EQUIVALENCES PRINCIPALES GENERALISEES DANS LES DEMI-GROUPES

par

JOSETTE CALAIS

INTRODUCTION (1)

1) Etant donné un demi-groupe D, un complexe H et un élément x de D, on sait que l'on désigne, respectivement, par $H\cdot.x$, $H.\cdot x$ et $H..x$, le quotient à gauche, à droite et bilatère de H par x, c'est-à-dire, respectivement, l'ensemble des éléments a de D pour lesquels on a $ax \in H$, l'ensemble des éléments b de D pour lesquels on a $xb \in H$, l'ensemble des éléments (a, b) de $D \times D$ pour lesquels on a $axb \in H$. A ces trois quotients sont associées les équivalences principales à gauche ${}_HR$, à droite R_H et bilatère R'_H :

$$x \equiv x' \ ({}_HR) \Longleftrightarrow H\cdot.x = H\cdot.x' ;$$

$$x \equiv x' \ (R_H) \Longleftrightarrow H.\cdot x = H.\cdot x' ;$$

$$x \equiv x' \ (R'_H) \Longleftrightarrow H..x = H..x'.$$

Les deux premières de ces équivalences ont été définies et étudiées par P. DUBREIL [5], et la troisième par R. CROISOT [2]; elles sont respectivement régulière à gauche, régulière à droite et régulière (2).

Le présent travail, qui utilise les méthodes et les résultats de P. DUBREIL [5] et [6], et de R. CROISOT [2] et [3], est consacré à l'étude de familles d'équivalences déduites des précédentes et associées à un complexe H et à une chaîne décroissante C de sous-demi-groupes D_i (i entier positif) de D, convenablement choisie, telle que :

$$D = D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots \supseteq D_i \supseteq D_{i+1} \supseteq \dots$$

---

(1) Les numéros entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin de ce travail.

(2) On dit aussi compatible à gauche, compatible à droite, et compatible.

Ces équivalences sont définies dans D par :

$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,0}) \Longleftrightarrow (H^{\cdot}.x) \cap D_i = (H^{\cdot}.x') \cap D_i\ ;$$

$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{0,j}) \Longleftrightarrow (H.^{\cdot}x) \cap D_j = (H.^{\cdot}x) \cap D_j\ ;$$

$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,j}) \Longleftrightarrow (H..x) \cap (D_i \times D_j) = (H..x') \cap (D_i \times D_j).$$

Dans cette étude, D n'est pas nécessairement abélien.

Les propriétés de ces équivalences dépendent du complexe H, mais aussi de la chaîne C choisie. Or, les équivalences $\varrho_H^{1,0}$, $\varrho_H^{0,1}$ et $\varrho_H^{1,1}$ s'identifient avec les équivalences principales ${}_HR$, R_H et R_H', et l'on sait que l'intérêt de ces dernières réside surtout dans leurs propriétés de régularité ; les équivalences $\varrho_H^{i,0}$, $\varrho_H^{0,j}$ et $\varrho_H^{i,j}$ ne constituent donc une bonne généralisation des équivalences principales que dans la mesure où elles possèdent les mêmes propriétés de régularité. On est ainsi conduit à choisir, pour définir les équivalences $\varrho_H^{i,0}$, $\varrho_H^{0,j}$ et $\varrho_H^{i,j}$, respectivement, une chaîne C_R d'idéaux à droite R_i de D, une chaîne C_L d'idéaux à gauche L_i de D et une chaîne C_M d'idéaux bilatères M_i de D. Ainsi définies, les équivalences $\varrho_H^{i,0}$, $\varrho_H^{0,j}$ et $\varrho_H^{i,j}$ sont respectivement régulières à gauche, régulières à droite et régulières ; leurs ensembles ordonnés par l'inclusion forment, respectivement, deux chaînes croissantes C_H et C_H' admettant pour élément minimum $\varrho_H^{1,0}$ pour l'une et $\varrho_H^{0,1}$ pour l'autre :

$$C_H : \varrho_H^{1,0} \subseteq \varrho_H^{0,2} \subseteq \dots \subseteq \varrho_H^{i,0} \subseteq \varrho_H^{i+1,0} \subseteq \dots$$

$$C_H' : \varrho_H^{0,1} \subseteq \varrho_H^{0,2} \subseteq \dots \subseteq \varrho_H^{0,j} \subseteq \varrho_H^{0,j+1} \subseteq \dots ,$$

et un tableau T_H qui s'écrit, en remplaçant les signes d'inclusion par des flèches :

$$\varrho_H^{1,n} \qquad \varrho_H^{2,n-1} \ \text{-------------} \ \varrho_H^{n-1,2} \qquad \varrho_H^{n,1}$$

$$\begin{tikzcd}
\varrho_H^{1,3} & & \varrho_H^{2,2} & & \varrho_H^{3,1} \\
& \varrho_H^{1,2} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \varrho_H^{2,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& & \varrho_H^{1,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Evidemment, si les chaînes qui servent à définir les équivalences considérées sont finies, les chaînes C_H, C'_H et le tableau T_H sont finis.

2) Les résidus de H par rapport aux équivalences $\varrho_H^{i,0}$, $\varrho_H^{0,j}$ et $\varrho_H^{i,j}$ sont définis de la même façon que les résidus de H par rapport aux équivalences principales, et sont respectivement notés : $W_H^{i,0}$, $W_H^{0,j}$ et $W_H^{i,j}$. Leurs ensembles ordonnés par l'inclusion forment respectivement des chaînes γ_H et γ'_H et un tableau τ_H semblables aux chaînes C_H, C'_H et au tableau T_H. Les éléments minima de γ_H, γ'_H et τ_H étant respectivement $W_H^{1,0}$, $W_H^{0,1}$ et $W_H^{1,1}$, c'est-à-dire les résidus de H par rapport à chacune des trois équivalences principales.

Les résidus $W_H^{i,0}$, $W_H^{0,j}$ et $W_H^{i,j}$ sont respectivement des idéaux à gauche, à droite et bilatère et des classes modulo $\varrho_H^{i,0}$, $\varrho_H^{0,j}$ et $\varrho_H^{i,j}$. Si H est tel que l'on ait $W_H^{i,j} = \phi$ pour un couple quelconque (i, j) $(i \geq 1, j \geq 1)$, H est bilatèrement net [2], et réciproquement. Par contre, si $W_H^{i,0} = \phi$ pour un entier $i > 1$ (resp. $W_H^{0,j} = \phi$ pour un entier $j > 1$), H est net à gauche (resp. à droite) mais la réciproque n'est pas vraie en général.

L'étude de ces résidus fait l'objet du paragraphe II, dans lequel on examine en particulier à quelle condition un idéal à gauche, à droite ou bilatère de D peut être le résidu d'un complexe H par rapport à une équivalence $\varrho_H^{i,0}$, $\varrho_H^{0,j}$ ou $\varrho_H^{i,j}$, les chaînes C_R, C_L et C_M étant données.

Ceci conduit à généraliser la notion d'idéal fermé à gauche, à droite [6] ou bilatèrement fermé [2], ainsi que les notions d'idéal fortement large à gauche, à droite ou bilatère et de complexe dégagé de son résidu à gauche, à droite ou bilatère [8].

Dans sa thèse, P. LEFEBVRE [8] étudie les complexes W-minimaux à droite, par exemple, c'est-à-dire les complexes H dégagés de leur résidu à droite et minimaux pour la condition $W_H = W$, W étant un idéal à droite, fermé à droite, donné. De façon analogue, il est possible de considérer des complexes $W^{i,0}$-minimaux, $W^{0,j}$-minimaux ou $W^{i,j}$-minimaux. Si H est un complexe $W^{i,0}$ -minimal, par exemple, pour $i > 1$, il est W-minimal à gauche, mais la réciproque n'est pas vraie en général.

3) Les notions de complexe fort [5] ou bilatèrement fort [2], parfait à gauche, à droite [5] ou bilatèrement [2] correspondent ici à celles de complexe $\varrho^{i,0}$-fort, $\varrho^{0,j}$-fort, $\varrho^{i,j}$-fort, $\varrho^{i,0}$-parfait, $\varrho^{0,j}$-parfait et $\varrho^{i,j}$-parfait, et sont étudiées et comparées entre elles dans les paragraphes III et IV. On remarque en particulier qu'un complexe

$\varrho^{i,0}$-fort pour un $i > 1$ n'est pas nécessairement $\varrho^{0,i}$-fort, comme c'est le cas lorsque $i = 1$. Les théorèmes 3-1 et 3-2 caractérisent respectivement un complexe $\varrho^{i,0}$-fort et un complexe $\varrho^{i,j}$-fort.

4) Dans les paragraphes V et VI toutes les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ ($ij \geq 0$, i et j non simultanément nuls) sont définies à partir d'une même chaîne d'idéaux bilatères C_M, ce qui permet de les comparer et de définir les notions de complexe ϱ^i-équirésiduel et de complexe ϱ^i-symétrique analogues à celles de complexe équirésiduel et de complexe symétrique [5]. De plus, les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ et $\varrho_H^{0,j}$ étant définis à partir d'une chaîne d'idéaux bilatères, la condition: H est net à gauche (ou à droite) est équivalente à la condition $W_H^{i,0} = \phi$ quel que soit $i \geq 1$ (ou $W_H^{0,j} = \phi$ quel que soit $j \geq 1$).

Lorsque le demi-groupe D est tel qu'il existe des entiers $n > 1$, pour lesquels on a $D^n \neq D$, on peut choisir pour chaîne C_M, celle pour laquelle on a $M_i = D^i$. Cette chaîne est notée C_D et est appelee chaîne principale de D, et il est possible de caractériser la chaîne C_D parmi les chaînes C de sous-demi-groupes de D, en utilisant la notion de chaîne liée à gauche ou à droite définie dans le paragraphe II. Une chaîne C de sous-demi-groupes D_i de D est dite liée à gauche si l'on a $(D_i \cdot . D_{i-1})\, D_{i-1} = D_i$ pour tout $i > 1$. On définit de façon analogue une chaîne liée à droite ; une chaîne liée est alors une chaîne liée à droite et liée à gauche. Une chaîne C de sous-demi-groupes de D est la chaîne C_D, si et seulement si, elle est liée à gauche (ou à droite) et si de plus on a $D_i \cdot . D_{i-1} = D$ (ou $D_i . \cdot D_{i-1} = D$) pour tout $i > 1$. C'est à cette propriété caractéristique que sont dues les propriétés particulières des équivalences $\varrho_H^{i,j}$ et des résidus $W_H^{i,j}$ ($ij \geq 0$) lorsqu'on les définit dans D à partir de la chaîne C_D. Ces propriétés sont étudiées dans le paragraphe V.

5) Le paragraphe VI est consacré à l'étude des ensembles quotients $\dfrac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ ($ij \geq 0$), les équivalences étant toujours définies à partir d'une chaîne C_M d'idéaux bilatères.

a) Dans le cas $ij = 0$, l'ensemble $\dfrac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ n'est un demi-groupe que si l'équivalence $\varrho_H^{i,j}$ est régulière, or cette condition est safisfaite en particulier lorsque H est ϱ^i-symétrique. On suppose donc H ϱ^i-symétrique, et de plus $\varrho^{i,0}$-fort (par exemple). On distingue alors deux cas suivant que H est net ou ne l'est pas.

Dans le cas où H est net, l'ensemble $\frac{D}{\varrho_H^i}$ est un groupe (théorème 6-3). Dans le cas où H n'est pas net, on est amené à généraliser la notion de noeud définie par P. DUBREIL [5], et lorsque l'equivalence ϱ_H^i est définie à partir de la chaîne C_D, le noeud de $\frac{D}{\varrho_H^i}$, s'il n'est pas vide, est un groupe (théorème 6-6). La démonstration de ce théorème s'appuie sur le fait que si H est ϱ^i-symétrique, $\varrho^{i,0}$-fort et si le noeud de $\frac{D}{\varrho_H^i}$ n'est pas vide, H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ_H^i (propriété 6-3). Cette propriété n'est plus valable dans le cas où ϱ_H^i est définie à partir d'une chaîne C_M quelconque, cependant, au moins dans le cas où H est $\varrho^{i,0}$-parfait, le noeud de $\frac{D}{\varrho_H^i}$, s'il n'est pas vide est un groupe (théorème 6-9).

b) Dans le cas $ij \neq 0$, l'équivalence $\varrho_H^{i,j}$ est régulière, l'ensemble $\frac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ est un demi-groupe. Deux cas seulement sont envisagés :

— H est $\varrho^{i,j}$-parfait et bilatèrement net, l'ensemble $\frac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ est un semi-groupe à noyau (théorème 6-10) ;

— H est un sous-demi-groupe $\varrho^{i,j}$-fort non bilatèrement net, que l'on désigne par S : l'enveloppe unitaire de S étant U, on a $\frac{D}{\varrho_S^{i,j}} = \frac{D}{\varrho_U^{1,1}}$, U est bilatèrement fort, non bilatèrement net, l'étude de cet ensemble se ramène à celle faite par R. CROISOT dans [2].

6) Les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(i,\ j \geq 0)$, lorsqu'elles sont définies à partir de la chaîne C_D, figurent comme cas particuliers dans les travaux de R. DESQ [4] et P. GRILLET [7] où elles sont respectivement notées $r_H^{\alpha,\beta}$ et $\mathcal{P}_H^{C\alpha,\beta}$ $(\alpha = i,\ \beta = j)$. Les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$), lorsqu'elles sont définies à partir d'une chaîne C_R (resp. C_L, C_M) quelconque, peuvent d'ailleurs être interprétées à l'aide de la notion de tas définie par P. GRILLET [7]. Par exemple, l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ associée à H et définie à partir de la chaîne C_R est l'équivalence principale associée à H dans le tas $(D,\ \Sigma_g(R_i))$. La proposition 1,1 qui nous a conduit à choisir une chaîne d'idéaux à droite C_R afin que les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ soient régulières à gauche dans D trouve sa justification dans la propriété 14 de P. GRILLET [7].

7) Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur R. Croisot, rapporteur de cette thèse, qui m'initia à la recherche et me guida dans l'élaboration de ce travail, et à Monsieur P. Dubreil qui m'a fait l'honneur de présider mon jury et dont les encouragements et les conseils me furent précieux.

Je suis également heureuse de remercier Monsieur J. Deny, qui a bien voulu me donner un second sujet, Monsieur H. Villat, Membre de l'Institut qui présenta mes notes a l'Académie, et Monsieur P. Lefebvre pour le bienveillant intérêt qu'il m'a témoigné.

EQUIVALENCES PRINCIPALES GENERALISEES DANS LES DEMI-GROUPES

I. *GENERALITES*

Soit D un demi-groupe, et soit H un complexe de D. Considérons une chaîne de sous-demi-groupes D_i de D telle que

$$D = D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots \supseteq D_i \supseteq D_{i+1} \supseteq \dots$$

Nous désignerons par C une telle chaîne.

Definition 1-1

Etant donné un demi-groupe D, un complexe H de D et une chaîne C de sous-demi-groupes de D, nous désignerons par $\varrho_H^{i,0}$, $\varrho_H^{0,j}$ et $\varrho_H^{i,j}$ les relations d'équivalences respectivement définies dans D par :

$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,0}) \iff (H^{\cdot}.x) \cap D_i = (H^{\cdot}.x') \cap D_i \, ;$$

$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{0,j}) \iff (H.^{\cdot}x) \cap D_j = (H.^{\cdot}x') \cap D_j \, ;$$

$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,j}) \iff (H..x) \cap (D_i \times D_j) = (H..x') \cap (D_i \times D_j).$$

Remarques : 1.°) Les équivalences $\varrho_H^{1,0}$, $\varrho_H^{0,1}$ et $\varrho_H^{1,1}$ ne sont autres que les équivalences principales ${}_HR$, R_H définies par P. Dubreil [5], et R'_H définie par R. Croisot [2].

2.°) Dans toute cette étude, i et j sont des entiers positifs ou nuls, mais *non simultanément nuls*.

Propriété 1-1

Les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$) sont régulières à gauche (resp. à droite, à droite et à gauche) si la chaîne C est une chaîne d'idéaux à droite (resp. à gauche, bilatères) de D.

$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,0}) \quad \text{implique :} \quad ax \in H \iff ax' \in H, \quad \text{si} \quad a \in D_i.$$

Si D_i est un idéal à droite, on a $ad \in D_i$ quels que soient $a \in D_i$ et $d \in D$. Par suite $adx \in H$ implique $adx' \in H$, et réciproquement. L'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ est régulière à gauche.

(Démonstrations analogues dans les autres cas).

Dans la suite nous considérerons les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ respectivement ($\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$) associées à un complexe H de D et à une chaîne C_R (resp. C_L, C_M) d'idéaux à droite (resp. à gauche, bilatères) de D.

Les chaînes C_R, C_L et C_M s'écrivent respectivement :

$$D = R_1 \supseteq R_2 \supseteq \ldots \supseteq R_i \supseteq R_{i+1} \supseteq \ldots,$$
$$D = L_1 \supseteq L_2 \supseteq \ldots \supseteq L_i \supseteq L_{i+1} \supseteq \ldots,$$
$$D = M_1 \supseteq M_2 \supseteq \ldots \supseteq M_i \supseteq M_{i+1} \supseteq \ldots .$$

et nous avons :

$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,0}) \iff (H\cdot.x) \cap R_i = (H\cdot.x') \cap R_i,$$
$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{0,j}) \iff (H.\cdot x) \cap L_j = (H.\cdot x') \cap L_j,$$
$$x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,j}) \iff (H..x) \cap (M_i \times M_j) = (H..x') \cap (M_i \times M_j).$$

Etant donné le complexe H de D, ainsi que les chaînes C_R, C_L et C_M, nous poserons :

$$Q_H^{i,0} = (H\cdot.x) \cap R_i \; ; \quad Q_H^{0,j} = (H.\cdot x) \cap L_j \; ; \quad Q_H^{i,j} = (H..x) \cap (M_i \times M_j).$$

Définition 1-2

On appelle résidu de H par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$) l'ensemble $W_H^{i,0}$ (resp. $W_H^{0,j}$, $W_H^{i,j}$) des éléments $x \in D$ pour lesquels on a $Q_x^{i,0} = \phi$ (resp. $Q_x^{0,j} = \phi$, $Q_x^{i,j} = \phi$).

REMARQUE : on a $W_H^{1,0} = {}_HW$, $W_H^{0,1} = W_H$, $W_H^{1,1} = W_H'$ avec les notations utilisées dans [5] et [2].

Propriété 1-2

Si $W_H^{i,0}$ (resp. $W_H^{0,j}$, $W_H^{i,j}$) n'est pas vide, c'est une classe modulo $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$) et un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) de D.

1.°) Pour tout $x \in W_H^{i,0}$, on a $Q_x^{i,0} = \phi$, $W_H^{i,0}$ est donc une classe modulo $\varrho_H^{i,0}$.

2.°) Soient $x \in W_H^{i,0}$ et $a \in D$. Si $ax \notin W_H^{i,0}$, il existe $y \in R_i$ tel que $yax \in H$, ce qui entraîne $Q_x^{i,0} \neq \phi$. Ceci est contraire à l'hypothèse, donc $ax \in W_H^{i,0}$.

(Démonstrations analogues dans les autres cas).

Théorème 1-1

1) $x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,0})$ entraine $x \equiv x' \ (\varrho_H^{i+1,0})$;

2) $x \equiv x' \ (\varrho_H^{0,j})$ entraine $x \equiv x' \ (\varrho_H^{0,j+1})$;

3) $x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,j})$ entraine $x \equiv x' \ (\varrho_H^{i+1,j})$ et $x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,j+1})$

Soit $x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,0})$, on a $(H\cdot.x) \cap R_i = (H\cdot.x') \cap R_i$.

La condition $R_{i+1} \subseteq R_1$ entraîne $(H^{\cdot}.x) \cap R_{i+1} = (H^{\cdot}.x') \cap R_{i+1}$, c'est-à-dire $x \equiv x'$ $(\varrho_H^{i+1,0})$.

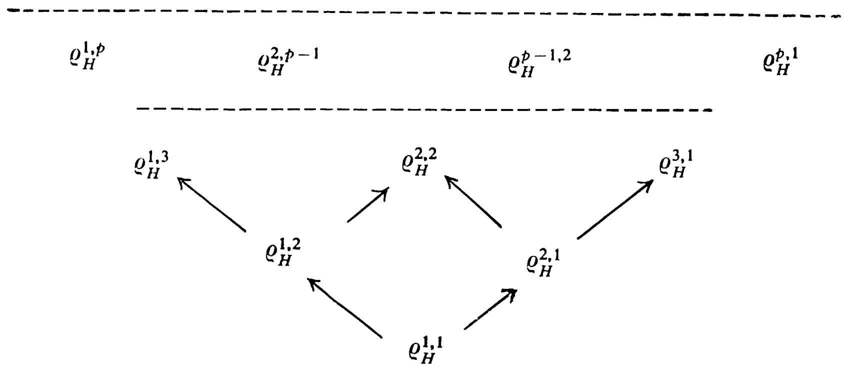
(Démonstrations analogues pour les autres cas).

