *es decir :* $h \in \mathfrak{M}^\beta$ *y* $h \notin \mathfrak{M}^{\beta+1}$ *a* gh *le corresponde* $\alpha + \beta$.

DEMOSTRACIÓN. — Si $\mathfrak{M}$ es principal, $\mathfrak{M} = (t - a)$, $\mathfrak{M}^n = ((t - a)^n)$, y evidentemente son todos distintos, y si $g \in \mathfrak{M}^n$ para todo n, implica (teorema 4) que $g = 0$, pues a es de multiplicidad infinita, además :

$$\text{Si } g \in \mathfrak{M}^\alpha \text{ y } g \notin \mathfrak{M}^{\alpha+1} \Longleftrightarrow g(t) = (t - a)^\alpha g_1(t),\ g_1(a) \neq 0$$

$$\text{Si } h \in \mathfrak{M}^\beta \text{ y } h \notin \mathfrak{M}^{\beta+1} \Longleftrightarrow h(t) = (t - a)^\beta h_1(t),\ h_1(a) \neq 0$$

Por tanto

$$g(t)\, h(t) = (t - a)^{\alpha+\beta} g_1(t)\, h_1(t) \Longleftrightarrow g\, h \in \mathfrak{M}^{\alpha+\beta} \text{ y } gh \notin \mathfrak{M}^{\alpha+\beta+s}$$

Por otra parte, si $\mathfrak{M}$ es no principal $\mathfrak{M} = \{f_i\}$, $i \in I$ y $\forall\, f_i$ con ceros simples. Es $\mathfrak{M}^2 = \{f_i\, f_j)\ \forall\, i, j \in I$, iguales o distintos y en general

$$\mathfrak{M}^n = \{f_{i1}, f_{i2} \dots f_{in}\}\ \ \forall i_1, i_2, \dots i_n \in I$$

iguales o distintos, y estos ideales son todos distintos, pues tenemos $f_i \in \mathfrak{M}$, $f_i \notin \mathfrak{M}^2$ pues $\forall\, g \in \mathfrak{M}^2$ tiene ceros dobles, ya que

$$g = \sum \varrho_{ij}\, f_i\, f_j \qquad \text{(III, 1)}$$

con sólo un número finito de $\varrho_{ij} \neq 0$, y $S_g = \bigcap_{\varrho_{v,j} \neq 0} S_{f_i} + S_{f_j}$ (teorema 3), y $S_{f_i} + S_{f_j}$ tiene ceros múltiples, y si

$$a \in \bigcap_{v = \forall i,j; \varrho_{i,j} \neq 0} Sf_v$$

es cero doble (por lo menos) de g.

Y en general $f_i^{n-1} \in \mathfrak{M}^{n-1}$, y $f_i^{n-1} \notin \mathfrak{M}^n$, pues $\forall g \in \mathfrak{M}^n$ tiene ceros n-plos (el razonamiento es análogo al anterior).

Por otra parte, si

$$g \in \mathfrak{M} \Longleftrightarrow g^* \in \mathfrak{M}$$

pues si $S_g \supset S_{f_{i1}} \cap S_{f_{i2}} \cap \ldots \cap S_{f_{i_v}}$ con $\forall i_1, i_2, \ldots i_v \in I$ (v finito), y $S_{f_{i1}} \cap S_{f_{i2}} \cap \ldots \cap S_{f_{i_v}}$ carece de puntos múltiples, por consiguiente $Sg^* \supset S_{f_{i1}} \cap S_{f_{i2}} \cap \ldots \cap S_{f_{is}}$ (véase definición pág. 9), es decir: $g^* \in \mathfrak{M}$, el recíproco es inmediato, pues $(g) \in (g^*)$.