Conséquences : 1.°) L'ensemble des équivalences $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$) ordonné par l'inclusion forme une chaîne C_H (resp. C_H') pour laquelle $\varrho_H^{1,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,1}$) est élément minimum.

$$C_H \text{ s'écrit : } \varrho_H^{1,0} \subseteq \varrho_H^{2,0} \subseteq \ldots \subseteq \varrho_H^{i,0} \subseteq \varrho_H^{i+1,0} \subseteq \ldots$$

$$C_H' \text{ s'écrit : } \varrho_H^{0,1} \subseteq \varrho_H^{0,2} \subseteq \ldots \subseteq \varrho_H^{0,j} \subseteq \varrho_H^{0,j+1} \subseteq \ldots$$

2.°) On peut ordonner l'ensemble des équivalences $\varrho_H^{i,j}$ par l'inclusion, ce qui permet d'écrire le tableau T_H suivant, dans lequel les flèches sont mises à la place du signe d'inclusion $\subseteq$. L'équivalence $\varrho_H^{1,1}$ est l'élément minimum dans l'ensemble des équivalences $\varrho_H^{i,j}$.



Théorème 1-2

1) Si la chaîne C_R (resp. C_L) est finie, son élément minimum étant R_n (resp. L_n), la chaîne C_H (resp. C_H') est finie et son élément maximum est $\varrho_H^{n,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,n}$).

2) Si la chaîne C_M est finie, son élément minimum étant M_n, le tableau T_H est fini et l'ensemble des équivalences $\varrho_H^{i,j}$ admet $\varrho_H^{n,n}$ pour élément maximum.

En particulier, si D est simple à droite (resp. à gauche, bilatéralement simple) la chaîne C_H (resp. la chaîne C_H', le tableau T_H) se réduit à son élément minimum $\varrho_H^{1,0} = {}_HR$ (resp. $\varrho_H^{0,1} = R_H$, $\varrho_H^{1,1} = R_H'$).

1) Dire que C_R est finie et admet pour élément minimum R_n, c'est dire que l'on a $R_{n+p} = R_n$ quel que soit p entier positif, donc

$$Q_x^{n+p,0} = Q_x^{n,0} \text{ quel que soit } p > 0, \text{ d'où}$$
$$\varrho_H^{n+p,0} = \varrho_H^{n,0} \text{ quel que soit } p > 0.$$

2) De même, si C_M est finie et admet pour élément minimum M_n, dans le tableau T_H, on a

dans la ligne correspondant à $i + j = n + 2$,

$$\varrho_H^{1,n+1} = \varrho_H^{1,n} \quad \text{et} \quad \varrho_H^{n+1,1} = \varrho_H^{n,1} ;$$

Cette ligne se réduit donc à :

$$\varrho_H^{2,n}, \varrho_H^{3,n-1}, \ldots, \varrho_H^{n-1,3}, \varrho_H^{n,2}.$$

De la même façon la ligne suivante, correspondant à $i + j = n + 3$, se réduit à :

$$\varrho_H^{3,n}, \varrho_H^{4,n-1}, \ldots, \varrho_H^{n-1,4}, \varrho_H^{n,3} ;$$

et ainsi de suite, la ligne de rang $i + j = 2n$ se réduit à $\varrho_H^{n,n}$, et $\varrho_H^{n+p,\, n+q} = \varrho_H^{n,n}$ quels que soient p et q entiers positifs.

II. *ETUDE DES RESIDUS*

Propriété 2-1

On a :

1) $W_H^{i,0} \subseteq W_H^{i+1,0}$ pour tout $i \geq 1$;

2) $W_H^{0,j} \subseteq W_H^{0,j+1}$ pour tout $j \geq 1$;

3) $W_H^{i,j} \subseteq W_H^{i+1,j} \cap W_H^{i,j+1}$ pour tout $i \geq 1$ et tout $j \geq 1$.

En effet, si $x \in W_H^{i,0}$, on a $Q_x^{i,0} = \phi$, d'où $Q_x^{i+1,0} = \phi$ et $x \subseteq W_H^{i+1,0}$. (Démonstrations analogues pour les autres cas).

CONSÉQUENCES : 1.°) L'ensemble des résidus $W_H^{i,j}$ (resp. $W_H^{0,j}$) ordonné par l'inclusion forme une chaîne γ_H (resp. γ_H') pour laquelle

$W_H^{1,0}$ (resp. $W_H^{0,1}$) est l'élément minimum. γ_H et γ'_H s'écrivent respectivement :

$$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{2,0} \subseteq \ldots \subseteq W_H^{i,0} \subseteq W_H^{i+1,0} \subseteq \ldots$$
$$W_H^{0,1} \subseteq W_H^{0,2} \subseteq \ldots \subseteq W_H^{0,i} \subseteq W_H^{0,i+1} \subseteq \ldots$$

2.°) Pour l'ensemble des résidus $W_H^{i,j}$ ordonné par l'inclusion, on peut écrire le tableau τ_H suivant, dans lequel les flèches sont mises à la place du signe d'inclusion.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
W_H^{1,p} & & W_H^{2,p-1} & & W_H^{p-1,2} & & W_H^{p,1} \\
& W_H^{1,3} & & W_H^{2,2} & & W_H^{3,1} & \\
& & W_H^{1,2} \arrow[ul] \arrow[ur] & & W_H^{2,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & \\
& & & W_H^{1,1} \arrow[ul] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Propriété 2-2

Le résidu $W_H^{i,j}$ $(i > 1,\ j > 1)$ est vide si et seulement si $W_H^{1,1}$ est vide, c'est-à-dire si H bilatèralement net [2].

1) Supposons que l'on ait $W_H^{i,j} = \phi$ pour un couple d'entiers i, j tels que $i \geq 1$ et $j \geq 1$. D'après ce qui précède, on a $W_H^{1,1} \subseteq W_H^{i,j}$, d'où $W_H^{1,1} = \phi$.

2) Supposons que l'on ait $W_H^{1,1} = \phi$ et $W_H^{i,j} \neq \phi$ pour un couple d'entiers i, j tels que $i \geq 1$ et $j \geq 1$. Soit $x \in W_H^{i,j}$; quels que soient $a \in M_i$ et $b \in M_j$, on a $axb \notin H$. Or, H étant bilatèralement net, on en déduit qu'il existe a' et $b' \in D$ tels que $a'axbb' \in H$. Mais on a $aa' \in M_i$ et $bb' \in M_j$, ce qui entraîne $Q_x^{i,j} \neq \phi$. Ceci étant contraire à l'hypothèse, $W_H^{i,j} = \phi$ quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$.

Dans le cas des résidus $W_H^{i,0}$ (resp. $W_H^{0,j}$), la condition $W_H^{i,0} = \phi$ pour un entier $i > 1$ (resp. $W_H^{0,j} = \phi$ pour un entier $j > 1$) entraîne $W_H^{1,0} = \phi$ (resp. $W_H^{0,1} = \phi$), mais la réciproque n'est pas vraie en général, comme le montre l'exemple cité plus loin. Nous avons cependant la propriété suivante :

Propriété 2-3

Si les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$) associées à un complexe H de D sont définies à partir d'une chaîne C_μ d'ideaux bilatères μ_1 de D telle que

$$D = \mu_1 \supseteq \mu_2 \supseteq \dots \supseteq \mu_i \supseteq \mu_{i+1} \supseteq \dots,$$

on a $W_H^{i,0} = \phi$ pour tout entier $i > 1$ (resp. $W_H^{0,j} = \phi$ pour tout entier $j > 1$) si et seulement si l'on a $W_H^{1,0} = \phi$ (resp. $W_H^{0,1} = \phi$).

D'après ce qui précède, il suffit de montrer que si l'on a $W_H^{1,0} = \phi$, on a aussi $W_H^{i,0} = \phi$ pour tout $i > 1$. Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, c'est-à-dire que l'on ait $W_H^{1,0} = \phi$ et $W_H^{i,0} \neq \phi$ pour un entier $i > 1$.

Soit $x \in W_H^{i,0}$; quel que soit $a \in \mu_i$, on a $ax \notin H$.

Or, par hypothèse, on a $H^{\cdot}.ax \neq \phi$, donc il existe $a' \in D$ tel que $a'ax \in H$. Mais $a'a \in \mu_i$ et par suite on a $Q_x^{i,0} \neq \phi$, ce qui est contraire à l'hypothèse, d'où la propriété énoncée.

Propriété 2-4

Soit, dans D, un complexe H et une chaîne C_R (resp. C_L, C_M), si H vérifie la condition : $H \cap W_H^{i,0} = \phi$ (resp. $H \cap W_H^{0,j} = \phi$, $H \cap W_H^{i,j} = \phi$), on a $W_H^{i,0} = W_H^{1,0}$ (resp. $W_H^{0,j} = W_H^{0,1}$, $W_H^{i,j} = W_H^{1,1}$).

Soit H tel que $W_H^{i,0} \cap H = \phi$. D'après la propriété 2-1, on a $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{i,0}$. Il suffit de démontrer l'inclusion : $W_H^{i,0} \subseteq W_H^{1,0}$. Soit $x \notin W_H^{1,0}$, il existe $a \in D$, tel que $ax \in H$, d'où $ax \notin W_H^{i,0}$, et par suite $x \notin W_H^{i,0}$, puisque $W_H^{i,0}$ est un idéal à gauche. On a donc $D - W_H^{1,0} \subseteq D - W_H^{i,0}$, c'est-à-dire $W_H^{i,0} \subseteq W_H^{1,0}$.

D'après la propriété 2-1, on a alors :

$W_H^{p,0} = W_H^{1,0}$, quel que soit p tel que $1 \leq p \leq i$.

(on a une démonstration analogue pour les cas semblables).

Exemple d'équivalences $\varrho_H^{i,0}$ et $\varrho_H^{0,j}$ définies dans un demi-groupe D.

Considérons le demi-groupe bicyclique $C(p, q)$ [1] engendré par p et q tels que $pq = 1$, 1 étant élément unité dans $C(p, q)$. On peut écrire les éléments de ce demi-groupe suivant le tableau T :

$$\begin{array}{llll}
1 & p & p^2 & \cdots\cdots \\
q & qp & qp^2 & \cdots\cdots \\
q^2 & q^2p & q^2p^2 & \cdots\cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \\
\cdot & \cdot & \cdot &
\end{array}$$

On montre que tout idéal à droite (resp. à gauche) de $C(p, q)$ est principal. L'idéal à droite contenant $q^k p^l$ est formé par l'ensemble des éléments du tableau T situés sur la ligne de rang $k+1$ et au-dessus de cette ligne. L'idéal à gauche contenant $q^k p^l$ est formé par l'ensemble des éléments de T situés sur la colonne de rang $l+1$ et à droite de cette colonne.

Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble des entiers positifs N et l'ensemble des idéaux à droite (resp. à gauche) de $C(p, q)$, et l'on peut écrire, en posant $C(p, q) = D$,

$$D = R_1 \supseteq R_2 \supseteq \dots \supseteq R_i \supseteq R_{i+1} \supseteq \dots \ (C_R),$$
$$D = L_1 \supseteq L_2 \supseteq \dots \supseteq L_i \supseteq L_{i+1} \supseteq \dots \ (C_L).$$

Avec ces notations R_i (resp. L_i) est l'idéal à droite (resp. à gauche) contenant $q^{i-1} p^l$ (resp. $q^k p^{i-1}$).

Considérons le complexe H formé par l'ensemble des éléments appartenant à la ligne de rang $r+1$ du tableau T, c'est-à-dire :

$H = \{q^r p^s\}$ où r est fixe et où s peut prendre toute valeur entière positive ou nulle.

1) Considérons les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ associées à H et définies dans D à partir de la chaîne C_R.

Soit $x = q^m p^n$ appartenant à D. Le quotient $Q_x^{1,0}$ est l'ensemble des éléments $q^k p^l$ tels que l'on ait :

soit $r = k + m - l$ et $l < m$,

soit $r = k$ et $l \geq m$.

De toute façon, on a $k \leq r$. Par suite quel que soit $x \in D$, on a

$$Q_x^{i,0} \neq \phi \quad \text{si} \quad i \leq r+1,$$

et

$$Q_x^{i,0} = \phi \quad \text{si} \quad i > r+1.$$

Par suite, on a $W_H^{i,0} = \phi$ si $i \leq r + 1$, en particulier $W_H^{1,0} = \phi$, mais $W_H^{i,0} = D$ si $i > r + 1$. Ceci montre que si l'on a, $W_H^{1,0} = \phi$, on n'a pas nécessairement $W_H^{i,0} = \phi$ pour tout $i > 1$.

2) Considérons maintenant les équivalences $\varrho_H^{0,j}$ associées à H et définies dans D à partir de la chaîne C_L. D'après ce qui précède $W_H^{0,1}$ n'est pas vide, et l'on a $W_H^{0,1} = R_{r+2}$. On vérifie d'ailleurs que, pour cet exemple, on a $W_H^{0,i} = W_H^{0,1}$.

3) Le demi-groupe $D = C(p, q)$ étant simple, les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ coïncident toutes avec $\varrho_H^{1,1}$ et H est bilatèralement net.

Revenons maintenant à la théorie générale pour étudier à quelle condition un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W de D peut être le résidu d'un complexe H par rapport à une équivalence $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$).

Théorème 2-1

Pour qu'un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W de D soit le résidu d'un complexe H par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$), il faut et il suffit qu'il vérifie la relation $F_{i,0}$: $W = R_i W .\cdot R_i$ [resp. $F_{0,j}$: $W = WL_j \cdot . L_j$, $F_{i,j}$: $W = (M_i W M_j .\cdot M_i) \cdot . M_j$].

1) Par hypothèse $W = W_H^{i,0}$.

soit $x \in W$, on a $R_i x \subseteq D - H$, d'où $x \in (D - H) .\cdot R_i$.

soit $x \in (D - H) .\cdot R_i$, on a $R_i x \subseteq D - H$, d'où $x \in W$.

Il en résulte que $W = (D - H) .\cdot R_i$, c'est-à-dire que W est un idéal à gauche fermé à gauche par rapport à R_i [6], et l'on a

$$F_{i,0} \qquad\qquad W = R_i W .\cdot R_i.$$

De plus, R_i étant un idéal à droite, si $x \in W$, on a

$$R_i x \subseteq R_i - (R_i \cap H), \quad \text{d'où} \quad x \in [R_i - (R_i \cap H)] .\cdot R_i.$$

Réciproquement, soit $x \in [R_i - (R_i \cap H)] .\cdot R_i$, on a

$$R_i x \subseteq [R_i - (R_i \cap H)] \subseteq D - H, \quad \text{d'où} \quad x \in W_H^{i,0} = W.$$

On peut écrire

$$W = [R_i - (R_i \cap H)] .\cdot R_i$$

2) Par hypothèse, W est un idéal à gauche, fermé à gauche par rapport à R_i, c'est-à-dire vérifiant la relation $F_{i,0}$. Montrons qu'il

existe dans D des couplexes H admettant W comme résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$.

Posons $H = D - R_i W$, et $K = R_i - R_i W$.

On a $W_H^{i,0} = (D - H) .\cdot R_i = R_i W .\cdot R_i = W$,

$$W_K^{i,0} = [R_i - (R_i \cap K)] .\cdot R_i = R_i W .\cdot R_i = W.$$

La démonstration est analogue dans le cas $W = W_H^{0,j}$, démontrons le théorème dans le cas $W = W_H^{i,j}$.

1) Par hypothèse $W = W_H^{i,j}$.

Soit $x \in W$, on a $M_i x M_j \subseteq D - H$, d'où $x \in [(D - H) .\cdot M_i] \cdot . M_j$.

Soit $x \in [(D - H) .\cdot M_i] \cdot . M_j$, on a $M_i x M_j \subseteq D - H$, d'où $x \in W$.

On en déduit que $W = [(D - H) .\cdot M_i] \cdot . M_j$.

Il en résulte, d'après le théorème 30 démontré par R. Croisot dans [2], que l'on peut écrire :

$$(F_{i,j}) \qquad W = (M_i W M_j .\cdot M_i) \cdot . M_j.$$

M_i et M_j étant des idéaux bilatères, si l'on a $x \in W$, on a en particulier, $M_i x M_j \subseteq M_i - (M_i \cap H)$.

$$\text{d'où} \quad x \in [[M_i - (M_i \cap H)] .\cdot M_i] \cdot . M_j.$$

Réciproquement, soit $x \in [[M_i - (M_i \cap H)] .\cdot M_i] \cdot . M_j$, on a $M_i x M_j \subseteq M_i - (M_i \cap H) \subseteq D - H$, d'où $x \in W_H^{i,j} = W$.

On a donc $W = [[M_i - (M_i \cap H)] .\cdot M_i] \cdot . M_j$.

On peut démontrer de même que l'on a aussi :

$$W = [[M_j - (M_j \cap H)] .\cdot M_i] \cdot . M_j,$$

et

$$W = [[M_i M_j - (M_i M_j \cap H)] .\cdot M_i] \cdot . M_j.$$

2) Par hypothèse, W est un idéal bilatère vérifiant la relation $F_{i,j}$.

Montrons qu'il existe des complexes H de D admettant W comme résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,j}$.

Posons $H = D - M_i W M_j$ et $K = M_i - M_i W M_j$.

D'après ce qui a été démontré précédemment, nous avons

$$W_H^{i,j} = [(D - H) .\cdot M_i] \cdot . M_j = (M_i W M_j .\cdot M_i) \cdot . M_j = W,$$

$$W_{i,j}^K = [[M_i - (M_i \cap H)] .\cdot M_i] \cdot . M_j = (M_i W M_j .\cdot M_i) \cdot . M_j = W.$$

On démontrerait de même que les complexes

$$K' = M_j - M_i W M_j$$

et

$$K'' = M_i M_j - M_i W M_j$$

admettent W comme résidu par rapport, respectivement, aux équivalences $\varrho_{K'}^{i,j}$ et $\varrho_{K''}^{i,j}$.

Définition 2-1

Nous dirons qu'une chaîne C de sous-demi-groupes D_i de D telle que

$$D = D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots \supseteq D_{i-1} \supseteq D_i \supseteq \dots$$

est liée à gauche, si nous avons

$$(D_i \cdot . D_{i-1}) D_{i-1} = D_i \quad \text{pour tout} \quad i > 1.$$

Nous dirons qu'une chaîne C est liée à droite, si nous avons

$$D_{i-1} (D_i . \cdot D_{i-1}) = D_i \quad \text{pour tout} \quad i > 1.$$

Une chaîne C est liée, si elle est, à la fois, liée à gauche et liée à droite.

Propriété 2-5

Si la chaîne C_R (resp. C_L, C_M) est liée à gauche (resp. liée à droite, liée), tout idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W, différent de D, vérifiant la condition $F_{i,0}$ (resp. $F_{0,j}$, $F_{i,j}$) vérifie aussi la condition $F_{i-1,0}$ (resp. $F_{0,j-1}$, $F_{i-1,j}$ et $F_{i,j-1}$).

Soit W un idéal à gauche ($W \neq D$) vérifiant la condition $F_{i,0}$:

$$W = R_i W . \cdot R_i,$$

c'est-à-dire : $x \in D$ et $R_i x \subseteq R_i W \Rightarrow x \in W$.

Soit $x \in D$ tel que $R_{i-1} x \subseteq R_{i-1} W$.

$$\text{On a} \quad (R_i \cdot . R_{i-1}) R_{i-1} x \subseteq (R_i \cdot . R_{i-1}) R_{i-1} W,$$

$$\text{d'où} \quad R_i x \subseteq R_i W,$$

puisque C_R est lié à gauche. Par suite $x \in W$ et W vérifie le condition $F_{i-1,0}$.

(Démonstration analogue pour les autres cas).

CONSÉQUENCE : On peut écrire les «chaînes» et le tableau suivants, qui mettent en évidence les implications entre les diverses conditions $F_{i,j}$ $(ij \geq 0)$ relatives aux idéaux à gauche, à droite et bilatères de D, lorsque les chaînes C_R, C_L, C_M sont respectivement liée à gauche, liée à droite, liée.

$$--- \Rightarrow F_{i,0} \Rightarrow F_{i-1,0} \Rightarrow --- \Rightarrow F_{2,0} \Rightarrow F_{1,0}.$$

$$--- \Rightarrow F_{0,j} \Rightarrow F_{0,j-1} \Rightarrow --- \Rightarrow F_{0,2} \Rightarrow F_{0,1}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & F_{1,1} & \\
F_{1,2} \arrow[ur, Rightarrow] & & F_{2,1} \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & F_{1,p-1} & & F_{2,p-2} & \cdots & F_{p-2,2} \arrow[dr, Rightarrow] & & F_{p-1,1} & \\
F_{1,p} \arrow[ur, Rightarrow] & & F_{2,p-1} \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[ur, Rightarrow] & & \cdots & & F_{p-1,2} \arrow[ur, Rightarrow] & & F_{p,1} \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Montrons à l'aide d'un contre exemple que la condition $F_{i-1,0}$, pour un idéal à gauche W $(W \neq D)$, n'entraîne pas nécessairement la condition $F_{i,0}$.

Considérons le demi-groupe D défini par la table [9] :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	a	a	a	c
d	a	a	a	d

Soit la chaîne C_R : $D = R_1 \supset R_2 \supset R_3$, où

$$R_2 = \{a,\ b\},\quad R_3 = \{b\}.$$

Soit $W = \{a, b, c\}$. On vérifie que C_R est liée à gauche et que

1.°) $R_1 x \subseteq R_1 W \Rightarrow x \in W$,

2.°) $R_2 x \subseteq R_2 W \Rightarrow x \in W$.

W vérifie la condition $F_{1,0}$, mais ne vérifie pas la condition $F_{2,0}$.

Propriété 2-6

La chaîne C_R (resp. C_L, C_M) étant liée à gauche (resp. liée à droite, liée), tout idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W, différent de D, vérifiant la condition :

$\Lambda_{i,0}$: $W = W \cdot\!\cdot R_i$, [resp. $\Lambda_{0,j}$: $W = W \cdot\!\cdot L_i$, $\Lambda_{i,j}$: $W = (W \cdot\!\cdot M_i) \cdot\!\cdot M_j$]

vérifie aussi la condition $\Lambda_{i-1,0}$ (resp. $\Lambda_{0,j-1}$, $\Lambda_{i-1,j}$ et $\Lambda_{i,j-1}$) [1].

Soit W un idéal à gauche de D ($W \neq D$), vérifiant la condition $\Lambda_{i,0}$, c'est à dire que l'on a :

$$x \in D \quad \text{et} \quad R_i x \subseteq W \Rightarrow x \in W.$$

Soit $x \in D$ tel que $R_{i-1} x \subseteq W$,

on en déduit $(R_i \cdot\!\cdot R_{i-1}) R_{i-1} x \subseteq (R_i \cdot\!\cdot R_{i-1}) W \subseteq W$,

d'où $R_i x \subseteq W$, puisque C_R est liée à gauche. W vérifie la condition $\Lambda_{i-1,0}$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas).

On pourrait écrire pour les conditions $\Lambda_{i,0}$, $\Lambda_{0,j}$ et $\Lambda_{i,j}$ des « chaînes » et un tableau semblables à ceux que nous avons écrits pour les conditions $F_{i,j}$ ($ij \geq 0$).

Le contre exemple utilisé plus haut permet aussi de montrer que la condition $\Lambda_{i-1,0}$, pour un idéal à gauche W ($W \neq D$), n'entraîne pas nécessairement la condition $\Lambda_{i,0}$.

En effet, en utilisant la même chaîne C_R et le même idéal à gauche, on vérifie que

1.°) $R_1 x \subseteq W \Rightarrow x \in W$.

2.°) $R_2 x \subseteq W \Rightarrow x \in W$.

W vérifie la condition $\Lambda_{1,0}$, mais ne vérifie pas la condition $\Lambda_{2,0}$.

Remarque : C_R étant une chaîne d'idéaux à droite de D, si W est un idéal à gauche différent de D, vérifiant la condition $\Lambda_{i,0}$, il vérifie aussi la condition $F_{i,0}$, mais la réciproque de cette propriété n'est pas vraie. On sait en effet, qu'en particulier, la condition $F_{1,0}$ n'entraîne pas la condition $\Lambda_{1,0}$ [8].

---

(1) Un idéal à gauche vérifiant la condition $\Lambda_{1,0}$ est dit : fortement large à gauche [8]. De même un idéal à droite (resp. bilatère) vérifiant la condition $\Lambda_{1,0}$ (resp. $\Lambda_{1,1}$) est dit fortement large à droite (resp. bilatère).

Des remarques analogues peuvent être faites au sujet des conditions $\Lambda_{0,j}$ et $F_{0,j}$, $\Lambda_{i,j}$ et $F_{i,j}$.

Théorème 2-2

Etant donnée une chaîne C_R de D, pour qu'un idéal à gauche $W (W \neq D)$ soit le résidu d'un complexe H par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ et que de plus on ait $H \cap W \cap R_i D = \phi$, il faut et il suffit que W vérifie la condition $\Lambda_{i,0}$, $W = W.\cdot R_i$.

1.°) Soit H un complexe de D tel que l'on ait :

$$W_H^{i,0} = W \quad \text{et} \quad H \cap W \cap R_i D = \phi (W \neq D).$$

Montrons que W vérifie la condition $\Lambda_{i,0}$.

Soit $x \in D$ tel que l'on ait $R_i x \subseteq W$.

Supposons que x n'appartienne pas à W ; il existe $a \in R_i$ tel que $ax \in H \cap R_i D$, donc $ax \notin W$, ce qui contredit l'hypothèse. On a donc $x \in W$, et W vérifie la condition $\Lambda_{i,0}$.

2.°) Soit W un idéal à gauche de $D (W \neq D)$ tel que

$$W = W.\cdot R_i.$$

D'après la remarque faite plus haut, W vérifie aussi la relation $F_{i,0}$, donc il existe, d'après le théorème 2-1, des complexes H tels que $W_H^{i,0} = W$.

D'autre part, soit $x \in D - W$. Il existe $a \in R_i$ tel que $ax \notin W$

$$\text{Posons} \quad H = \{ax \; ; \; a \in R_i, \; ax \notin W\}$$

On a $H \cap W = \phi$, donc à fortiori $H \cap W \cap R_i D = \phi$.

Montrons que $W_H^{i,0} = W$.

Soit $x \in D - W$, il existe $a \in R_i$ tel que $ax \in H$, d'après la définition de H.

Soit $x \in D - W_H^{i,0}$, il existe $a \in R_i$ tel que $ax \in H$, d'après la définition de $W_H^{i,0}$, puisque $H \cap W = \phi$, on a $ax \notin W$ et par suite $x \notin W$. Il en résulte que $W_H^{i,0} = W$.

Nous pouvons démontrer de la même façon qu'étant donnée une chaîne C_L (resp. C_M) de D, pour qu'un idéal à droite (resp. bilatère) $W (W \neq D)$ soit le résidu d'un complexe H par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{0,j}$ (resp. $\varrho_H^{i,j}$), et que de plus on ait $H \cap W \cap DL_j = \phi$ (resp. $H \cap W \cap M_i D M_j = \phi$), il faut et il suffit que W vérifie la condition $\Lambda_{0,j}$ (resp. $\Lambda_{i,j}$).

Par analogie avec la notion de « complexe dégagé de son résidu W » utilisée par P. LEFEBVRE [8], nous donnons la définition suivante :

Définition 2-2

Etant donné dans D un complexe H et une chaîne C_R (resp. C_L, C_M), nous dirons que H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$), si l'on a

$$H \cap W_H^{i,0} \cap R_i D = \phi \text{ (resp. } H \cap W_H^{0,j} \cap DL_j = \phi,$$
$$H \cap W_H^{i,j} \cap M_i DM_j = \phi).$$

REMARQUE : Si l'on a $H \cap W_H^{i,0} \cap R_i D = \phi$ et $H \cap W_H^{i,0} = H$, on a $W_H^{i,0} = D$.

En effet les hypothèses faites entraînent $H \cap R_i D = \phi$, et par conséquent, $W_H^{i,0} = D$.

De même, les conditions $H \cap W_H^{0,j} \cap DL_j = \phi$ et $H \cap W_H^{0,j} = H$ (resp. $H \cap W_H^{i,j} \cap M_i DM_j = \phi$ et $H \cap W_H^{i,j} = H$ entraînent $W_H^{0,j} = D$ (resp. $W_H^{i,j} = D$).

Etant donnée dans D une chaîne C_R et un idéal à gauche W fermé à gauche par rapport à R_i (c'est-à-dire vérifiant la condition $F_{i,0}$), nous désignerons par $\mathcal{E}_{i,0}(W)$, l'ensemble des complexes H admettant W comme résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ et dégagés de leur résidu par rapport à cette équivalence.

$\mathcal{E}_{i,0}(W)$ ordonné par l'inclusion est stable pour la réunion. En effet soit $H^* = \bigcup_{\alpha \in A} H_\alpha$, $H_\alpha \in \mathcal{E}_{i,0}(W)$.

Montrons que $W_{H^*}^{i,0} = W$. Quel que soit $\alpha \in A$, on a $H_\alpha \subseteq H^*$, par suite $W_{H^*}^{i,0} \subseteq W$, on en déduit que $W_{H^*}^{i,0} = W$.

$\mathcal{E}_{i,0}(W)$ n'est pas stable, en général, pour l'intersection (voir contre-exemple dans [8]).

On définit de façon analogue les ensembles $\mathcal{E}_{0,j}(W)$, où W est un idéal à droite fermé à droite par rapport à L_j (c'est-à-dire vérifiant la condition $F_{0,j}$), et $\mathcal{E}_{i,j}(W)$, ou W est un idéal bilatère vérifiant la condition $F_{i,j}$.

Etudions les complexes minimaux de $\mathcal{E}_{i,0}(W)$ [resp. $\mathcal{E}_{0,j}(W)$, $\mathcal{E}_{i,j}(W)$].

Lemme 2-1

Soit H un complexe tel que son résidu $W_H^{i,0}$ (resp. $W_H^{0,j}$, $W_H^{i,j}$) soit contenu dans un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W. Si H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$), on a $W_H^{i,0} = W$ (resp. $W_H^{0,j} = W$, $W_H^{i,j} = W$).

Soit un complexe H tel que l'on ait :

$$W_H^{i,0} \subseteq W \quad \text{et} \quad H \cap W \cap R_i D = \phi.$$

Il suffit de démontrer que l'on a $D - W_H^{i,0} \subseteq D - W$.

Soit $x \notin W_H^{i,0}$, il existe $a \in R_i$ tel que $ax \in H \cap R_i D$, donc $ax \notin W$, et par suite $x \notin W$.

Corollaire 2-1

Si H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$), et si K est un complexe de D tel que l'on ait $K \subseteq H$, on a $W_H^{i,0} = W_K^{i,0}$ (resp. $W_H^{0,j} = W_K^{0,j}$, $W_H^{i,j} = W_K^{i,j}$).

En effet, la condition $K \subseteq H$ entraîne $W_H^{i,0} \subseteq W_K^{i,0}$, il suffit alors d'appliquer le lemme 2-1.

Lemme 2-2

Soit un complexe H tel que $H \cap W_H^{i,0} \cap R_i D = \phi$ $(W_H^{i,0} \neq D)$. on a

$$W^{i,0}_{H-(H \cap W_H^{i,0})} = W_H^{i,0}.$$

Posons $K = H - (H \cap W_H^{i,o})$. On a $K \subseteq H$, donc $W_H^{i,0} \subseteq W_K^{i,0}$. Il suffit de démontrer que l'on a $D - W_H^{i,0} \leq D - W_H^{i,0}$. Soit $x \notin W_K^{i,0}$, il existe $a \in R_i$ tel que $ax \in H \cap R_i D$, donc $ax \notin W_H^{i,0}$, et par suite suite $ax \in K$, d'où $x \notin W_K^{i,0}$.

On démontrerait de même que si H est dégagé de son résidu par rapport à $\varrho_H^{0,j}$ (resp. $\varrho_H^{i,j}$) et si ce résidu est different de D, on a $W_H^{0,j} = W^{0,j}_{H-(H \cap W_H^{0,j})}$ (resp. $W_H^{i,j} = W^{i,j}_{H-(H \cap W_H^{i,j})}$.

Propriété 2-7

Si W $(W \neq D)$ est un idéal à gauche, fermé à gauche par rapport à R_i, et si H est un complexe minimal de l'ensemble $\mathcal{E}_{i,0}(W)$, H est disjoint de W.

Cette propriété est une conséquence immédiate du lemme 2-2.

Nous avons la même propriété pour $H \in \mathcal{E}_{0,j}(W)$ [resp. $H \in \mathcal{E}_{i,j}(W)$] et H minimal dans cet ensemble.

Remarque : W étant un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) fortement large à gauche (resp. à droite, bilatère), un complexe minimal de l'ensemble $\mathcal{E}_{1,0}(W)$ [resp. $\mathcal{E}_{0,1}(W)$, $\mathcal{E}_{1,1}(W)$] est dit W-minimal à gauche (resp. à droite, bilatère) [8]. Par analogie, nous donnerons la définition suivante :

Définition 2-3

Etant donnée dans D une chaîne C_R, et un idéal à gauche W vérifiant la condition $\Lambda_{i,0}$, nous appellerons complexe $W^{i,0}$-minimal, tout complexe minimal de l'ensemble $\mathcal{E}_{i,0}(W)$.

On définit de même un complexe $W^{0,j}$-minimal ou $W^{i,j}$-minimal.

Lemme 2-3

Soit H un complexe dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$). Soit $W = W_H^{i,0}$ (resp. $W = W_H^{0,j}$), et soit $h \in H$. Pour que le complexe $K = H - \{h\}$ admette W comme résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_K^{i,0}$ (resp. $\varrho_K^{0,j}$), il faut et il suffit que l'on ait $[(H\cdot.h) \cap R_i]\, h \neq \{h\}$ (resp. $h\,[(H.\cdot h) \cap L_j] \neq \{h\}$).

1.°) Supposons que l'on ait $W_K^{i,0} = W$. Si l'on a $(H\cdot.h) \cap R_i = \phi$, on a évidemment $[(H\cdot.h) \cap R_i]h = \phi \neq \{h\}$. Si l'on a $(H\cdot.h) \cap R_1 \neq \phi$, alors $h \notin W$, et il existe $a \in R_i$ tel que $ah \in K = H - \{h\}$, d'où $[(H\cdot.h) \cap R_i]\, h \neq \{h\}$.

2.°) Soit H, tel que $W_H^{i,0} = W$ et $H \cap W \cap R_i D = \phi$. Supposons que pour $h \in H$, on ait $[(H\cdot.h) \cap R^\cdot]\, h \neq \{h\}$. Montrons qu'on a alors $W = W_K^{i,0}$ où $K = H - \{h\}$. Il suffit pour cela de montrer que l'on a $D - W \subseteq D - W_K^{i,0}$. Soit $x \notin W$, il existe $a \in R_i$ tel que $ax \in H$; si $ax \in K$, on a $x \notin W_K^{i,0}$; si $ax = h$, $h \in H \cap R_i D$, d'où $h \notin W$; il existe $\lambda \in R_i$ tel que $\lambda h \in H$, $\lambda \in (H\cdot.h) \cap R_i$, d'où $\lambda h \neq h$ et $\lambda ax \in K = H - \{h\}$. Par suite $x \notin W_K^{i,0}$. On démontrerait de la même façon que si H est tel que $W = W_H^{i,j}$ et $H \cap W \cap M_i D M_j = \phi$, une condition nécessaire et suffisante pour que le complexe $K = H - \{h\}$ admette W comme résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_K^{i,j}$ est que l'on ait : $\Delta_h = \{ahb \; ; \; (a, b) \in (H..h) \cap (M_i \times M_j)\} \neq \{h\}$.

Théorème 2-3

W $(W \neq D)$ étant un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) vérifiant la condition $\Lambda_{i,0}$ (resp. $\Lambda_{0,j}$, $\Lambda_{i,j}$), pour qu'un complexe $H \in \mathcal{E}_{i,0}(W)$ [resp. $\mathcal{E}_{0,j}(W)$, $\mathcal{E}_{i,j}(W)$] soit $W^{i,0}$-minimal (resp. $W^{0,j}$-minimal, $W^{i,j}$-minimal), il faut et il suffit que l'on ait $[(H\cdot.h) \cap R_i]\, h = \{h\}$ (resp. $h\,[(H.\cdot h) \cap L_j] = \{h\}$, $\Delta_h = \{h\}$), pour tout $h \in H$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du lemme précédent.

Propriété 2-8

Soit $W\,(W \neq D)$ un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) vérifiant la condition $\Lambda_{i,0}$ (resp. $\Lambda_{0,j}$, $\Lambda_{i,j}$). Si H est un complexe $W^{i,0}$-minimal (resp. $W^{0,j}$-minimal, $W^{i,j}$-minimal) H est aussi un complexe $W^{i-1,0}$-minimal (resp. $W^{0,j-1}$-minimal, $W^{i-1,j}$-minimal et $W^{i,j-1}$-minimal).

Soit H un complexe minimal de $\mathcal{E}_{i,0}(W)$. D'après la propriété 2-7, on sait que l'on a $H \cap W = \phi$, d'où $W = W_H^{i-1,0}$ d'après la propriété 2-4. Il reste à montrer que H est minimal pour la condition $W = W_H^{i-1,0}$, c'est-à-dire que l'on a $[(H^{\cdot}.h) \cap R_{i-1}]\,h = \{h\}$ pour tout $h \in H$.

Par hypothèse on a $[(H^{\cdot}.h) \cap R_i]\,h = \{h\}$ pour tout $h \in H$. Soit $h \in H$, supposons qu'il existe $a \in (H^{\cdot}.h) \cap R_{i-1}$ tel que l'on ait $ah \neq h$. On a $ah \in H \cap R_{i-1} D$, donc $ah \notin W$. Il existe $b \in R_i$ tel que $bah \in H$; $ba \in (H^{\cdot}.h) \cap R_i$, donc $bah = \{h\}$. D'autre part $b \in (H^{\cdot}.ah) \cap R_i$, donc $bah = ah$. On en déduit $ah = h$, ce qui est contraire à l'hypothèse ; par suite on a bien.

$[(H^{\cdot}.h) \cap R_{i-1}]\,h = \{h\}$ pour tout $h \in H$.

(Démonstrations analogues dans les autres cas).

De cette propriété, on déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 2-2

Si H est un complexe $W^{i,0}$-minimal (resp. $W^{0,j}$-minimal, $W^{i,j}$-minimal), c'est aussi un complexe W-minimal à gauche (resp. à droite, bilatère).

Dans ce corollaire, on suppose, comme dans la propriété 2-8, $W \neq D$.

Un contre-exemple montre que la réciproque de la propriété 2-8 n'est pas vraie, c'est-à-dire qu'un complexe H peut-être, par exemple, $W^{i-1,0}$-minimal sans être $W^{i,0}$-minimal.

Soit D le demi-groupe défini par la table [9] :

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	b	c	a	a
c	a	b	c	c	b
d	a	e	d	d	e
e	a	e	d	a	a

Soit la chaîne $C_R = D = R_1 \supset R_2 \supset R_3$, où

$$R_2 = \{a,\ b,\ c\},\ R_3 = \{a\}.$$

Posons $W = \{a\}$. On vérifie que $H = \{b,\ d\}$ est un complexe W-minimal à gauche, cependant $W_H^{2,0} = \{a,\ c,\ d\}$, H n'est donc pas $W^{2,0}$-minimal.

REMARQUE : D'après le théorème 2-3, si H est $W^{i,0}$-minimal on a $H \subseteq R_i H$; cette remarque nous conduit au théorème suivant :

Theorème 2-4

Etant donné une chaîne C_R de D, et un idéal à gauche W $(W \neq D)$, si H est un complexe W-minimal à gauche et si de plus on a $H \subseteq R_i H$, H est $W^{i,0}$-minimal.

H étant W-minimal à gauche, on a

$$(H \cdot . h)\, h = \{h\} \quad \text{pour tout} \quad h \in H.$$

Par suite, la condition $H \subseteq R_i H$ entraîne que, pour tout $h \in H$, il existe $a \in R_i$ tel que $ah = h$, d'où

$$[(H \cdot . h) \cap R_i]\, h = \{h\} \quad \text{pour tout} \quad h \in H.$$

Montrons que l'on a de plus $W_H^{i,0} = W$. Par hypothèse, on a $W = W_H^{1,0}$, donc $W \subseteq W_H^{i,0}$. Il suffit alors de démontrer l'inclusion $D - W \subseteq D - W_H^{i,0}$; soit $x \notin W$, il existe $a \in D$ tel que $ax \in H$, et, d'après ce qui précède, il existe $a' \in R_i$ tel que $a'ax = ax \in H$, d'où $x \notin W_H^{i,0}$. De plus, on a $H \cap W = \phi$ puisque H est W-minimal à gauche ; par suite, H est aussi $W^{i,0}$-minimal.

Nous pouvons démontrer de la même façon qu'étant donnée une chaîne C_L (resp. C_M) et un idéal à droite (resp. bilatère) W $(W \neq D)$, si H est W-minimal à droite (resp. bilatère), et si de plus, on a $H \subseteq HM_j$ (resp. $H \subseteq M_i H M_j$), H est $W^{0,j}$-minimal (resp. $W^{i,j}$-minimal).

Le demi-groupe D utilisé comme contre-exemple à la suite du corollaire 2-2, permet de montrer que si un demi-groupe possède un complexe H W-minimal à gauche $(W \neq D)$, il n'existe pas nécessairement dans D une chaîne C_R telle que H soit $W^{i,0}$-minimal pour $i > 1$. En effet, dans le demi-groupe D considéré, les seules chaînes C_R possibles sont :

1) $C_R : D = R_1 \supset R_2 \supset R_3$

2) $C'_R : D = R_1 \supset R'_2 \supset R_3$, où $R'_2 = \{a, d, e\}$

3) $C''_R : D = R_1 \supset R''_2$, où $R''_2 = R_3$.