Si $(n > 0)$ $g \in \mathfrak{M}^n \Longrightarrow g^* \in \mathfrak{M}$ ya que $g \in \mathfrak{M}$

Sea

$$S_{g*} = a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$$

(distintos dos a dos) ordenados respecto a módulos crecientes. Sea

(III, 2) $(g_1^*) = (g^*) : (t - a_1)$, es $S_{g_1*} = S_{g*} - a_1$ (teorema 3) y

$$(g^*) = (g_1^*)\ (t - a_1)$$

como $t - a_1 \notin \mathfrak{M}$, pues toda función de $\mathfrak{M}$ tiene infinitos ceros (teorema 13), y por ser $\mathfrak{M}$ maximal, y por tanto primo, tenemos

$$g_1^* \in \mathfrak{M}$$

Análogamente

(III, 3) $(g^*_2) = (g_1^*) : (t - a_2)$, y en general $(g_n^*) = (g^*_{n-1}) : (t - a_n)$

Sea $g \in \mathfrak{E}$ tal que

$$S_g = a_1, a_2, a_3, \ldots a_n. \ldots$$

con las multiplicidades 1, 2, 3, ..., n, ... respectivamente, tenemos:

$$(g) \subset (g^*)\,;\ (g) \subset (g^*).\ (g_1^*)\,;\ \ldots\ (g) \subset (g^*).\ (g_1^*)\ \ldots\ (g_n^*)\,;\ \ldots$$

es decir:

$$g \in \mathfrak{M},\ \mathfrak{M}^2,\ \mathfrak{M}^3,\ \ldots\ \mathfrak{M}^n,\ \ldots$$

por tanto

$$g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n$$

y como $g \neq 0$, esta intersección no es el ideal (0). q.e.d.

Todas las valoraciones del cuerpo de las funciones meromorfas que prolongan la valoración trivial del cuerpo de los números complejos son, evidentemente, no arquimedianas, [1] pues todo número entero distinto del cero tiene valor uno.

Consideremos la valoración exponencial, es decir, ha de cumplir las cuatro condiciones [2] (φ función meromorfa)

1.ª — $w(\varphi)$, para $\varphi \neq 0$ es un número real

2.ª — $w(0) = \infty$

(III, 4)

3.ª — $w(\varphi\,\psi) = w(\varphi) + w(\psi)$

4.ª — $w(\varphi + \psi) \geq \text{Mín}\,(w(\varphi), w(\psi))$

y además, si φ es constante $\neq 0$, $w(\varphi) = 0$.

Las funciones φ tales que $w(\varphi) \geq 0$ forman un anillo θ en las funciones meromorfas y las que $w(\varphi) > 0$ forman un ideal que es el único maximal de θ. Consideremos que $\theta \supset \mathfrak{E}$. Es decir:

$$\forall\, g \text{ entera} \Rightarrow w(g) \geq 0.$$

Si la valoración es conocida sólo para las funciones enteras, se puede prolongar de forma única a las funciones meromorfas, pues si $g, h \in \mathfrak{E}$, $w\left(\dfrac{g}{h}\right) = w(g) - w(h)$ y toda función meromorfa es cociente de dos enteras, y además si $\dfrac{g_1}{h_1} = \dfrac{g}{h}$ es

$$w(g_1) - w(h_1) = w(g) - w(h) \text{ [3]}$$

Tenemos, por tanto, una valoración de $\mathfrak{E}$, que cumple las condiciones

(1) Para lo que sigue téngase presente Van der Waerden (1), Cap. X, Deuring párr. 10 o Krull, párr. 5.
(2) Van der Waerden (1), pág. 282.
(3) cfr. Van der Waerden (1), pág. 250.

$$\text{(III, 5)} \quad \begin{array}{l} 1.^a - w(g) \geq 0 \text{ para } g \neq 0 \ (w(a) = 0, \text{ si } a \text{ n.º complejo} \neq 0) \\ 2.^a - w(0) = \infty \\ 3.^a - w(gh) = w(g) + w(h) \\ 4.^a - w(g+h) \geq \text{Mín } (w(g), w(h)) \end{array}$$

De la 1.ª y 3.ª se deduce que toda función entera unitaria tiene el valor 0, pues g, $g^{-1} \in \mathfrak{E}$,

$$w(g^{-1}) = -w(g),\ w(g) \geq 0,\ w(g^{-1}) \geq 0 \Longrightarrow w(g) = 0. \text{ y } w(-g) = w(g)$$

Sea

$$\mathfrak{P} = \{g \in \varepsilon : w(g) > 0\}$$

$\mathfrak{P}$ es un ideal de $\mathfrak{E}$, pues si $w(g) > 0$, $w(h) > 0 \Longrightarrow w(g-h) > 0$ (de la 4.ª).