Soit $W = \{a\}$, $H = \{b, d\}$ est W-minimal à gauche, mais n'est pas $W^{i,0}$-minimal pour un $i > 1$, pour aucune des chaînes d'idéaux à droite C_R possibles dans D, même si cette chaîne est une chaîne d'idéaux bilatères comme C''_R.

Cependant, nous verrons (paragraphe V) que, dans le cas où D n'est pas idempotent, il est toujours possible de trouver une chaîne d'idéaux bilatères telle qu'un complexe W-minimal à gauche soit $W^{i,0}$-minimal pour tout $i > 1$.

III. *COMPLEXES* $\varrho^{i,j}$ — *FORTS* $(i, j \geq 0)$.

Définition 3-1

Etant donnée dans D, une chaîne C_R (resp. C_L, C_M) et un complexe H, on dit que H est $\varrho^{i,0}$-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort, $\varrho^{i,j}$-fort) si $Q_x^{i,0} \cap Q_{x'}^{i,0} \neq \phi \Rightarrow Q_x^{i,0} = Q_{x'}^{i,0}$ (resp. $Q_x^{0,j} \cap Q_{x'}^{0,j} \neq \phi \Rightarrow Q_x^{0,j} = Q_{x'}^{0,j}$, $Q_x^{i,j} \cap Q_{x'}^{i,j} \neq \phi \Rightarrow Q_x^{i,j} = Q_{x'}^{i,j}$).

REMARQUE : Un complexe $\varrho^{1,0}$-fort, ou $\varrho^{0,1}$-fort (resp. $\varrho^{1,1}$-fort) est un complexe fort [5] (resp. bilatèralement fort [2]). Nous savons, en effet [5], qu'un complexe fort à gauche est dit fort. Mais si un complexe est $\varrho^{i,0}$-fort $(i > 1)$, il n'est pas nécessairement $\varrho^{0,i}$-fort.

Etant donnée, dans D, une chaîne C_R (resp. C_L, C_M), on désignera par $\mathcal{H}_{i,0}$ (resp. $\mathcal{H}_{0,j}$, $\mathcal{H}_{i,j}$) l'ensemble des complexes $\varrho^{i,0}$-forts (resp. $\varrho^{0,j}$-forts, $\varrho^{i,j}$-forts) de D.

Propriété 3-1

L'ensemble $\mathcal{H}_{i,0}$ (resp. $\mathcal{H}_{0,j}$, $\mathcal{H}_{i,j}$) est une famille de MOORE.

En effet, nous avons

1.°) $D \in \mathcal{H}_{i,0}$.

2.°) $\mathcal{H}$ étant une sous famille de $\mathcal{H}_{i,0}$, $\bigcap_{H \in \mathcal{K}} H \in \mathcal{H}_{i,0}$. Démontrons cette dernière propriété.

Posons $$H_1 = \bigcap_{H \in \mathcal{K}} H \neq \phi$$

Supposons que l'on ait

$$\begin{cases} ax \in H_1 \\ ax' \in H_1 \quad \text{avec} \quad a,\ b \in R_i,\ x,\ x' \in D \\ bx \in H_1 \end{cases}$$

D'après la définition de H_1, quel que soit $H \in \mathcal{H}$, on a

$$\begin{cases} ax \in H \\ ax' \in H \\ bx \in H \end{cases}$$

Or tout $H \in \mathcal{H}$ est un complexe $\varrho^{i,0}$-fort par suite on a $bx' \in H$, quel que soit $H \in \mathcal{H}$, c'est-à-dire $bx' \in H_1$. D'où $H_1 \in \mathcal{H}_{i,0}$.

(Démonstrations analogues pour $H_{0,j}$ et $H_{i,j}$)

Propriété 3-2

On a $\mathcal{H}_{i,0} \subseteq \mathcal{H}_{i+1,0}$ (resp. $\mathcal{H}_{0,j} \subseteq \mathcal{H}_{0,j+1}$, $\mathcal{H}_{i,j} \subseteq \mathcal{H}_{i+1,j} \cap \mathcal{H}_{i,j+1}$).

Soit $H \in \mathcal{H}_{i\,0}$, et supposons que, pour $x \in D$, on ait

$$Q_x^{i+1,0} \cap Q_{x'}^{i+1,0} \neq \phi$$

Cette condition entraîne évidemment

$$Q_x^{i,0} \cap Q_{x'}^{i,0} \neq \phi,$$

et par suite on a $x \equiv x' \, (\varrho_H^{i,0})$, d'où $x \equiv x' \, (\varrho_H^{i+1,0})$ et $H \in \mathcal{H}_{i+1,0}$.

(Démonstrations analogues dans les autres cas).

REMARQUE : De la propriété 3-2, nous déduisons que, si H est fort (resp. bilatèrement fort), il est aussi $\varrho^{i,0}$-fort et $\varrho^{0,j}$-fort (resp. $\varrho^{i,j}$-fort) quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$. La réciproque de cette propriété n'est pas vraie. En effet, considérons le demi-groupe D défini par la table [9] :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	a	a	b	a

Soit C_R : $D = R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset R_4$,

où $R_2 = \{a, b, c\}$, $R_3 = \{a, b\}$, $R_4 = \{a\}$.

Soit $H = \{a\}$. On vérifie que H n'est pas fort, mais H est $\varrho^{2,0}$-fort, sans d'ailleurs être $\varrho^{0,2}$-fort.

Théorème 3-1

Dans un demi-groupe D, pour lequel on a défini une chaîne C_R, les deux conditions suivantes sont équivalentes

1) H est un complexe $\varrho^{i,0}$-fort,

2) Il existe une bijection φ de l'ensemble $\dfrac{D}{\varrho_H^{i,0}} - \{W_H^{i,0}\}$ sur $\dfrac{R_i}{\varrho_H^{0,1}} - \{W_H^{0,1} \cap R_i\}$ telle que

$\varphi(X) = A = Q_x^{i,0}$, où $x \in X$, et $\varphi^{-1}(A) = X = Q_a^{0,1}$, où $a \in A$.

1.°) Démontrons que 1) entraîne 2).

$$\text{Soit } X \in \frac{D}{\varrho_H^{i,0}} - \{W_H^{i,0}\}.$$

Quels que soient x, $x' \in X$, on a $Q_x^{i,0} = Q_{x'}^{i,0} \neq \phi$.
Soit $a \in Q_x^{i,0}$, on a $ax \in H$ et $a \in R_i$.
D'où $x \in H.\cdot a$ et par suite, nous avons

$$X \subseteq H.\cdot a, \text{ quel que soient } a \in Q_x^{i,0}.$$

Soit $y \in H.\cdot a$, on a $ay \in H$ avec $a \in Q_x^{i,0} \subseteq R_i$.
D'où $a \in Q_y^{i,0}$.
Nous avons par conséquent, $Q_x^{i,0} \cap Q_y^{i,0} \neq \phi$, H étant $\varrho^{i,0}$-fort nous en déduisons que y est équivalent à x modulo $\varrho_H^{i,0}$ et par suite $y \in X$.
D'où $\mathbf{X = H.\cdot a = Q_a^{0,1}}$, quel que soit $a \in Q_x^{i,0} \leq R_i$.
D'après ce qui précède, quels que soient a, $b \in Q_x^{i,0}$, on a

$$H.\cdot a = H.\cdot b \neq \phi.$$

C'est-à-dire $a \equiv b\ (\varrho_H^{0,1})$ et $a, b \notin W_H^{0,1}$.
Soit $c \in R_i$ tel que l'on ait

$$c \equiv a\,(\varrho_H^{0,1}).$$

C'est-à-dire $Q_c^{0,1} = Q_a^{0,1} = X$.

Soit $x \in Q_c^{0,1} = X$, on a $cx \in H$ avec $c \in R_i$ d'où $c \in Q_x^{i,0}$. Désignons par A la classe modulo la trace de l'équivalence $\varrho_H^{0,1}$ sur R_i contenant a, d'après ce qui précède, on a

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}_x^{i,0} \quad \text{quel que soit } x \in X, \text{ et } \quad \mathbf{A} \neq \mathbf{W}_H^{0,1} \cap R_i$$

Il en résulte qu'à toute classe $X \in \dfrac{D}{\varrho_H^{i,0}} - \{W_H^{i,0}\}$ on peut faire correspondre une classe $A \in \dfrac{R_i}{\varrho_H^{0,1}} - \{W_H^{0,1} \cap R\}$. Posons $A = \varphi(X)$. On a

$$A = \varphi(X) = Q_x^{i,0}, \quad \textit{avec} \quad x \in X.$$

Réciproquement, montrons qu'à toute classe

$$A \in \frac{R_i}{\varrho_H^{0,1}} - \{W_H^{0,1} \cap R_i\}$$

on peut associer une classe X telle que $\varphi(X) = A$.

Soit $a \in A$ et soit $x \in Q_a^{0,1}$. On a $ax \in H$ avec $a \in R_i$; d'où $a \in Q_x^{i,0}$. Or, d'après ce qui précède, on a

$$Q_x^{i,0} = A.$$

Par suite si X est la classe modulo $\varrho_H^{i,0}$ contenant x, on a

$$X = Q_a^{0,1} \quad \textit{et} \quad X \neq W_H^{i,0}.$$

On peut conclure que l'application φ est une bijection, l'application inverse étant définie par

$$X = \varphi^{-1}(A) = Q_a^{0,1} \quad \textit{avec} \quad a \in A$$

2°) Dómontrons que 2) entraîne 1).

Soit $x \in D$ tel que l'on ait $Q_x^{i,0} \neq \phi$. Par hypothèse $Q_x^{i,0}$ est une classe d'équivalence. Par suite, étant donné x, $x' \in D$, si l'on a $Q_x^{i,0} \cap Q_{x'}^{i,0} \neq \phi$ on a évidemment $Q_x^{i,0} = Q_{x'}^{i,0}$, et H est fort.

On démontre, de façon analogue, le théorème symétrique relatif aux complexes $\varrho^{0,i}$-forts d'un demi-groupe D, dans lequel on a défini une chaîne C_L.

Rappel : Etant donné un complexe H d'un demi-groupe D, R. Desq appelle $\mathcal{L}_H$ [4], la relation d'équivalence définie dans $D \times D$, par $(x, y) \equiv (x', y') \ (\mathcal{L}_H) \Longleftrightarrow (H.\cdot x)\cdot.y = (H.\cdot x')\cdot.y'$.

On désigne par $\mathcal{W}_H$ la résidu par rapport à l'équivalence $\mathcal{L}_H$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $(x, y) \in D \times D$ pour lesquels on a $(H.\cdot x)\cdot.y = \phi$.

En utilisant l'équivalence $\mathcal{L}_H$ nous pouvons démontrer, pour les complexes $\varrho^{i,j}$-forts ($ij \neq 0$), un théorème semblable au theorème 3-1. C_M étant une chaîne d'idéaux bilatères définie dans D, nous désignerons par $\frac{M_i \times M_j}{\mathcal{L}_H}$, l'ensemble quotient de $M_i \times M_j$ par l'équivalence $\mathcal{L}_H$.

Théorème 3-2

Dans un demi-groupe D, dans lequel on a défini une chaîne C_M, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) H est un complexe $\varrho^{i,j}$-fort ($ij \neq 0$).

2) Il existe une bijection φ de $\frac{D}{\varrho_H^{i,j}} - \{W_H^{i,j}\}$ sur

$\frac{M_i \times M_j}{\mathcal{L}_H} - \{(M_i \times M_j) \cap \mathcal{W}_H\}$ telle que $\varphi(X = A = Q_x^{i,j}$ où $x \in X$,

et $$\varphi^{-1}(A) = X = (H.\cdot a)\cdot.b \quad \text{où} \quad (a, b) \in A.$$

1°) Montrons que 1) entraîne 2).

Soit $X \in \frac{D}{\varrho_H^{i,j}} - \{W_H^{i,j}\}$. Quels que soient $x, x' \in X$, on a

$$Q_x^{i,j} = Q_{x'}^{i,j} \neq \phi.$$

Soit $(a, b) \in Q_x^{i,j}$, on a $axb \in H$ et $(a, b) \in M_i \times M_j$.
D'ou $x \in (H.\cdot a)\cdot.b$, et par suite on a

$$X \subseteq (H.\cdot a)\cdot.b \quad \text{quel que soit} \quad (a, b) \in Q_x^{i,j}.$$

Soit $y \in (H.\cdot a)\cdot.b$. On a $ayb \in H$, avec $(a, b) \in M_i \times M_j$.
D'où $(a, b) \in Q_y^{i,j}$ et $Q_x^{i,j} \cap Q_x^{i,j} \neq \phi$.
H étant $\varrho^{i,j}$-fort, on en déduit que y est équivalent à x modulo $\varrho_H^{i,j}$, d'ou $y \in X$, et par suite,

$$\mathbf{X = (H.\cdot a)\cdot.b} \quad \text{quel que soit} \quad (a, b) \in Q_x^{i,j} \subseteq M_i \times M_j.$$

Soit A la classe modulo la trace de $\mathcal{L}_H$ sur $M_i \times M_j$ contenant (a, b). D'après ce qui précède, on a

$$Q_x^{i,j} \subseteq A, \quad \text{et} \quad A \neq \mathcal{W}_H \cap (M_i \times M_j).$$

Soit $(c, d) \epsilon A$. On a $(H.\cdot c)\cdot .d = (H.\cdot a)\cdot .b = X$.

Donc, quel que soit $x \epsilon X$, on a $cxd \epsilon H$ où $(c, d) \epsilon M_i \times M_j$.

Par suite $(c, d) \epsilon Q_x^{i,j}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{Q_x^{i,j}}$ quel que soit $x \epsilon X$.

A toute classe X modulo $\varrho_H^{i,j}$ $(X \neq W_H^{i,j})$ on peut donc associer une classe A modulo la trace de $\mathcal{L}_H$ sur $M_i \times M_j$

$$[A \neq \mathcal{W}_H \cap (M_i \times M_j)]. \quad \text{Posons} \quad A = \varphi(X).$$

On a
$$A = \varphi(X) = Q_x^{i,j}, \quad avec \quad x \epsilon X.$$

Réciproquement, soit $A \epsilon \dfrac{M_i \times M_j}{\mathcal{L}_H} \{\mathcal{W}_H \cap (M_i \times M_j)\}$, montrons que l'on peut associer à A, une classe X telle que $A = \varphi(X)$.

Soit $(a, b) \epsilon A$ et soit $x \epsilon (H.\cdot a)\cdot .b$. On a $axb \epsilon H$, avec

$$(a, b) \epsilon M_i \times M_j. \quad \text{D'où} \quad (a, b) \epsilon Q_x^{i,j}.$$

D'après ce qui précède on a $A = Q_x^{i,j}$. Et si l'on désigne par X la classe modulo $\varrho_H^{i,j}$ contenant x, on a

$$\mathbf{X = (H.\cdot a)\cdot .b} \quad \textbf{et} \quad \mathbf{X \neq W_H^{i,j}}.$$

Il en résulte que φ est une application bijective et que φ^{-1} est définie par $X = \varphi^{-1}(A) = (H.\cdot a)\cdot .b$, avec $(a, b) \epsilon A$.

2°) Montrons que 2) entraîne 1).

Par hypothèse, si l'on a $x \epsilon D$ et $Q_x^{i,j} \neq \phi$, $Q_x^{i,j}$ est une classe d'équivalence. Soient x, $x' \epsilon D$ tels que l'on ait $Q_x^{i,j} \cap Q_{x'}^{i,j} \neq \phi$. On en déduit immédiatement $Q_x^{i,j} = Q_{x'}^{i,j}$, et par suite, H est $\varrho^{i,j}$-fort.

Propriété 3-3

Si H est $\varrho^{i,0}$-fort, quel que soit $p \geq 0$, les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ et $\varrho_H^{i+p,0}$ coïncident dans $D - W_H^{i+p,0}$.

Si H est $\varrho^{0,j}$-fort, quel que soit $q \geq 0$, les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ et $\varrho_H^{0,j+q}$ coïncident dans $D - W_H^{0,j+q}$.

Si H est $\varrho^{i,j}$-fort, quels que soient $p \geq 0$ et $q \geq 0$, les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ et $\varrho_H^{i+p,j+q}$ coïncident dans $D - W_H^{i+p,j+q}$.

Soit H, un complexe $\varrho^{i,0}$-fort.

D'après le théorème 1-1, on a $\varrho_H^{i,0} \subseteq \varrho_H^{i+p,0}$, quel que soit $p \geq 0$. Il suffit donc de montrer que, pour tout $p \geq 0$, on a

$$\left.\begin{array}{r} x \equiv x' \ (\varrho_H^{i+p,0}) \\ \text{et} \quad x \notin W_H^{i+p,0} \end{array}\right\} \Longrightarrow x \equiv x' \ (\varrho_H^{i,0})$$

Par hypothèse, nous avons $Q_x^{i+p,0} = Q_{x'}^{i+p,0} \neq \phi$, d'où $Q_x^{i,0} \cap Q_{x'}^{i,0} \neq \phi$; H étant $\varrho^{i,0}$-fort, on en déduit $Q_x^{i,0} = Q_{x'}^{i,0}$, c'est-à-dire $x = x'$ $(\varrho_H^{i,0})$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas).

Nous avons vu que la condition $W_H^{i,j} = \phi$, pour $i \geq 1$, $j \geq 1$, est équivalente à la condition $W_H^{1,1} = \phi$. Nous pouvons, alors, déduire facilement de la propriété 3-3, le théorème suivant :

Théorème 3-3

Si H est $\varrho^{i,j}$-fort et bilatèrement net, toute équivalence $\varrho^{i+p,j+q}$ coïncide avec $\varrho_H^{i,j}$ quels que soient $p \geq 0$ et $q \geq 0$. En particulier si H est bilatèrement fort et bilatèrement net, on a $\varrho_H^{i,j} = \varrho_H^{1,1}$ quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$.

En ce qui concerne les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ et $\varrho_H^{0,j}$, nous ne pouvons énoncer un théorème analogue au précédent que dans le cas où les équivalences sont définies à partir d'une chaîne d'idéaux bilatères, car dans ce cas, nous savons que toute condition $W_H^{i,0} = \phi$ (resp. $W_H^{0,j} = \phi$) pour $i \geq 1$ (resp. $j \geq 1$) est équivalente à la condition $W_H^{1,0} = \phi$ (resp. $W_H^{0,1} = \phi$).

Théorème 3-4

Si H est $\varrho^{i,0}$-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort), net à gauche (resp. net à droite) et si les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$) sont définies à partir d'une chaîne d'idéaux bilatères C_μ, on a $\varrho_H^{i,0} = \varrho_H^{i+p,0}$ quel que soit $p \geq 0$ (resp. $\varrho_H^{0,j} = \varrho_H^{0,j+q}$ quel que soit $q \geq 0$).

Propriété 3-4

Si H est $\varrho^{i,0}$-fort, quel que soit $p \geq 0$, l'équivalence $\varrho_H^{i+p,0}$ est simplifiable à gauche dans $D - W_H^{i+p,0}$.

Si H est $\varrho^{0,j}$-fort, quel que soit $q \geq 0$, l'équivalence $\varrho_H^{0,j+q}$ est simplifiable à droite dans $D - W_H^{0,j+q}$.

Si H est $\varrho^{i,j}$-fort, quels que soient $p \geq 0$ et $q \geq 0$, l'équivalence $\varrho_H^{i+p,j+q}$ est simplifiable dans $D - W_H^{i+p,j+q}$.

Supposons H $\varrho^{i,0}$-fort ; soit $p \geq 0$, montrons que

$$\left.\begin{array}{rl} & ax \equiv ax' \ (\varrho_H^{i+p,0}) \\ \text{et} & ax \notin W_H^{i+p,0} \end{array}\right\} \Longrightarrow x \equiv x' \ (\varrho_H^{i+p,0})$$

Par hypothèse, il existe $b \in R_{i+p}$ tel que

$$bax \in H \quad \text{et} \quad bax' \in H.$$

On a $ba \in R_{i+p} \leq R_i$, d'où $Q_x^{i,0} \cap Q_{x'}^{i,0} \neq \phi$.

H étant $\varrho^{i,0}$-fort, on en déduit $x \equiv x' (\varrho_H^{i,0})$ d'où $x \equiv x' (\varrho_H^{i+p,0})$.

(Démonstrations analogues dans les autres cas).

Des théorèmes 3-3 et 3-4, et de la propriété précédente, nous déduisons les deux propriétés suivantes :

Propriété 3-5

Si H est $\varrho^{i,j}$-fort et bilatèrement net, l'équivalence $\varrho_H^{i,j}$ est simplifiable dans D.

Propriété 3-6

Si les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$) sont définies dans D à partir d'une chaîne d'idéaux bilatères, si H est $\varrho^{i,0}$-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort) et net à gauche (resp. à droite), les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$) sont simplifiables à gauche (resp. à droite) dans D.

Théorème 3-5

1°) Soit X une classe modulo $\varrho_H^{i,0}$, différente de $W_H^{i,0}$.

a) On a $\varrho_H^{i,0} \subseteq \varrho_X^{1,0}$ et $W_H^{i,0} \subseteq W_X^{1,0}$;

b) Si H est un complexe $\varrho^{i,0}$-fort, X est complexe fort, et dans $D - W_X^{1,0}$ on a $\varrho_H^{i,0} = \varrho_X^{1,0}$.

c) Si H est un complexe $\varrho^{i,0}$-fort, et si de plus, on a $H \subseteq X$, alors, pour tout p, tel que $1 \leq p \leq i$, on a :

$$W_H^{p,0} = W_X^{p,0} = W_X^{1,0} \quad \text{et} \quad \varrho_H^{p,0} = \varrho_X^{p,0} = \varrho_X^{1,0} \ ;$$

et pour tout p, tel que $i > p$, on a :

$$W_X^{p,0} \subseteq W_H^{p,0} \quad \text{et} \quad \varrho_H^{p,0} = \varrho_X^{p,0} = \varrho_X^{1,0} \quad \text{dans} \quad D - W_H^{p,0}.$$

2°) On a un énoncé analogue, en considérant une classe X modulo, $\varrho_H^{0,j}$, differente de $W_H^{0,j}$.

3°) Soit X une classe modulo $\varrho_H^{i,j}$, différente de $W_H^{i,j}$ ($ij \neq 0$).

a) On a $\varrho_H^{i,j} \subseteq \varrho_X^{1,1}$ et $W_H^{i,j} \subseteq W_X^{1,1}$;

b) Si H est un complexe $\varrho^{i,j}$-fort, X est à la fois un complexe bilatèrement fort et un complexe fort, et dans $D - W_X^{1,1}$, on a $\varrho_H^{i,j} = \varrho_X^{1,1}$.

c) Si H est un complexe $\varrho^{i,j}$-fort, et si de plus, on a $H \subseteq X$, alors pour tout couple (p, q), tel que $1 \leq p \leq i$ et $1 \leq q \leq j$, on a

$$X_H^{p,q} = W_X^{p,q} = W_X^{1,1} \quad \text{et} \quad \varrho_H^{p,q} = \varrho_X^{p,q} = \varrho_X^{1,1} \, ;$$

et pour tout couple (p, q) tel que $i < p$ et $j < q$, on a

$$W_X^{p,q} \subseteq W_H^{p,q} \quad \text{et} \quad \varrho_H^{p,q} = \varrho_H^{p,q} = \varrho_X^{p,q} = \varrho_X^{1,1} \quad \text{dans} \quad D - W_H^{p,q}.$$

Démontrons la première partie du théorème.

a) $\varrho_H^{i,0}$ étant une équivalence régulière à gauche, et X une classe modulo $\varrho_H^{i,0}$, on a $\varrho_H^{i,0} \subseteq \varrho_H^{1,0}$ ([5], théorème 20).

D'autre part, soit $x \notin W_X^{1,0}$. Il existe $a \in D$ tel que $ax \in X$, et par suite, il existe $b \in R_i$ tel que $bax \in H$, donc $x \notin W_H^{i,0}$. On en déduit : $W_H^{i,0} \subseteq W_X^{1,0}$.

b) Si H est $\varrho^{i,0}$-fort, montrons que X est fort.

Soient $x, x' \in D$ tels que l'on ait $(X \cdot . x) \cap (X \cdot . x') \neq \phi$.

Soit $a \in D$, tel que $ax \in X$ et $ax' \in X$. On a alors

$$ax \equiv ax' \;(\varrho_H^{i,0}).$$

Or $\varrho_H^{i,0}$ est simplifiable à gauche dans $D - W_H^{i,0}$, d'après la propriété 3-4, d'où $x = x'$ $(\varrho_H^{i,0})$.
Soit $b \in X \cdot . x$. L'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ étant régulière à gauche, on a $bx = bx'$ $(\varrho_H^{i,0})$, et par suite, $bx' \in X$, ce qui permet de conclure que X est un complexe fort.

Montrons que l'on a $\varrho_H^{i,0} = \varrho_X^{1,0}$, dans $D - W_X^{1,0}$.

Nous avons déjà montrer l'inclusion : $\varrho_H^{i,0} \subseteq \varrho_X^{1,0}$, il surfit donc de démontrer que l'on a $\varrho_X^{1,0} \subseteq \varrho_H^{i,0}$ dans $D - W_X^{1,0}$.
Soit $x \notin W_X^{1,0}$, et soit $x' \in D$ tel que l'on ait :

$$x \equiv x' \;(\varrho_X^{1,0}),$$

c'est-à-dire $X \cdot . x = X \cdot . x' \neq \phi$.

De cette dernière égalité on déduit, comme plus haut, que l'on a

$$x \equiv x' \;(\varrho_H^{i,0}) \, ;$$

D'où $\varrho_X^{1,0} \subseteq \varrho_H^{i,0}$, dans $D - W_X^{1,0}$,
et finalement $\varrho_X^{1,0} = \varrho_H^{i,0}$ dans $D - W_X^{1,0}$.
c) H est $\varrho^{i,0}$-fort, et de plus, on a $H \subseteq X$.
Cette dernière condition entraîne : $W_X^{1,0} \subseteq W_H^{1,0} \subseteq W_H^{i,0}$.

En tenant compte des résultats du paragraphe *a)*, on obtient

$$W_H^{i,0} = W_H^{1,0} = W_X^{1,0}.$$

D'où $W_H^{p,0} = W_X^{p,0} = W_X^{1,0}$ pour $1 \leq p \leq i$, et $W_X^{p,0} \subseteq W_H^{p,0}$ pour $p > i$, puisqu'on a $H \subseteq X$.

De plus, en tenant compte des résultats du paragraphe *b)*, on obtient $\varrho_H^{p,0} = \varrho_X^{p,0} = \varrho_X^{1,0}$ pour $1 \leq p \leq i$, et en utilisant la propriété 3-3, on a : $\varrho_H^{p,0} = \varrho_X^{p,0} = \varrho_X^{1,0}$ dans $D - W_H^{p,0}$ pour $p > i$.

(On démontre de façon analogue la 2ème et la 3ème parties du théorème).

IV. *COMPLEXES* $\varrho^{i,j}$ - *PARFAITS* $(i, j \geq 0)$

Nous définissons les complexes $\varrho^{i,j}$-parfaits $(i, j \geq 0)$ par analogie avec les complexes parfaits à droite ou à gauche [5], et les complexes bilatèrement parfaits [2].

Définition 4-1

Etant donnée, dans D, une chaîne C_R (resp. C_L, C_M) et un complexe H, on dit que H est $\varrho^{i,0}$-parfait (resp. $\varrho^{0,j}$-parfait, $\varrho^{i,j}$-parfait) si H est $\varrho^{i,0}$-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort, $\varrho^{i,j}$-fort), et si de plus, quels que soient $h_1, h_2 \in H$, on a $(H\cdot.h_1) \cap R_i \cap (H\cdot.h_2) \neq \phi$ [resp. $(H.\cdot h_1) \cap L_j \cap (H.\cdot h_2) \neq \phi$, $(H..h_1) \cap (M_i \times M_j) \cap (H..h_2) \neq \phi$].

REMARQUE : Un complexe $\varrho^{1,0}$-parfait (resp. $\varrho^{0,1}$-parfait, $\varrho^{1,1}$-parfait) est un complexe parfait à gauche (resp. parfait à droite, bilatèralement parfait).

Rappelons qu'un complexe est dit parfait [5], s'il est parfait à droite et parfait à gauche.

Propriété 4-1

Si H est un complexe $\varrho^{i,0}$-parfait (resp. $\varrho^{0,j}$-parfait, $\varrho^{i,j}$-parfait), on a $W_H^{i,0} = W_H^{1,0}$ (resp. $W_H^{0,j} = W_H^{0,1}$, $W_H^{i,j} = W_H^{1,1}$).

En effet, si H est $\varrho^{i,0}$-parfait, on a $H \cap W_H^{i,0} = \phi$, et par suite $W_H^{i,0} = W_H^{1,0}$ d'après la propriété 2-4.

Théorème 4-1

1°) Tout complexe $\varrho^{i,0}$-parfait H est contenu dans une classe modulo $\varrho_H^{i,0}$, différente de $W_H^{i,0} = W_H^{1,0}$. Cette classe est un complexe parfait à gauche, et l'on a :

$$W_H^{i,0} = W_U^{1,0} = W_U^{i,0} \quad \text{et} \quad \varrho_H^{i,0} = \varrho_U^{1,0} = \varrho_U^{i,0}.$$

2°) Nous avons un énoncé analogue pour tout complexe $\varrho^{0,i}$-parfait ou $\varrho^{i,j}$-parfait H. Dans ce dernier cas la classe U modulo $\varrho_H^{i,j}$ contenant H est un complexe parfait et bilatèrement parfait.

Ce théorème est une conséquence directe du théorème 3-5, compte tenu de la propriété 4-1.

Propriété 4-2

Tout sous-demi-groupe $\varrho^{i,0}$-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort, $\varrho^{i,j}$-fort) S de D est $\varrho^{i,0}$-parfait (resp. $\varrho^{0,j}$-parfait, $\varrho^{i,j}$-parfait).

Remarquons tout d'abord que, S étant supposé non vide, la condition : S est $\varrho^{i,0}$-fort, implique $S \cap R_i \neq \phi$.

On a $S \cap R_i \subseteq (S \cdot . s) \cap R_i$, pour tout $s \in S$;

d'où $\quad (S \cdot . s_1) \cap R_i \cap (S \cdot . s_2) \neq \phi, \quad$ quels que soient $s_1, s_2 \in S$.

Remarque : Le cas $i = 1$, $j = 0$ (resp. $i = 0$, $j = 1$) correspond au théorème 14 de P. Dubreil [5]. De même, le cas $i = j = 1$, correspond à la propriété 7 de R. Croisot [2].

Propriété 4-3

Soit S un sous-demi-groupe $\varrho^{i,0}$-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort, $\varrho^{i,j}$-fort) de D. Soit U la classe modulo $\varrho_S^{i,0}$ (resp. $\varrho_S^{0,j}$, $\varrho_S^{i,j}$) contenant S. On a $U = S . \cdot s$ quel que soit $s \in S \cap R_i$ [resp. $U = S \cdot . s$ quel que soit $s \in S \cap L_j$, $U = (S . \cdot s) \cdot . s'$ quel que soit $(s, s') \in (S \cap M_i) \times (S \cap M_j)$].

1°) D'après le théorème 3-1, on a

$$U = S . \cdot a, \quad \text{avec} \quad a \in (S \cdot . u) \cap R_i, \quad \text{quel que soit} \quad u \in U.$$

La condition $S \subseteq U$ implique :

$$U = S . \cdot a, \quad \text{avec} \quad a \in (S \cdot . s) \cap R_i, \quad \text{quel que soit} \quad s \in S.$$

Or, on a $S \cap R_i \subseteq (S \cdot . s) \cap R_i$, pour tout $s \in S$,

et par suite $U = S . \cdot s$, *quel que soit* $s \in S \cap R_i$.

2°) La démonstration est analogue pour les deux autres cas ; pour le troisième cas, on utilise le théorème 3-2 à la place du théorème 3-1.

Conséquences : D'après ce qui précède, S étant un sous-demi-groupe-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort, $\varrho^{i,j}$-fort) de D, la classe U modulo $\varrho^{i,0}$ (resp. $\varrho^{0,j}$, $\varrho^{i,j}$) contenant S est l'ensemble des éléments $u \in D$, pour lesquels on a :

$$su \in S, \quad \text{pour tout} \quad s \in S \cap R_i$$

[resp. $us \in S$ pour tout $s \in S \cap L_j$, $sus' \in S$ pour tout couple $(s, s') \in (S \cap M_i) \times (S \cap M_j)$].

Théorème 4-2

1°) S étant un sous-demi-groupe $\varrho^{i,0}$-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort), la classe U modulo $\varrho_S^{i,0}$ (resp. $\varrho_S^{0,j}$) contenant S est un sous-demi-groupe de D, parfait à gauche (resp. à droite), et c'est le plus petit sous-demi-groupe unitaire à gauche (resp. à droite) contenant S.

2°) S étant un sous-demi-groupe $\varrho^{i,j}$-fort ($ij \neq 0$) de D, la classe U modulo $\varrho_S^{i,j}$ contenant S est un sous demi-groupe de D, bilatèrement parfait, et c'est le plus petit sous-demi-groupe unitaire contenant S.

Soit S un sous-demi-groupe $\varrho^{i,0}$-fort de D.

a) Montrons que U est un sous-demi-groupe $\varrho^{i,0}$-fort de D. Soient $u_1, u_2 \in U$. Soit $s \in S \cap R_i$, d'après la propriété 4-3, on a

$$su_1 u_2 = su_1 \cdot u_2 = s_1 u_2, \quad \text{avec} \quad s_1 \in S \cap R_i, \quad \text{d'où} \quad s_1 u_2 = s_2 \in S.$$

Il en résulte que $u_1 u_2 \in U$. U est un sous-demi-groupe de D, et d'après le théorème 4-1, U est parfait à gauche.

b) Montrons que U est unitaire à gauche [5].

Soit $ux \in U$ et $u \in U$. La classe U modulo $\varrho_S^{i,0}$ étant un sous-demi-groupe de D, on a $u^2 \in U$ et $ux \equiv u^2$ $(\varrho_S^{i,0})$. D'autre part, on a $U \neq W_S^{i,0}$ et $\varrho_S^{i,0}$ simplifiable à gauche dans $D - W_S^{i,0}$, d'où $x \equiv u$ $(\varrho_S^{i,0})$, et $x \in U$.

c) Il reste à montrer que la classe U modulo $\varrho_S^{i,0}$ contenant S est contenue dans tout sous-demi-groupe unitaire à gauche U' contenant S.

Soit $u \in U$, on a $su \in S$ quel que soit $s \in S \cap R_i$. Par hypothèse, on a $S \subseteq U'$, d'où $su \in U'$ et $s \in U'$. U' étant initaire à gauche, on en déduit $u \in U'$.

La deuxième partie du théorème se démontre de façon analogue.

Propriété 4-4

Pour qu'un sous-demi-groupe $\varrho^{i,0}$-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort, $\varrho^{i,j}$-fort) S de D soit égal à la classe U modulo $\varrho_S^{i,0}$ (resp. $\varrho_S^{0,j}$, $\varrho_S^{i,j}$) qui le contient, il faut et il suffit que S soit unitaire à gauche (resp. unitaire à droite, unitaire).

La condition est nécessaire d'après le théorème 4-2. D'autre part, elle, est suffisante, car si S est unitaire à gauche, la classe U modulo $\varrho_S^{i,0}$ qui contient S étant le plus petit sous-demi-groupe unitaire à gauche de D contenant S, on a $S = U$.

Nous retrouvons la notion d'enveloppe unitaire à gauche ou a droite, définie par P. Dubreil [5] et d'enveloppe unitaire, définie par R. Croisot [2]; nous pouvons alors donner la définition suivante:

Définition 4-2

Etant donné un sous-demi-groupe $\varrho^{i,0}$-fort (resp. $\varrho^{0,j}$-fort, $\varrho^{i,j}$-fort) S de D, la classe U modulo $\varrho_S^{i,0}$ (resp. $\varrho_S^{0,j}$, $\varrho_S^{i,j}$) contenant S sera appelée enveloppe unitaire à gauche (resp. unitaire à droite, unitaire) de S.

Théorème 4-3

Soit S un sous-demi-groupe $\varrho^{i,0}$-fort de D. Si l'enveloppe unitaire à gauche U de S est unitaire à droite, on a, pour tout $a \in D$ et tout $u \in U$ $au \equiv a$ $(\varrho_S^{i,0})$.

On sait que $\varrho_S^{i,0} = \varrho_U^{1,0}$, il suffit de démontrer que l'on a $au \equiv a \cdot (\varrho_U^{1,0})$ pour tout $u \in U$ et tout $a \in D$.

Soit $a \in D$. On sait que U est parfait à gauche.

Soit $x \in U \cdot . a$, on a $xa \in U$. Soit $u \in U$, U étant un sous-demi-groupe de D, on a $xau \in U$, d'où $x \in (U \cdot . a) \cap (U \cdot . au)$, et par suite, $a \equiv au$ $(\varrho_U^{1,0})$ puisque U est fort.

Ce théorème n'est pas valable dans le cas d'un sous-demi-groupe S, $\varrho^{i,j}$-fort $(ij \neq 0)$ [2], nous pouvons alors le remplacer par la propriété suivante.

Propriété 4-5

Si S est un sous-demi-groupe $\varrho^{i,j}$-fort $(ij \neq 0)$ d'un demi-groupe D, pour tout élément u appartenant à l'enveloppe unitaire U de S, on a soit $au \in W_S^{1,1}$, soit $au \equiv a$ $(\varrho_S^{i,j})$
et soit $ua \in W_S^{1,1}$, soit $ua \equiv a$ $(\varrho_S^{i,j})$.

En effet, soit $u \in U$, on a $u^2 \in U$, donc $u^2 \equiv u$ $(\varrho_S^{i,j})$.

L'équivalence $\varrho_S^{i,j}$ étant régulière, et simplifiable dans

$$D - W_S^{i,j} = D - W_S^{1,1}, \quad \text{on a} \quad au^2 \equiv au \ (\varrho_S^{i,j}) \quad \text{et} \quad au \equiv a \ (\varrho_S^{i,j})$$

$$\text{si} \quad au \notin W_S^{1,1} \ (= W_S^{i,j}).$$

On a de même $ua \equiv a \ (\varrho_S^{i,j})$ si $ua \notin W_S^{1,1}$.

V. *ETUDE DES EQUIVALENCES $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ DEFINIES A PARTIR D'UNE MEME CHAINE C_M D'IDEAUX BILATERES D'UN DEMI-GROUPE D.*

Notons, dès le début de ce paragraphe, qu'une chaîne C_M particulière peut être considérée, lorsque le demi-groupe D est tel qu'il existe des entiers $n > 1$ pour lesquels on a $D^n \neq D$. Ceci suppose, en particulier, que D n'est pas idempotent. Nous pouvons alors prendre comme chaîne C_M, celle pour laquelle on a $M_i = D^i$; nous l'appellerons chaîne principale de D et nous la désignerons par C_D.

Nous remarquons que la chaîne C_D est liée ; nous pouvons même dire que C_D vérifie une propriété plus forte que celle d'être liée, puisque nous avons de plus :

$$D^i \cdot . D^{i-1} = D^i . \cdot D^{i-1} = D \quad \text{pour tout} \quad i \geq 1,$$

avec la convention suivante : pour tout complexe $K \subseteq D$, on pose $K \cdot . D^0 = K . \cdot D^0 = K$.

Ceci nous conduit à la propriété suivante, qui caractérise la chaîne C_D.

Propriété 5-1

Soit C une chaîne de sous-demi-groupes D_i de D, telle que :

$$D = D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots \supseteq D_i \supseteq D_{i-1} \supseteq \dots .$$

La chaîne C est la chaîne principale de D, si et seulement si, C est liée à gauche (resp. à droite) et si de plus, on a

$$D_i \cdot . D_{i-1} = D \ (\text{resp. } D_i . \cdot D_{i-1} = D) \quad \text{pour tout} \quad i > 1.$$

La condition est nécessaire d'après la remarque faite plus haut, montrons qu'elle est suffisante.

La chaîne C étant liée à gauche, et vérifiant de plus la condition

$$D_i \cdot . D_{i-1} = D \quad \text{pour tout} \quad i > 1.$$

on a $$DD_{i-1} = D_i \quad \text{pour tout} \quad i > 1.$$

Or $$D_1 = D, \quad \text{d'où} \quad D_i = D^i \quad \text{pour tout} \quad i \geq 1.$$

C'est à cette propriété caractéristique que sont dûes les propriétés particulières des équivalences $\varrho_H^{i,j}$ et des résidus $W_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$, lorsqu'on les définit dans D, à partir de la chaîne C_D.

D'une façon générale, les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ étant définies dans D à partir d'un complexe H, et d'une même chaîne C_M, nous pouvons les comparer, ainsi que leurs résidus, et définir les propriétés « bilatères » [5].

A — *Propriétés des résidus.*

1°) *Les équivalences* $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ *sont définies a partir d'une chaîne* C_M *quelconque de* D.

Nous avons déjà vu (propriétes 2-2 et 2-3) que si les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$, $\varrho_H^{i,j}$) sont définies à partir d'une chaîne C_M d'idéaux bilatères de D, la condition : $W_H^{1,0} = \phi$ (resp. $W_H^{0,1} = \phi$, $W_H^{1,1} = \phi$) est équivalente à la condition: $W_H^{i,0} = \phi$ quel que soit $i \geq 1$ (resp. $W_H^{0,j} = \phi$ quel que soit $j \geq 1$, $W_H^{i,j} = \phi$ quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$).