Si $g \in \mathfrak{P}$, $h \in \mathfrak{E} \Longrightarrow gh \in \mathfrak{P}$, pues $w(gh) = w(g) + w(h) > 0$ ya que $w(g) > 0$, $w(h) \geq 0$.

Además $\mathfrak{P}$ es primo, pues si $gh \in \mathfrak{P}$, $g \notin \mathfrak{P} \Longrightarrow h \in \mathfrak{P}$ pues $w(gh) > 0$, $w(g) = 0$ y de la 3.ª debe ser $w(h) > 0$.

$\mathfrak{P}$ no puede ser el ideal unidad, pues sería $w(1) > 0$, lo que es absurdo.

Quedan, por consiguiente, los siguientes casos posibles :

a) $\mathfrak{P} = (0)$

b) $\mathfrak{P}$ maximal de primera clase (principal)

c) $\mathfrak{P}$ maximal de segunda clase (no principal).

En a) $\forall g \neq 0$ es $w(g) = 0$, que es la valoración trivial de las funciones enteras, y por tanto, la valoración trivial de las funciones meromorfas.

En b), $\mathfrak{P} = (t-a)$, $w(t-a) = v > 0$, podemos hallar una valoración equivalente[1] tal que $w(t-a) = 1$.

$\forall g \in \mathfrak{E}$, y $g \neq 0$ es de la forma

$$g(t) = (t-a)^n g_1(t) \ ; \ g_1(a) \neq 0,\ n \geq 0 \text{ (entero) y es } w(g) = n.$$

---

(1) Van der Waerden (1). Párr. 75.

Para φ función meromorfa $\neq 0$, $\varphi(t) = (t - a)^m \varphi_1(t)$, $\varphi_1(a) \neq 0$ y m entero, la valorización se prolonga a $w(\varphi) = m$, es decir: es la plaza en el punto a. (1)

En c) no corresponde ninguna valoración, pues consideremos la función $g \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{P}^n$, tal que

$S_g = a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$ con las multiplicidades igual al subíndice,

$$|a_1| \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n| \leq \ldots$$

(cfr. teorema 20).

Como $g^* \in \mathfrak{P} \Longrightarrow w(g^*) = \nu > 0$ y de (III, 2) $w(g_1^*) = w(g^*) - w(t - a_1)$ y $w(t - a_1) = 0$ pues $t - a_1 \notin \mathfrak{P}$, por tanto

$$w(g_1^*) = w(g^*)$$

y, en general, reiterando

$$w(g_n^*) = w(g^*)$$

ahora bien

$$g = g^* h,\ h \in \mathfrak{E},\ w(g) = w(g^*) + w(h), \text{ por tanto } w(g) \geq w(g^*).$$

Pero también

$$g = g^* g_1^* \ldots g_{n-1}^* h_n,\ h_n \in \mathfrak{E} \text{ y } w(g) = n\,w(g^*) + w(h_n) \Longrightarrow w(g) \geq n\,w(g^*)$$

y como n es cualquier entero > 0, y $\nu > 0$ debe ser $w(g) = \infty$, pero $g \neq 0$, lo que está en contradicción con (III, 5).

Resumiendo, tenemos el

TEOREMA 21. — *Las únicas valoraciones del cuerpo de funciones meromorfas enteras sobre las funciones enteras son además de la trivial las plazas en $\forall \alpha$ complejo (salvo valoraciones equivalentes).*

El anillo de valoración θ son todas las funciones meromorfas regulares en a, y el ideal $\mathfrak{P}$ de la valoración son todas las funciones meromorfas nulas en a, es por tanto $\mathfrak{P} = (t - a)$ (ideal de θ).

Esta valoración es discreta (2), pues todos los valores son números enteros.

TEOREMA 22. — *θ es noetheriano.*

---

(1) Van der Waerden (1). Párr. 74, pág. 253 ejemplo.
(2) Van der Waerden (1), pág. 253.

DEMOSTRACIÓN. — Sea $\mathfrak{A}$ cualquier ideal de θ, y sea $\varphi \epsilon \mathfrak{A}$ tal que $w(\varphi)$ sea mínimo, si $w(\varphi) = 0$, es $\mathfrak{A} = \theta$, pues φ es unitaria en θ, si $w(\psi) \geq w(\varphi) \Longrightarrow \psi \epsilon \mathfrak{A}$, pues $\psi = \varphi \mathfrak{J}$, y $w(\mathfrak{J}) \geq 0 = \Longrightarrow \mathfrak{J} \epsilon \theta$, por tanto

$$\mathfrak{A} = \{\psi,\ w(\psi) \geqq \psi(\varphi)\}$$ [1]

por tanto si $w(\varphi) = h$ es $\mathfrak{A} = ((t - a)^h)$ ideal de θ. Por consiguiente, es θ de ideales principales, por tanto noetherianos. q.e.d. [2]

Y, finalmente, tenemos el siguiente

TEOREMA 23. — *El cuerpo completo* [3] *respecto a esta valoración es el de series formales de potencias de $t - a$ con coeficientes complejos con un número finito a lo sumo de potencias negativas.*

DEMOSTRACIÓN. — Sea Φ el cuerpo de funciones meromorfas, tenemos

$$\Phi \supset \Omega(t)$$

donde Ω es el cuerpo de los números complejos, y por tanto $\Omega(t)$ el cuerpo de funciones racionales con coeficientes complejos. La reducción de la plaza a de Φ a $\Omega(t)$ es una plaza a de este último. El cuerpo completo de esta valoración de $\Omega(t)$ es el cuerpo de series de potencias formales especificado [4], y como este último contiene a Φ, también es el completo para esta valoración de Φ.

q.e.d.

---

(1) Cfr. Van der Waerden (1), pág. 254. Aufgabe 3.
(2) La demostración es general para todo anillo de valoración discreta.
(3) Van der Waerden (1), párr. 77, pág. 262 y sgs. él emplea la palabra « perfekt » que he preferido traducir por completo, pues se adapta mejor a nuestra nomenclatura.
(4) Van der Waerden (1), párr. 10, pág. 279.

BIBLIOGRAFIA

BIRKHOFF, G. — *Lattice Theory.* — American Mathematical Society. Colloquium Publications. — Vol. XXV. New York (1948).

DEURING, M. — *Algebren.* — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, t. IV, Berlín (1937), p.p. 1-149.

GOURSAT, E. — *Cours d'Analyse Mathématique.* — Tome II. Sixième édition. Gauthier-Villars. París (1942).

KRULL, W. — *Idealtheorie.* — Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. t. IV. Berlín (1937), p.p. 247-406.

SANSONE, G. - GERRETSEN, J. — *Lectures on the theory of functions of a complex variable.* — P. Noordhoff. Groningen (1960).

SIERPINSKI, W. — *Leçons sur les nombres transfinis.* — Collection de Monographies sur la théorie des fonctions. Gauthier-Villars et Cie. París 4 (1928).

THIMM, W. — *Teoria degli anelli di serie di potenze.* — Annali di Matematica pura ed applicata (serie IV, t. LII, 1960), p.p. 247-330.

VALIRON, G. — *Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable.* — Mémorial des Sciences Mathématiques, Fasc. II, Gauthier-Villars (1925).

VAN DER WAERDEN, B. L. — (1) *Algebra.* — Erster Teil. 4. Auflage. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Band XXXIII, Springer. Berlín, Göttingen, Heidelberg (1955).
(2) *Algebra.* — Zweiter Teil. 3. Auflage. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Band XXXIV, Springer. Berlín, Göttingen, Heidelberg (1955).