Dans le cas où la chaîne C_M est liée, les résidus satisfont aux relations suivantes :

Propriété 5-2

Si H est un complexe de D et C_M une chaîne liée d'idéaux bilatères de D, on a :

$$W_H^{i,0} = W_H^{i-1,0} . \cdot (M_i . \cdot M_{i-1}),$$

$$W_H^{0,j} = W_H^{0,j-1} \cdot . (M_j \cdot . M_{j-1}),$$

$$W_H^{i,j} = W_H^{i-1,j} . \cdot (M_i . \cdot M_{i-1}) = W_H^{i,j-1} \cdot . (M_j \cdot . M_{j-1}),$$

$$W_H^{i,j} = W_H^{i,9} \cdot . M_j = W_H^{0,j} . \cdot M_i.$$

Démontrons la première de ces formules, les autres se démontrent de façon analogue.

Soit $x \in W_H^{i,0}$, on a $M_i x \cap H = \phi$. La chaîne Γ_M étant liée, on a

$$M_i = M_{i-1} (M_i . \cdot M_{i-1}), \quad \text{d'où} \quad M_{i-1} (M_i . \cdot M_{i-1}) x \cap H = \phi.$$

On en déduit $(M_i.\cdot M_{i-1})\ W_H^{i,0} \subseteq W_H^{i-1,0}$, c'est-à-dire

$$W_H^{i,0} \subseteq W_H^{i-1,0}.\cdot(M_i.\cdot M_{i-1}).$$

Soit $y \in W_H^{i-1,0}.\cdot(M_i.\cdot M_{i-1})$, on a $(M_i.\cdot M_{i-1})\,y \subseteq W_H^{i-1,0}$ d'où $M_{i-1}(M_i.\cdot M_{i-1})\,y \cap H = \phi$, c'est-à-dire $M_i y \cap H = \phi$; et par suite $y \in W_H^{i,0}$; d'où la relation

$$W_H^{i,0} = W_H^{i-1,0}.\cdot(M_i.\cdot M_{i-1}).$$

Conséquences : Des relations précédentes, nous déduisons facilement les formules suivantes :

1°) $W_H^{i,0} = W_H^{1,0}.\cdot[(M_2.\cdot D)(M_3.\cdot M_2)\ \dots\ (M_i.\cdot M_{i-1})]$;

2°) $W_H^{0,j} = W_H^{0,1}\cdot.[(M_j\cdot.M_{j-1})(M_{j-1}\cdot.M_{j-2})\ \dots\ (M_2\cdot.D)]$;

3°) *a)* $W_H^{i,j} = W_H^{i-1,j-1}.\cdot[(M_i.\cdot M_{i-1})\cdot.(M_j\cdot.M_{j-1})]$;

b) $W_H^{i,j} = W_H^{1,0}.\cdot T_{i-1}\cdot.M_j = W_H^{0,1}\cdot.T'_{j-1}.\cdot M_i$

c) $W_H^{i,j} = W_H^{1,1}.\cdot T_{i-1}\cdot.T'_{j-1}$

avec $T_{i-1} = (M_2.\cdot D)(M_3.\cdot M_2)\ \dots\ (M_i.\cdot M_{i-1}) \qquad i > 1,$

$T'_{j-1} = (M_j\cdot.M_{j-1})(M_{j-1}\cdot.M_{j-2})\ \dots\ (M_2\cdot.D) \qquad j < 1.$

On a en particulier $W_H^{1,1} = W_H^{1,0}\cdot.D = W_H^{0,1}.\cdot D$.

Dans le cas où la chaîne C_M est la chaîne principale de D, nous avons $T_{i-1} = D^{i-1}$ et $T'_{j-1} = D^{j-1}$.

2°) *Les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ sont définies à partir de la chaîne C_D.*

Propriété 5-3

H étant un complexe de D, les résidus de H par rapport aux équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ définies à partir de la chaîne C_D satisfont aux relations suivantes :

$$W_H^{i,0} = W_H^{1,0}.\cdot D^{i-1}\ ;\quad W_H^{0,j} = W_H^{0,1}\cdot.D^{j-1}\ ;$$
$$W_H^{i,j} = W_H^{i,0}\cdot.D_j = W_H^{0,j}.\cdot D^i = W_H^{1,1}.\cdot D^{i-1}\cdot.D^{j-1}.$$

En tenant compte de la convention faite plus haut, pour la division d'un complexe par D^0, nous pouvons écrire la formule générale suivante :

$$W_H^{i,j} = (W_H^{1,0}.\cdot D^{i-1})\cdot.D^j = (W_H^{0,1}\cdot.D^{j-1}).\cdot D^i.$$

Cette formule est alors valable quels que soient $i \geq 0$, $j \geq 0$.

Propriété 5-4

Soit H un complexe de D, si H satisfait à la condition : $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1}$, $W_H^{1,0}$ est un idéal bilatère et l'on a :

$$(1) \quad W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,1} \quad \text{et} \quad (2) \quad W_H^{i,j} \subseteq W_H^{i-1,j+1}$$

pour tout $i > 1$ et tout $j \geq 0$.

La relation (1) a déjà été démontrée par R. CROISOT dans [2]. Nous en redonnons cependant ici une démonstration différente.

$W_H^{1,0}$ étant un idéal à gauche, on a :

$$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,0}.\cdot D.$$

D'autre part $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1} \Rightarrow W_H^{1,0}.\cdot D \subseteq W.\cdot D$.

Or, d'après la propriété 5-2, on a $W_H^{1,1} = W_H^{0,1}.\cdot D$,

$$\text{d'où (1)} \quad W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,1}.$$

La propriété 5-2 permet aussi d'écrire $W_H^{1,1} = W_H^{1,0}\cdot.D$, et en tenant compte de (1), on a $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{1,0}\cdot.D$, $W_H^{1,0}$ est donc un idéal bilatère.

Démontrons la relation (2).

$$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1} \Rightarrow (W_H^{1,0}.\cdot D^{i-1})\cdot.D^j \subseteq (W_H^{0,1}.\cdot D^{i-1})\cdot.D^j,$$

$$\text{or} \quad W_H^{1,0}.\cdot D^{i-1}\cdot.D^j = W_H^{i,j}, \quad \text{et}$$

$$(W_H^{0,1}.\cdot D^{i-1})\cdot.D^j = (W_H^{0,1}\cdot.D^j).\cdot D^{i-1} = W_H^{i-1,j+1},$$

d'où (2) $W_H^{i,j} \subseteq W_H^{i-1,j+1}$ pour tout $i > 1$ et tout $j \geq 0$.

CONSÉQUENCE : Les relations (1) et (2) permettent d'écrire les inclusions suivantes :

$$W_H^{2,0} \subseteq W_H^{0,1}$$

$$W_H^{2,0} \subseteq W_H^{1,1} \subseteq W_H^{0,2}$$

$$W_H^{3,0} \subseteq W_H^{2,1} \subseteq W_H^{1,1} \subseteq W_H^{1,2} \subseteq W_H^{0,3}$$

– – – – – – – – – – – – – – – – – – –

$$W_H^{n,0} \subseteq W_H^{n-1,1} \subseteq \ldots\ldots\ldots\ldots \subseteq W_H^{1,n-1} \subseteq W_H^{0,n}$$

– –

Nous pouvons montrer à l'aide de contre-exemples que l'hypothèse $W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,1}$ n'entraîne pas nécessairement, d'une part $W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,1}$, et d'autre part l'égalité entre tous les $W_H^{i,j}$ pour lesquels on a $i + j = n$ quel que soit n.

EXEMPLE 1 - Soit D le demi-groupe défini par la table [9] :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	b	a
c	a	a	c	a
d	a	b	a	d

Posons $H = \{b, d\}$. On a $W_H^{1,0} = \{a\}$, $W_H^{0,1} = \{a, c\}$ et $W_H^{1,1} = \{a\}$, donc $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1} \not\Rightarrow W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,1}$.

EXEMPLE 2 - Soit D, le demi-groupe défini par la table [9] :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
d	a	a	b	a

Posons $H = \{b\}$, et considérons les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ définies à partir de la chaîne C_D qui est réduite d'ailleurs ici à :

$$D \supset D^2 = D^n \quad \text{pour tout} \quad n \geq 2.$$

On a $W_H^{1,0} = \phi$, $W_H^{0,1} = \{a, c\}$,

$W_H^{1,1} = \phi$, $W_H^{2,0} = \phi$, $W_H^{0,2} = \{a, c\}$

$W_H^{1,0} \subseteq W_H^{0,1} \not\Rightarrow W_H^{i,j} = W_H^{i',j'}$ quels que soient i, j, i', j' tels que $i + j = i' + j' = 2$.

On démontrerait de la même façon que si H vérifie

$$W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,0}, \text{ on a } (1') \quad W_H^{0,1} \subseteq W_H^{1,1} \quad \text{et } (2') \quad W_H^{i,j} \subseteq W_H^{i+1,j-1},$$

pour tout $i \geq 0$ et tout $j > 1$.

On en déduit alors le théorème suivant :

Théorème 5-1

H étant un complexe de D, les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ étant définies à partir de la chaîne C_D, si H est équirésiduel $(W_H^{0,1} = W_H^{1,0})$ [5], on a $W_H^{i,j} = W_H^{i',j'}$ quels que soient i, j, i', j' tels que $i + j = i' + j'$, et en posant $W_H^{i,j} = W_H^n$ si $i + j = n$ on peut écrire la chaîne suivante :

$$(3) \quad W_H^1 \subseteq W_H^2 \subseteq \ldots \subseteq W_H^n \subseteq \ldots$$

En effet si H est équirésiduel, les relations (2) et (2') sont vérifiées et elles entraînent respectivement :

$$W_H^{n,0} \subseteq W_H^{n-1,1} \subseteq \ldots \subseteq W_H^{1,n-1} \subseteq W_H^{0,n}$$

et $W_H^{0,n} \subseteq W_H^{1,n-1} \subseteq \ldots \subseteq W_H^{n-1,1} \subseteq W_H^{n,0}$, quel que soit $n \geq 1$.

Propriété 5-5

Soit n un entier positif.

La condition : $W_H^{1,0} \cap H \cap D^n = \phi$ (resp. $W_H^{0,1} \cap H \cap D^n = \phi$, $W_H^{1,1} \cap H \cap D^n = \phi$) est équivalente à la condition :

$W_H^{i,0} \cap H \cap D^n = \phi$ quel que soit $i \geq 1$ (resp. $W_H^{0,j} \cap H \cap D^n = \phi$ quel que soit $j \geq 1$, $W_H^{i,j} \cap H \cap D^n = \phi$ quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$).

Remarquons que $W_H^{i,0} \cap H \cap D^n = \phi$ pour un entier $i > 1$, entraîne $W_H^{1,0} \cap H \cap D^n = \phi$ puisqu'on a $W_H^{1,0} \subseteq W_H^{i,0}$.

D'autre part, montrons que $W_H^{i,0} \cap H \cap D^n = \phi$ pour un entier $i \geq 1$ entraîne $W_H^{i+1,0} \cap H \cap D^n = \phi$. Soit $x \in H \cap D^n$, l'hypothèse entraîne $x \notin W_H^{i,0}$, donc $x \notin W_H^{1,0}$; il existe $a \in D$ tel que $ax \notin W_H^{i,0}$, et il existe $b \in D^i$ tel que $bax \in H$, $ba \in D^{i+1}$, d'où $x \notin W_H^{i+1,0}$.

Par suite $W_H^{1,0} \cap H \cap D^i = \phi$ entraîne $W_H^{i,0} \cap H \cap D^i = \phi$ quel que soit $i \geq 1$, et on en déduit la propriété énoncée.

(Démonstrations analogues pour les autres cas).

Théorème 5-2

Soit H un complexe de D. Considérons les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ définies à partir de la chaîne C_D.

1°) Si H vérifie la condition $W_H^{1,0} \cap H = \phi$ (resp. $W_H^{0,1} \cap H = \phi$, $W_H^{1,1} \cap H = \phi$), on a $W_H^{i,0} = W_H^{1,0}$ pour tout $i \geq 1$ (resp. $W_H^{0,j} = W_H^{0,1}$ pour tout $j \geq 1$, $W_H^{i,j} = W_H^{1,1}$ pour tout $i \geq 1$ et tout $j \geq 1$).

2°) Soit un entier $n \geq 2$.

Si H vérifie la condition $W_H^{1,0} \cap H \cap D^n = \phi$ (resp. $W_H^{0,1} \cap H \cap D^n = \phi$), la chaîne γ_H (resp. γ_H') des résidus $W_H^{i,0}$ (resp. $W_H^{0,j}$) est finie, son élément maximum étant $W_H^{n-1,0}$ (resp. $W_H^{0,n-1}$).

Si H verifie la condition $W_H^{1,1} \cap H \cap D^n = \phi$ avec $n > 2$, le tableau $\mathfrak{T}_H$ des résidus $W_H^{i,j}$ $(ij > 0)$ est fini, sa dernière ligne étant celle de rang $i + j = n - 1$, tous les éléments de cette ligne étant égaux entre eux.

Si H est tel que $W_H^{1,1} \cap H \cap D^2 = \phi$, on a $W_H^{i,j} = W_H^{1,1}$ quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$.

1°) La première partie du théorème est une conséquence immédiate de la propriété 5-4 et de la propriété 2-4.

2°) Soit $n \geq 2$. Supposons que l'on ait $W_H^{1,0} \cap H \cap D^n = \phi$. Soit $i \geq n - 1$, montrons que $W_H^{i,0} = W_H^{i+1,0}$. Il suffit d'ailleurs de démontrer l'inclusion $W_H^{i+1,0} \subseteq W_H^{i,0}$. Soit $x \notin W_H^{i,0}$, il existe $a \in D^i$ tel que $ax \in H$; on a donc $ax \in H \cap D^{i+1} \subseteq H \cap D^n$ et par suite $ax \notin W_H^{1,0}$; il existe $b \in D$ tel que $bax \in H$, $ba \in D^{i+1}$, donc $x \notin W_H^{i+1,0}$.

On a donc $W^{i,0} = W_H^{i+1,0}$, quel que soit $i \geq n - 1$, c'est-à-dire $W_H^{i,0} = W_H^{n-1,0}$ quel que soit $i \geq n - 1$.

(Démonstration analogue pour le cas $W_H^{0,1} \cap H \cap D^n = \phi$.

Soit $n > 2$, supposons que l'on ait $W_H^{1,1} \cap H \cap D^n = \phi$.

Soient i, $j > 0$ tels que l'on ait $i + j \geq n - 1$, montrons que $W_H^{i,j} = W_H^{i+1,j+1}$. Il suffit d'ailleurs de démontrer l'inclusion $W_H^{i+1,j+1} \subseteq W_H^{i,j}$. Soit $x \notin W_H^{i,j}$. Il existe $(a, b) \in D^i \times D^j$ tel que $axb \in H$; on a $axb \in H \cap D^{i+j+1} \subseteq H \cap D^n$, d'où $axb \notin W_H^{1,1}$, et il existe $(a', b') \in D \times D$ tel que $a'axbb' \in H$, $(a'a, bb') \in D^{i+1} \times D^{j+1}$, par suite $x \notin W_H^{i+1,j+1}$.

On en déduit $W_H^{i,j} = W_H^{i+1,j+1} = W_H^{i,j+1} = W_H^{i+1,j}$, car $W_H^{i,j+1}$ et $W_H^{i+1,j}$ contiennent $W_H^{i,j}$ et sont contenus dans $W_H^{i+1,j+1}$.

D'autre part, la condition $i + j \geq n - 1$, implique, dans le cas où l'on a $n - 1 \neq 2$, que l'un au moins, des nombres i, j soit supérieur à 1. Supposons par exemple, $j > 1$ et considérons le résidu $W_H^{i+1,j-1}$ placé immédiatement à droite de $W_H^{i,j}$ dans la ligne de rang $i + j = n - 1$, du tableau $\mathfrak{T}_H$. La démonstration précédente appliquée à $W_H^{i+1,j+1}$ permet d'écrire en particulier :

$$W_H^{i+1,j-1} = W_H^{i+1,j} \quad \text{et par conséquent} \quad W_H^{i+1,j-1} = W_H^{i,j}.$$

Nous en déduisons que tous les éléments de la ligne de rang $i + j = n - 1$ sont égaux entre eux.

Il reste à envisager le cas où l'on a $W_H^{1,1} \cap H \cap D^2 = \phi$. Montrons qu'on a alors $W_H^{i,j} = W_H^{1,1}$ quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$. Soit $x \notin W_H^{i,j}$, il existe $(a, b) \in D^i \times D^j$ tel que $axb \in H$, $axb \in H \cap \cap D^3 \subseteq H \cap D^2$, d'où $axb \notin W_H^{1,1}$, et il existe $(a', b') \in D \times D$ tel que

$a'axbb' \in H$, on en déduit $x \notin W_H^{i+1,j+1}$ et par suite $W_H^{i,j} = W_H^{i+1,j+1} = W_H^{i,j+1} = W_H^{i+1,j}$ quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$ d'où $W_H^{i,j} = W_H^{1,1}$ quel que soit $i \geq 1$ et $j \geq 1$.

Remarque : Du théorème précédent nous pouvons tirer les conclusions suivantes :

1°) Si l'on a $0 < n \leq 2$,
$W_H^{1,0} \cap H \cap D^n = \phi \Rightarrow W_H^{i,0} = W_H^{1,0}$ pour tout $i \geq 1$,
et $W_H^{0,1} \cap H \cap D^n = \phi \Rightarrow W_H^{0,j} = W_H^{0,1}$ pour tout $j \geq 1$.

2°) Si l'on a $0 < n \leq 3$,
$W_H^{1,1} \cap H \cap D^n = \phi \Rightarrow W_H^{i,j} = W_H^{1,1}$ pour tout $i \geq 1$ et tout $j \geq 1$.

Remarque : La condition : H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,j}$; $\varrho_H^{i,j}$) s'écrit, lorsque nous considérons cette équivalence comme définie à partir de la chaîne C_D, $H \cap W_H^{i,0} \cap D^{i+1} = \phi$ (resp. $H \cap W_H^{0,j} \cap D^{j+1} = \phi$, $H \cap W_H^{i,j} \cap D^{i+j+1} = \phi$).

Exemple illustrant le théorème 5-2.

Soit D, le demi-groupe défini par le table :

	z	a	b	c	d	e	f	g	h
z	z	z	z	z	z	z	z	z	z
a	z	a	b	a	z	z	z	z	z
b	z	a	b	a	z	z	z	z	z
c	z	a	b	a	z	z	z	z	z
d	z	z	z	z	d	e	d	d	d
e	z	z	z	z	d	e	d	d	d
f	z	z	z	z	d	e	d	d	d
g	z	z	z	z	d	e	d	d	f
h	z	z	z	z	d	e	d	f	g

On a $D^2 = \{z, a, b, d, e, f, g\}$
$D^3 = \{z, a, b, d, e, f\}$
$D^4 = \{z, a, b, d, e\} = D^n$ quel que soit $n \geq 4$.

Posons $H = \{b, f, g\}$.

On a $\begin{cases} W_H^{1,0} = \{z,\ a,\ c,\ d,\ e,\ f\}, & \text{donc } H \cap W_H^{1,0} \cap D^4 = \phi \\ W_H^{2,0} = \{z,\ a,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g\} & \\ W_H^{3,0} = \{z,\ a,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g\} = W_H^{i,0} & \text{quel que soit } i \geq 3. \end{cases}$

$$\begin{cases} W_H^{0,1} = \{z,\ d,\ e,\ f\} & \text{donc } H \cap W_H^{0,1} \cap D^4 = \phi \\ W_H^{0,2} = \{z,\ d,\ e,\ f,\ g\} & \\ W_H^{0,3} = \{z,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\} = W_H^{0,j} & \text{quel que soit } j \geq 3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_H^{1,1} = \{z,\ d,\ e,\ f,\ g\}, & \text{donc } H \cap W_H^{1,1} \cap D^4 = \phi \\ W_H^{1,2} = \{z,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h\} = W_H^{2,1} = W_H^{i,j} & \text{quels que soient} \end{cases}$$

$i \geq 1$ et $j \geq 1$ tels que $i + j \geq 3$.

Nous avons vu (propriété 2-6) que si W est un idéal à gauche vérifiant la condition $A_{i,0}$ relativement à une chaîne C_R liée à gauche, il vérifie aussi la condition $A_{i-1,0}$, la réciproque étant fausse. Cette propriété se modifie si l'on prend la chaîne C_D, et nous avons :

Propriété 5-6

Pour un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) W de D, les conditions $A_{i,0}$ et $A_{i-1,0}$ (resp. $A_{0,j}$ et $A_{0,j-1}$, $A_{i,j}$ et $A_{i-1,j}$ ou $A_{i,j-1}$) relativement à la chaîne C_D sont équivalentes.

Soit W un idéal à gauche de D. D'après la propriété 2-6, il suffit de démontrer que si W vérifie $A_{i-1,0}$: $W = W^{\cdot}.D^{i-1}$,
il vérifie aussi $A_{i,0}$: $W = W^{\cdot}.D^{i}$.

La relation $W = W^{\cdot}.D^{i-1}$ implique : $D^{i-1}x \subseteq W \Longrightarrow x \in W$.

Soit $x \in D$ tel que l'on ait $D^i x \subseteq W$, c'est-à-dire $D^{i-1}Dx \subseteq W$, d'où $Dx \subseteq W$. Mais W vérifiant la condition $A_{i-1,0}$, est fortement large à gauche d'après la propriété 2-6, par suite on a $x \in W$; on en déduit que W satisfait à la condition $A_{i,0}$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas).

Nous pouvons remarquer, par contre, que la propriété 2-5 n'est pas modifiée si l'on prend la chaîne C_D, soit en effet, le demi-groupe D défini par la table suivante [9] :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	c
c	a	a	a	a
d	a	c	a	b

On a $D^2 = \{a, b, c\}$, $D^3 = \{a, c\}$, $D^4 = \{a\} = D^n$.

Posons $W = \{a, c\}$.

On verifie que W satisfait à la condition $F_{1,0}$, mais ne satisfait pas à la condition $F_{2,0}$.

Les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ étant définies à partir de la chaîne principale de D, la réciproque de la propriété 2-8 est vraie, et nous avons :

Propriété 5-7

Si W $(W \neq D)$ est un idéal à gauche (resp. à droite, bilatère) fortement large à gauche (resp. à droite, bilatère), et si les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ sont définies à partir de la chaîne C_D, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1) H est W-minimal à gauche (resp. à droite, bilatère).

2) H est $W^{i,0}$-minimal quel que soit $i \geq 1$ (resp. $W^{0,j}$-minimal quel que soit $j \geq 1$, $W^{i,j}$-minimal quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$.

D'après le corollaire 2-2, on sait que 2) entraîne 1). Montrons que 1) entraîne 2). Si H est W-minimal à gauche, on a $H \cap W = \phi$, et par suite $W_H^{i,0} = W$ quel que soit $i \geq 1$, d'après le theorème 5-2. D'autre part, on a $(H^{\cdot}.h)h = \{h\}$, pour tout $h \in H$; on en déduit $[(H^{\cdot}.h) \cap R_i]h = \{h\}$ quel que soit $h \in H$, puisque $H \cap W_H^{i,0} = \phi$. H est donc $W^{i,0}$-minimal quel que soit $i \geq 1$.

(Démonstrations analogues pour les autres cas).

REMARQUE : L'hypothèse $W \neq D$ est essentielle dans l'énoncé de la propriété 5-7. En effet, si H est un complexe $D^{i,0}$-minimal, il n'est pas nécessairement D-minimal à gauche, comme le montre l'exemple suivant ; le demi-groupe D est défini par la table [9] :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	a	a
c	a	a	a	a
d	a	a	b	b

Posons $H = \{b\}$. On a $W_H^{1,0} = \{a, b\}$ et $W_H^{2,0} = D$.

H est $D^{2,0}$-minimal, mais n'est pas D-minimal à gauche.

Notons enfin que la propriété caractéristique de la chaîne C_D entraîne certaines modifications du théorème 3-5, qui s'énonce alors sous la forme suivante :

Théorème 5-3

Soient H un complexe de D, $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ les équivalences associées à H et définies à partir de la chaîne C_D.

1°) Soit X une classe modulo $\varrho_H^{i,0}$ différente de $W_H^{i,0}$.

a) On *a* $\varrho_H^{i,0} \subseteq \varrho_X^{1,0}$ et $W_H^{i+p,0} \subseteq W_X^{p,0}$ quel que soit $p \geq 1$.

b) Enoncé identique au 1°) *b)* du théorème 3-5.

c) Si H est un complexe $\varrho^{i,0}$-fort, et si de plus, on a $H \subseteq X$, alors $W_H^{p,0} = W_X^{p,0} = W_X^{1,0}$ et $\varrho_H^{p,0} = \varrho_X^{p,0} = \varrho_X^{1,0}$ quel que soit $p \geq 1$.

2°) On a un énoncé analogue en considérant une classe X modulo $\varrho_H^{0,j}$, differente de $W_H^{0,j}$.

3°) Soit X une classe modulo $\varrho_H^{i,j}$, différente de $W_H^{i,j}$ $(ij \neq 0)$

a) On a $\varrho_H^{i,j} \subseteq \varrho_X^{1,1}$ et $W_H^{i+p,j+q} \subseteq W_X^{p,q}$ quels que soient $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

b) Enoncé identique au 3°) *b)* du théorème 3-5.

c) Si H est $\varrho^{i,j}$-fort, et si de plus, on a $H \subseteq X$, alors $W_H^{p,q} = W_X^{p,q} = W_X^{1,1}$ et $\varrho_H^{p,q} = \varrho_X^{p,q} = \varrho_X^{1,1}$ quels que soient $p \geq 1$ et $q \geq 1$.

Démontrons que quel que soit $p \geq 1$, on a $W_H^{i+p,0} \subseteq W_X^{p,0}$.

Soit $x \notin W_X^{p,0}$ $(p \geq 1)$, il existe $a \in D^p$ tel que $ax \in X$, et par suite, il existe $b \in D^i$ tel que $bax \in H$, d'où $x \notin W_H^{i+p,0}$, et l'on a $W_H^{i+p,0} \subseteq W_X^{p,0}$. Ce résultat entraîne immédiatement les conclusions énoncées dans 1°) *c)*.

(On démontre de façon analogue la 2e et la 3e partie du théorème).

B - *Propriétés « bilatères »* [5]

1°) *Complexes ϱ^i-équirésiduels, complexes ϱ^i-symétriques.*

Nous savons [5] qu'un complexe H est équirésiduel, si l'on a $W_H^{0,1} = W_H^{0,1}$; il est symétrique, s'il est équirésiduel, et si de plus, on a $\varrho_H^{1,0} = \varrho_H^{0,1}$.

Définition 5-1

Nous dirons qu'un complexe H est ϱ^i-équirésiduel, si l'on a $W_H^{i,0} = W_H^{0,i}$, les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ et $\varrho_H^{0,i}$ étant définies à partir d'une même chaîne C_M.

Nous pouvons montrer, à l'aide de contre-exemple, qu'un complexe équirésiduel H n'est pas nécessairement ϱ^i-équirésiduel pour tout $i > 1$, et qu'un complexe H peut être ϱ^i-équirésiduel pour un entier $i > 1$ sans être équirésiduel, et ceci même si la chaîne C_M est liée.

EXEMPLE 1. Soit le demi-groupe D, défini par la table [9] :

	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	a	b	a
c	a	a	c	a
d	a	b	b	d

Soit la chaîne C_M: $D = M_1 \supset M_2 \supset M_3$, où $M_2 = \{a, b, c\}$ et $M_3 = \{a\}$.

On remarque que la chaîne C_M est liée. Soit $H = \{b, c, d\}$.

Nous avons $W_H^{1,0} = W_H^{0,1} = \{a\}$, $W_H^{2,0} = \{a, b, c\}$ et

$$W_H^{0,2} = \{a\} = W_H^{0,1}, \quad W_H^{3,0} = W_H^{0,3} = D.$$

H est équirésiduel, mais n'est pas ϱ^i-équirésiduel pour tout $i > 1$.

EXEMPLE 2. Soit le demi-groupe D défini par la table [9] :

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	b
d	a	a	a	a	a
e	a	a	b	b	c

Soit C_M: $D = M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4$ avec $M_2 = \{a, b, c\}$, $M_3 = \{a, b\}$, $M_4 = \{a\}$

La chaîne C_M est liée.

Soit $H = \{b, c\}$. Nous avons: $W_H^{1,0} = \{a, b\}$, $W_H^{0,1} = \{a, b, d\}$, et $W_H^{2,0} = W_H^{0,2} = \{a, b, c, d\}$.

H est ϱ^2-équirésiduel mais n'est pas équirésiduel.

Nous remarquons, que dans l'exemple 2 la chaîne C_M est la chaîne principale de D, alors que pour l'exemple 1, la chaîne C_M n'est pas la chaîne C_D (le demi-groupe considéré est d'ailleurs idempotent), car nous savons que dans le cas de la chaîne C_D (théorème 5-1) si H est équirésiduel, il est ϱ^i-équirésiduel quel que soit $i \geq 1$.

Définition 5-2

Nous dirons qu'un complexe H est ϱ^i-symétrique, s'il est ϱ^i-équirésiduel et si de plus, on a $\varrho_H^{i,0} = \varrho_H^{0,i}$, les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ et $\varrho_H^{0,i}$ étant définies à partir de la même chaîne C_M.

Nous poserons dans ce cas $W_H^{i,0} = W_H^{0,i} = W_H^i$ et $\varrho_H^{i,0} = \varrho_H^{0,i} = \varrho_H^i$.

Nous savons [5] qu'un complexe H équirésiduel n'est pas nécessairement symétrique, et nous pouvons d'ailleurs le vérifiier sur l'exemple 1 précédent. D'autre part, un complexe H tel que $\varrho_H^{1,0} = \varrho_H^{0,1}$ n'est pas non plus, nécessairement symétrique [5]. Nous pouvons donc dire que, d'une façon générale, un complexe ϱ^i-équirésiduel, ou vérifiant la relation $\varrho_H^{i,0} = \varrho_H^{0,i}$, n'est pas nécessairement ϱ^i-symétrique.

D'autre part, toujours à l'aide de contre exemples, nous pouvons montrer qu'un complexe ϱ^i-symétrique pour un entier $i > 1$, n'est pas nécessairement symétrique, et que réciproquement, un complexe symétrique n'est pas nécessairement ϱ^i-symétrique pour tout $i \geq 1$.

En effet, dans l'exemple 2 precédent, le complexe $H = \{b, c\}$ est ϱ^2-symétrique, mais n'est pas symétrique.

EXEMPLE 3. Soit le demi-groupe D défini par la table suivante [9] :

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	b
d	a	a	a	b	a
e	a	a	b	b	c

Soit $C_M = D = M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset M_4$ avec $M_2 = \{a, b, d\}$, $M_3 = \{a, b\}$, $M_4 = \{a\}$.

Posons $H = \{b, c\}$. On vérifie que H est symétrique, mais n'est pas ϱ^2-symétrique,

Dans le cas où la chaîne C_M est la chaîne principale de D, nous avons le théorème suivant :

Théorème 5-4

Soit H un complexe symétrique et fort de D. Les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ étant définies à partir de la chaîne C_D principale de D, on a $\varrho_H^{i,j} = \varrho_H^{i',j'}$ quels que soient i, j, i', j' positifs ou nuls et vérifiant $i + j = i' + j'$. En posant $\varrho_H^n = \varrho_H^{i+j}$, si $i + j = n$, on a $\varrho_H^1 \subseteq \varrho_H^2 \subseteq \ldots \subseteq \varrho_H^n \subseteq \varrho_H^{n+1} \subseteq \ldots$.

1°) H étant équirésiduel, d'après le théorème 5-1, on a $W_H^{i,j} = W_H^{i',j'}$, quels que soient i, j, i', j' positifs ou nuls et vérifiant $i + j = i' + j' = n$.

2°) H étant fort, d'après la propriété 3-3, les équivalences $\varrho_H^{n,0}$ et $\varrho_H^{0,n}$ coïncident avec ϱ_H^1 dans $D - W_H^n$.

D'où $\varrho_H^{n,0} = \varrho_H^{0,n} = \varrho_H^n$, quel que soit $n \geq 1$.

3°) Montrons que l'on a $\varrho_H^{i,j} = \varrho_H^n$ quels que soient $i \geq 1$ et $j \geq 1$ tels que $i + j = n \geq 2$.

Soit $x \notin W_H^n$, et soit $x' \equiv x$ $(\varrho_H^{i,j})$, $i + j = n$ $(ij \neq 0)$.

Il existe $(a, b) \in D^i \times D^j$ tel que $axb \in H$ et $ax'b \in H$.

Par suite, on a $Q_{ax}^{0,1} \cap Q_{ax'}^{0,1} \neq \phi$.

H étant fort, on en déduit : $ax \equiv ax'$ (ϱ_H^1), et $ax \notin W_H^1$.

Or l'équivalence ϱ_H^1 est simplifiable dans $D - W_H^1$, d'après la propriété 3-4, d'où $x \equiv x'$ (ϱ_H^1), et par suite, $x \equiv x'$ (ϱ_H^n). Dans $D - W_H^n$, on a donc $\varrho_H^{i,j} \subseteq \varrho_H^n$ quels que soient i et j positifs tels que $i + j = n$.

Démontrons que, dans $D - W_H^n$, on a aussi $\varrho_H^n \subseteq \varrho_H^{i,j}$ si l'on a $ij > 0$ et $i + j = n \geq 2$, n étant donné.

Soient i et j positifs, tels que $i + j = n$. On a donc $1 \leq i < n$ et $1 \leq j < n$.

Soit $x \in D - W_H^n = D - W_H^{i,j}$, et soit $x' \equiv x(\varrho_H^n)$.

Il existe $(a, b) \in D^i \times D^j$ tel que $axb \in H$. L'équivalence ϱ_H^n étant régulière, on a $xb \equiv x'b$ (ϱ_H^n). Or, d'après la propriété 3-3, l'équivalence $\varrho_H^i = \varrho_H^{i,0} = \varrho_H^{0,i}$ coïncide avec ϱ_H^1, dans $D - W_H^i$, donc, à fortiori, dans $D - W_H^n$; par suite dans $D - W_H^n$, on a $\varrho_H^n = \varrho_H^i$. Il en résulte que $axb \in H$, entraîne $ax'b \in H$, puisque, $a \in M_i$. On démontrerait de même que, $a'x'b' \in H$ entraîne $a'xb' \in H$. D'où $x \equiv x'$ $(\varrho_H^{i,j})$ dans $D - W_H^n$.

Et par suite, on a $\varrho_H^{i,j} = \varrho_H^n$, quels que soient i, j positifs, tels que $i + j = n$.

Corollaire 5-1

Si H est un complexe symétrique et fort de D, et si les équivalences $\varrho_H^{i,0}$ (resp. $\varrho_H^{0,i}$) sont définies à partir de la chaîne C_D, H est ϱ^i-symétrique, quel que soit $i \geq 1$.

2°) Complexes ϱ^i-forts. Complexes ϱ^i-parfaits

Définition 5-3

Nous dirons qu'un complexe H est ϱ^i-fort ($i > 1$), s'il est à la fois $\varrho^{i,0}$-fort et $\varrho^{0,i}$-fort.

Définition 5-4

Nous dirons qu'un complexe H est ϱ^i-parfait ($i > 1$) s'il est à la fois $\varrho^{i,0}$-parfait et $\varrho^{0,i}$-parfait.

D'après la propriété 4-2, un sous-demi-groupe ϱ^i-fort de D, est ϱ^i-parfait. Soit S un sous-demi-groupe ϱ^i-fort de D. Les équivalences $\varrho_S^{i,0}$ et $\varrho_S^{0,i}$ étant définies à partir d'une même chaîne C_M, soient $U^{i,0}$ et $U^{0,i}$ les enveloppes unitaires, respectivement, à droite et à gauche de S.

Avec ces notations, nous pouvons énoncer des théorèmes analogues aux théorèmes 17, 18 et 19 bis de P. Dubreil [5].

Théorème 5-5

Soit S un sous-demi-groupe ϱ^i-fort de D.

On a $U^{i,0} \subseteq U^{0,i} + W_S^{0,1}$ et $U^{0,i} \subseteq U^{i,0} + W_S^{1,0}$.

S étant ϱ^i-parfait, on a $W_S^{i,0} = W_S^{1,0}$ et $W_S^{0,i} = W_S^{0,1}$, d'après la propriété 4-1.

Soit $u \in U^{i,0}$ et $u \notin W_S^{0,1}$. On a $su \in S$, quel que soit $s \in S \cap M_i$, d'après la propriété 4-3. D'autre part il existe $x \in M_i$ tel que $ux \in S$, puisque $u \notin W_S^{0,1} = W_S^{0,i}$.

On a alors, $sux \in S$ et $x \in (S.\cdot u) \cap M_i \cap (S.\cdot su)$. S étant $\varrho^{0,i}$-fort, on en déduit : $u \equiv su$ $(\varrho_S^{0,i})$.

Or, on a $su \in S \subseteq U^{0,i}$, d'où $u \in U^{0,i}$, et par suite ;

$$U^{i,0} \subseteq U^{0,i} + W_S^{0,1}.$$

On démontrerait de même la seconde relation de l'énoncé.

Théorème 5-6

Soit S un sous-demi-groupe ϱ^i-fort de D. La relation $W_S^{1,0} \subseteq W_S^{0,1}$ entraîne $U^{0,i} \subseteq U^{i,0}$. Si S est équirésiduel, et en particulier si S est net, on a $U^{0,i} = U^{i,0}$.

1°) Nous avons a) $W_S^{1,0} \subseteq W_S^{0,1}$;
b) $U^{0,i} \cap W_S^{0,1} = \phi$;
c) $U^{0,i} \subseteq U^{i,0} + W_S^{1,0}$.

Ces trois conditions entraînent immediatement $U^{0,i} \subseteq U^{i,0}$.

2°) Si S est équirésiduel, on a alors l'egálité : $U^{0,i} = U^{i,0}$.

Théorème 5-7

Si S est un sous-demi-groupe ϱ^i-fort et équirésiduel de D, son résidu W_S^1 est premier.

En effet, d'après le théorème précédent, on a

$$U^{0,i} = U^{i,0} = U ;$$

et d'après le théorème 3-5, on a

$$W_S^1 = W_U^{1,0} = W_U^{0,1}.$$

Soit alors, $ay \in W_S^1$, avec $a \notin W_S^1$; montrons que l'on a $y \in W_S^1$.

Soit $x \in U^{\cdot}.a$, on a $xa \in U$ et $xay \in W_S^1$. Or, d'après le théorème 4-3, en posant $xa = u$, on a $uy \equiv y\ (\varrho_S^{0,i})$, d'où $y \in W_S^1 = W_S^{0,i}$.

VI. *ETUDE DE LA STRUCTURE DE L'ENSEMBLE QUOTIENT* $\dfrac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ $(ij \geq 0)$

Nous supposons toujours les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ définies à partir d'une même chaîne C_M.

1°) *Etude de* $\dfrac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ *dans le cas ou* $ij = 0$.

L'ensemble quotient $\dfrac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ n'est un demi-groupe, que si l'équivalence $\varrho_H^{i,j}$ est régulière [5] ; or cette condition est satisfaite lorsque H est, par exemple, un complexe ϱ^i-symétrique.

Nous supposerons donc, dans la suite, que H est un complexe ϱ^i-symétrique de D, et nous désignerons par $\dfrac{D}{\varrho_H^i}$, l'ensemble quotient de D par l'équivalence $\varrho_H^{i,0} = \varrho_H^{0,i} = \varrho_H^i$. Nous supposons aussi que l'on a $H \cap M_i D \neq \phi$, afin que l'ensemble $\dfrac{D}{\varrho_H^i}$ ne se réduise pas au seul élément W_H^i.

Lemme 6-1

Si H est un complexe ϱ^i-symétrique et $\varrho^{i,0}$-fort de D, si de plus, H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ_H^i, on a $X \cap M_i = \phi$, quel que soit $X \in \frac{D}{\varrho_H^i} - W_H^i$.

Dire que H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ_H^i, c'est dire, par exemple, que l'on a $H \cap W_H^i \cap M_i D = \phi$.

Soit $X \in \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i.\}$ Soit $x \in X$. Il existe $a \in M_i$, tel que $ax \in H \cap M_i D$, donc $ax \notin W_H^i$; il existe $b \in M_i$, tel que $axb \in H$.

Le complexe H étant $\varrho^{i,0}$-fort, on en déduit: $xb \equiv x\ (\varrho_H^i)$, d'où $xb \in X$; or on a $b \in M_i$, d'où $xb \in X \cap M_i$.

Théhorème 6-1

Si H est un complexe ϱ^i-symétrique et $\varrho^{i,0}$-fort de D, et si de plus, H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ_H^i, H est $\varrho^{0,i}$-fort.

Soit $X \in \frac{D}{\varrho_H^i} - W_H^i$; soit $x \in X \cap M_i$, x existe d'après le lemme précédent.

Soient y et y' appartenant à $Q_x^{0,i}$. On a $xy \in H$, $xy' \in H$ et $x \in M_i$; le complexe H étant $\varrho^{i,0}$-fort, on a $y \equiv y'\ (\varrho_H^i)$.

Le quotient $Q_x^{0,i}$ est donc contenu dans une classe Y modulo ϱ_H^i différente de W_H^i, puisque l'on a $xy \in H$ avec $x \in M_i$.

D'autre part, on a $Q_x^{0,i} \subseteq M_i$, par suite on peut écrire :

$$Q_x^{0,i} \subseteq Y \cap M_i.$$

Soient $y_1 \in Y \cap M_i$ et $y \in Q_x^{0,i}$, l'inclusion précédente implique : $y \equiv y_1\ (\varrho_H^i)$.

Soit $x \in X \cap M_i$, on a $xy \in H$, d'où $xy_1 \in H$ et par suite $y_1 \in Q_x^{0,i}$, d'où $Q_x^{0,i} = Y \cap M_i$.

Montrons que cette relation implique que H est un complexe $\varrho^{0,i}$-fort.

Soient x, $x' \in D$ tels que l'on ait $Q_x^{0,i} \cap Q_{x'}^{0,i} \neq \phi$.

Désignons par X et X' les classes modulo ϱ_H^i contenant respectivement x et x'. D'après ce qui précède, il existe deux classes

Y et Y' modelo ϱ_H^i, distinctes de W_H^i, telles que l'on ait $Q_x^{0,i} = Y \cap M_i$ et $Q_{x'}^{0,i} = Y' \cap M_i$.

Or la relation $Q_x^{0,i} \cap Q_{x'}^{0,i} \neq \phi$ entraîne $Y \cap Y' \neq \phi$, et par suite $Y = Y'$; d'où $Q_x^{0,i} = Q_{x'}^{0,i}$.

H est donc un complexe $\varrho^{0,i}$-fort.

Corollaire 6-1

1) Si H est un complexe ϱ^i-symétrique, $\varrho^{i,0}$-fort et net de D, H est ϱ^i-fort.

2) Si H est un complexe ϱ^i-symétrique et $\varrho^{i,0}$-parfait de D, H est ϱ^i-parfait.

En effet, dans chacun des deux cas considérés H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ_H^i.

En particulier, si S est un sous-demi-groupe ϱ^i-symétrique et $\varrho^{i,0}$-fort de D, S est ϱ^i-parfait.

Théorème 6-2

Si H est un complexe ϱ^i-symétrique et $\varrho^{i,0}$-fort de D, et si de plus H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ_H^i, il existe dans $\frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$ un automorphisme défini par :

$$\Psi(X) = Y, \quad \text{tel que} \quad Y \cap M_i = Q_x^{0,i}, \quad \text{pour} \quad x \in X ;$$
$$\Psi^{-1}(Y) = X, \quad \text{tel que} \quad X \cap M_i = Q_x^{i,0}, \quad \text{pour} \quad y \in Y.$$

D'après la première partie de la démonstration du théorème 6-1, étant donné $X \in \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_{H}^i,\}$ il existe $Y \in \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_{H}^i,\}$ tel que $Q_x^{0,i} = Y \cap M_i$ pour $x \in X$.

Posons $Y = \Psi(X)$.

Soient $y \in Y \cap M_i$, $x \in X \cap M_i$ et $x' \in Q_y^{i,0}$.

On a $xy \in H$, $x'y \in H$ et $y \in M_i$, par suite on a $x \equiv x' \, (\varrho_H^i)$, puisque H est $\varrho^{0,i}$-fort, d'après le théorème 6-1.

On a alors $x' \in X \cap M^i$, d'où $Q_y^{i,0} \subseteq X \cap M_i$, et $x \in Q_y^{i,0}$; on en déduit l'égalité $Q_y^{i,0} = X \cap M_i$, d'où $\Psi^{-1}(Y) = X$.

Propriété 6-1

Si H est un complexe ϱ^i-symétrique et $\varrho^{i,0}$-fort de D, si de plus, H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ^i_H, le complexe $H \cap M_i D$ (resp. $H \cap DM_i$) est saturé dans $M_i D$ (resp. DM_i) par rapport à l'équivalence ϱ^i_H.

Soit $h \in H \cap M_i D$, on peut écrire $h = ab$, avec $a \in M_i$. Soit $x \in M_i D$, tel que l'on ait $x \equiv h$ (ϱ^i_H) Montrons que $x \in H \cap M_i D$.

Posons $x = a'b'$, avec $a' \in M_i$. On a, $x \in \notin W^i_H$, puisque H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ^i_H, de même, on a, $h \notin W^i_H$. Il existe donc $\lambda \in M_i$ tel que $h\lambda = ab\lambda \in H$; or on a aussi $ab \in H$ et le complexe H étant $\varrho^{i,0}$-fort, on en déduit : $b \equiv \lambda b$ (ϱ^i_H).

L'équivalence ϱ^i_H est régulière, d'où $ab\lambda \equiv ab$ (ϱ^i_H), c'est-à-dire $h\lambda \equiv h\,(\varrho^i_H)$.

Or on a, $x \equiv h$ (ϱ^i_H), d'où $x\lambda \equiv h\lambda$ (ϱ^i_H) ; et par suite on a $x\lambda \equiv x$ (ϱ^i_H), c'est-à-dire $a'b'\lambda \equiv a'b'$ (ϱ^i_H).

L'équivalence ϱ^i_H étant simplifiable dans $D - W^i_H$, on en déduit : $b'\lambda \equiv b'$ (ϱ^i_H). Par suite, les conditions $a'b'\lambda \in H$ et $a' \in M_i$ entraînent $a'b' \in H \cap M_i D$, c'est-à-dire $x \in H \cap M_i D$.

H étant un complexe ϱ^i-symétrique et $\varrho^{i,0}$-fort (par exemple) nous distinguerons deux cas suivant que H est net ou ne l'est pas.

a) H est net.

Théorème 6-3

Si H est un complexe ϱ^i-symétrique, net et $\varrho^{i,0}$-fort du demi-groupe D, l'ensemble quotient $\dfrac{D}{\varrho^i_H}$ est un groupe.

Soit H un complexe de D satisfaisant aux hypothèses énoncées ; d'après le corollaire 6-1, H est un complexe ϱ^i-fort.

Soit $X \in \dfrac{D}{\varrho^i_H}$, d'après le théorème 3-5, X est un complexe fort.

Montrons que X est un complexe net et symétrique. D'après le théorème 3-1, on a $X = H.\cdot a$, quel que soit $a \in Q^{i,0}_x$, et $X = H\cdot.b$, quel que soit $b \in Q^{0,i}_x$, on en déduit que X est net.

En effet, supposons qu'il existe $y \in D$, tel que l'on ait, par exemple, $X.\cdot y = \phi$, on aurait alors $H.\cdot ay = \phi$, or H est net, il y a donc contradiction, par suite X est net à droite, on montrerait de même que X est net à gauche. Le théorème 5-3, implique, alors les égalités suivantes :

$$\varrho_H^{i} = \varrho_H^{0,1} = \varrho_X^{1,0} = \varrho_X^{1}, \text{ et par suite, } \frac{D}{\varrho_H^{i}} = \frac{D}{\varrho_X^{1}}.$$

X étant un complexe symétrique, fort et net, l'ensemble $\frac{D}{\varrho_X^{1}}$ est un groupe d'après le théorème 1 de R. Croisot [3].

Nous retrouvons d'ailleurs facilement ce résultat. En effet, H étant ϱ-fort et net, l'équivalence ϱ_H^{i} est simplifiable, par suite le demi-groupe $\frac{D}{\varrho_H^{i}}$ est un semi-groupe. Montrons que le demi-groupe $\frac{D}{\varrho_H^{i}}$ vérifie l'existence des quotients. Soient X et $Y \in \frac{D}{\varrho_H^{i}}$. On a $\varrho_H^{i} = \varrho_X^{1}$ et de plus X est un complexe fort, par suite, d'après le théorème 3-1, il existe λ et μ tels que $Y = X.\cdot\lambda$ et $Y = X\cdot.\mu$.

Soient L et M les classes modulo ϱ_H^{i}, contenant λ et μ, on a $LY = X$ et $YM = X$.

L'ensemble $\frac{D}{\varrho_H^{i}}$ est donc un groupe.

Théhorème 6-4

H étant un complexe ϱ^{i}-symétrique, net et $\varrho^{i,0}$-fort d'un demi-groupe D, le complexe $H \cap M_i D$ (resp. $H \cap DM_i$) est net à gauche (resp. à droite) et $\varrho^{i,0}$-parfait (resp. $\varrho^{0,i}$-parfait).

L'élément unité du groupe $\frac{D}{\varrho_H^{i}}$ étant U, on a $\Psi(U) = \Psi^{-1}(U) = V$, et $H \cap M_i D = V \cap M_i D$, $H \cap DM_i = V \cap DM_i$.

Remarquons que pour tout $x \in D$, on a

$$(H\cdot.x) \cap M_i = [(H \cap M_i D)\cdot.x] \cap M_i$$

et

$$(H.\cdot x) \cap M_i = [(H \cap DM_i).\cdot x] \cap M_i.$$

Par suite, on a $\varrho_{H \cap DM_i}^{i,0} = \varrho_H^{i}$.

Le complexe H étant net, on en déduit que $H \cap M_i D$ et $H \cap DM_i$ sont respectivement net à gauche et net à droite. D'autre part, $H \cap M_i D$ est $\varrho^{i,0}$-fort, puisque H est $\varrho^{i,0}$-fort, de même $H \cap DM_i$ est $\varrho^{i,0}$-fort, car H est aussi $\varrho^{0,i}$-fort.

On peut même remarquer que $H \cap M_i D$ et $H \cap DM_i$ sont forts dans M_i, car, par exemple, les conditions $ab \in H \cap M_i D$, $ac \in H \cap M_i D$, $a'b \in H \cap M_i D$, avec $a, b, c, a' \in M_i$, entraînent $a'c \in H \cap M_i D$, puisque H est ϱ^i-fort.

Soit U l'élément unité du groupe $\frac{D}{\varrho_H^i}$. Montrons que $H \cap M_i D$ est contenu dans la classe $V = \Psi^{-1}(U)$ modulo ϱ_H^i.

Soit $h \in H \cap M_i D$, on peut écrire $h = ab$, avec $a \in M_i$.

Il existe $\lambda \in M_i$, tel que $ab\lambda \in H$, H étant $\varrho^{i,0}$-fort on en déduit: $b\lambda \equiv b\,(\varrho_H^i)$.

Soit $u \in U$, puisque U est l'élément unité du groupe $\frac{D}{\varrho_H^i}$, on a

$$bu \equiv b\,(\varrho_H^i), \quad \text{d'où} \quad bu \equiv b\lambda\,(\varrho_H^i).$$

L'équivalence ϱ_H^i est simplifiable, par suite on a $\lambda \equiv u\,(\varrho_H^i)$, et dar conséquent $\lambda \in U$.

On en conclut que pour tout $h \in H \cap M_i D$, et tout $u \in U$, on a $hu \in H$, d'où $H \cap M_i D \subseteq Q_u^{i,0}$ pour $u \in U$.

D'après le théorème 6-2, si $V = \Psi^{-1}(U)$, on a $Q_u^{i,0} = V \cap M_i$.

Le complexe $H \cap M_i D$ est donc contenu dans la classe V modulo $\varrho_H^i = \varrho_{H \cap M_i D}^{i,0}$.

Le complexe $H \cap M_i D$ est donc $\varrho_i{}^0$-parfait. On démontrerait de même que pour tout $h \in H \cap DM_i$, et tout $u \in U$, on a $uh \in H$, d'où $H \cap DM_i \subseteq Q_u^{0,i}$ pour $u \in U$.

Or, d'après le théorème 6-2, si $V' = \Psi(U)$, on a $Q_u^{0,i} = V' \cap M_i$.

Soit $u \in U \cap M_i$, u existe d'après le lemme 6-1.

Soit $h \in H \cap M_i D$, on a $hu \in H \cap M_i DM_i \subseteq H \cap M_i D \cap DM_i$.

Par suite on a $V \cap V' \neq \phi$, d'où $V = V'$ et par conséquent

$$Q_u^{i,0} = Q_u^{0,i} \textit{ pour tout } u \in U.$$

Les complexes $H \cap M_i D$ et $H \cap DM_i$ sont donc contenus dans la même classe $V = \Psi(U) = \Psi^{-1}(U)$ modulo ϱ_H^i. De plus, on sait d'après la propriété 6-1, que $H \cap M_i D$ et $H \cap DM_i$ sont saturés par rapport à l'equivalence ϱ_H^i, respectivement dans $M_i D$ et DM_i. On en déduit que l'on a

$$H \cap M_i D = V \cap M_i D \quad \text{et} \quad H \cap DM_i = V \cap DM_i.$$

REMARQUE : Puisque l'on a $V = \Psi(U) = \Psi^{-1}(U)$, on a

$U = \Psi(V) = \Psi^{-1}(V)$, d'où $Q_v^{i,0} = Q_v^{0,i}$ *pour tout* $v \in V$.

Cependant, pour $x \in X \in \dfrac{D}{\underset{i}{\varrho_H}}$, X étant différent de U et V, on a, en général, $Q_x^{i,0} \neq Q_x^{0,i}$.

Corollaire 6-2

Si H est un complexe ϱ^i-symétrique, net et $\varrho^{i,0}$-parfait de D, si V est la classe modulo $\overset{i}{\varrho_H}$ contenant H, l'élément unité du groupe $\dfrac{D}{\underset{i}{\varrho_H}}$ est $U = \Psi(V) = \Psi^{-1}(V)$.

En effet, d'après le théorème 6-4, il existe une classe modulo $\overset{i}{\varrho_H}$ contenant $H \cap M_i D$ et $H \cap DM_i$; H étant $\varrho^{i,0}$-parfait, cette classe est celle qui contient H, soit V. Par suite, on a $U = \Psi(V) = \Psi^{-1}(V)$.

On remarque que $Q_h^{i,0} = Q_h^{0,i}$ pour tout $h \in H$, puisque l'on a $H \subseteq V$.

Théorème 6-5

Si S est un sous-demi-groupe ϱ^i-symétrique, net et $\varrho^{i,0}$-fort de D, l'ensemble $\dfrac{D}{\underset{i}{\varrho_S}}$ est un groupe. L'élément unité de ce groupe est la classe modulo $\overset{i}{\varrho_S}$, contenant S, et de plus, on a $Q_x^{i,0} = Q_x^{0,i}$ pour tout $x \in D$.

D'après le corollaire 6-1, S est ϱ^i-fort, donc ϱ^i-parfait. S étant ϱ^i-symétrique, la classe U modulo $\overset{i}{\varrho_H}$ contenant S est à la fois enveloppe unitaire à droite et enveloppe unitaire à gauche de S. Par suite, U est l'élément unité de l'ensemble $\dfrac{D}{\underset{i}{\varrho_S}}$ d'après le théorème 4-3. D'autre part, on sait que $\dfrac{D}{\underset{i}{\varrho_S}}$ est un groupe, d'après le théorème 6-3. Montrons que l'on a $Q_x^{i,0} = Q_x^{0,i}$ pour tout $x \in D$. Soit $x \in D$, et X la classe modulo $\overset{i}{\varrho_S}$ contenant x.

Soient $a \in Q_x^{i,0}$ et $b \in Q_x^{0,i}$, et soient A et B les classes modulo $\overset{i}{\varrho_S}$ contenant a et b.

On a $ax \in S \subseteq U$, d'où $AX = U$, $xb \in S \subseteq U$, d'où $XB = U$. $\dfrac{D}{\underset{i}{\varrho_S}}$ étant un groupe, on en déduit $A = B$.

Or, on sait que $Q_x^{i,0} = A \cap M_i$ et $Q_x^{0,i} = B \cap M_i$, d'où $Q_x^{i,0} = Q_x^{0,i}$.

b) H est ϱ^i-symétrique, $\varrho^{i,0}$-fort, non net.

Par analogie avec la notion de noeud à droite, ou à gauche, définie par P. DUBREIL [5], nous donnons la définition suivante :

Définition 6-1

Nous appelerons noeud à droite de $\frac{D}{\varrho_H^i}$, l'ensemble N_d^i des éléments $X \in \frac{D}{\varrho_H^i}$, tels que la relation $XY = W_H^i$ entraîne $Y = W_H^i$.

On remarque que $W_H^i \notin N_d^i$.

Propriété 6-2

H étant ϱ^i-symétrique et $\varrho^{i,0}$-fort, si l'ensemble N_d^i n'est pas vide, c'est un sous-demi-groupe de $\frac{D}{\varrho_H^i}$.

Soient X_1, $X_2 \in N_d^i$ et supposons que l'on ait : $X_1 X_2 Y = W_H^i$.

$$X_1 \in N_d^i \Longrightarrow X_2 Y = W_H^i,$$
$$X_2 \in N_d^i \Longrightarrow Y = W_H^i, \quad \text{d'où} \quad X_1 X_2 \in N_d^i.$$

REMARQUE : H étant $\varrho^{i,0}$-fort, l'équivalence ϱ_H^i est simplifiable à gauche dans $D - W_H^i$, l'ensemble N_d^i vérifie donc la règle de simplification à gauche.

On définit de façon analogue, le noeud à gauche N_g^i.

On a $W_H^i \notin N_g^i$, et N_g^i est un sous-demi-groupe de $\frac{D}{\varrho_H^i}$.

Définition 6-2

Nous appellerons, noeud de $\frac{D}{\varrho_H^i}$, l'ensemble N^i défini par :

$$N^i = N_d^i \cap N_g^i.$$

D'après ce qui précède, on a $W_H^i \notin N^i$ et N^i est un sous-demi-groupe de $\frac{D}{\varrho_H^i}$.

1°) Nous traiterons tout d'abord l'étude de l'ensemble $\dfrac{D}{\varrho_H^i}$, lorsque l'équivalence ϱ_H^i est définie à partir de la chaîne principale du demi-groupe D.

Propriété 6-3

Si H est un complexe ϱ^i-symétrique, $\varrho^{i,0}$-fort, non net, si N^i n'est pas vide, on a $H \cap D^{i+1} \cap W_H^i = \phi$, c'est-à-dire que H est dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ_H^i.

a) Montrons que H n'est pas contenu dans W_H^i. Pour cela, remarquons que l'existence de N^i entraîne l'existence d'éléments $x \in D^i$, tels que $x \in X \in N^i$. En effet, N^i étant un sous-demi-groupe de $\dfrac{D}{\varrho_H^i}$, si $Y \in N^i$, on a $(Y)^i = X \in N^i$, et X contient necessairement des éléments x de D^i. Cela étant, soit $x \in D^i$, tel que $x \in X \in N^i$; il existe $a \in D^i$, tel que $ax \in H$, ce qui entraîne que a n'appartient pas à W_H^i. Soit A la classe modulo ϱ_H^i contenant a. Supposons que l'on ait $H \subset W_H^i$, on aurait alors $AX = W_H^i$, avec $A \neq W_H^i$ et $X \neq W_H^i$, X n'appartiendrait pas à N^i, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc H n'est pas contenu dans W_H^i.

b) Montrons qu'il existe $U \in N_d^i$, tel que $UX = X$ quel que soit $X \in \dfrac{D}{\varrho_H^i}$.

Soit $s \in D^i$, tel que $s \in S \in N^i$; il existe $\lambda \in D^i$, tel que $\lambda s \in H$, on a donc $\lambda \notin W_H^i$, et par suite $\lambda s \notin W_H^i$, puisque l'on a, $s \in S \in N^i$. Il existe $u \in D^i$ tel que $\lambda su \in H$. Le complexe H étant $\varrho^{i,0}$-fort, on en déduit la relation $s \equiv su\,(\varrho_H^i)$.

En désignant par U la classe modulo ϱ_H^i contenant u, on a $S = SU$. Soit $X \in \dfrac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$, et soit $x \in X$, l'équivalence ϱ_H^i étant régulière, on a $sx \equiv sux\ (\varrho_H^i)$; mais l'équivalence ϱ_H^i est simplifiable à gauche dans $D - \{W_H^i\}$, puisque H est $\varrho^{i,0}$-fort, d'où $x \equiv ux\,(\varrho_H^i)$.

D'où $UX = X$ pour tout $X \in \dfrac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$; d'autre part $UY = W_H^i$ entraîne nécessairement $Y = W_H^i$, donc $U \in N_d^i$.

c) Montrons enfin, que l'on a $H \cap D^{i+1} \cap W_H^i = \phi$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, et soit $h \in H \cap D^{i+1} \cap W_H^i$. Posons $h = ab$, avec $b \in D^i$. Soit $u \in U \cap D^i$, u existe d'après la démonstration précédente; on a $uab \equiv ab\,(\varrho_H^i)$ d'où $uab \in W_H^i$ et $uab \notin H$ car on a $ab \in W_H^i$.

Or, la condition $u \in U$ entraîne aussi $ua \equiv a\,(\varrho_H^i)$, par suite la condition $ab \in H$ avec $b \in D^i$ entraîne $uab \in H$, ce qui constitue une contradiction.

Le complexe H est donc dégagé de son résidu W_H^i.

Théorème 6-6

H étant un complexe ϱ^i-symétrique $\varrho^{i,0}$-fort et non net du demi-groupe D, l'équivalence ϱ_H^i étant définie à partir de la chaîne C_D, si le noeud N^i n'est pas vide, H est aussi $\varrho^{0,i}$-fort ; toute classe $X \in N^i$ est un complexe fort, symétrique, disjoint de son résidu W_X^1, et l'on a $N^i = \dfrac{D}{\varrho_X^1} - \{W_X^1\}$, W_X^1 est premier et N^i est un groupe.

a) Si H est un complexe vérifiant les hypothèses énoncées dans le théorème 6-6, d'après la propriété 6-3 et le théorème 6-1, H est ϱ^i-fort.

b) Montrons que quels que soient $X \in \dfrac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$ et $Y \in N^i$, on a

$$Y \cap W_X^{1,0} = \phi \quad \text{et} \quad Y \cap W_X^{0,1} = \phi.$$

On sait, d'après le théorème 3-1, que l'on a $X = H.\cdot a$ pour tout $a \in Q_x^{i,0}$, et $X = H\cdot.b$ pour tout $b \in Q_x^{0,i}$.

D'autre part, d'après le théorème 6-2, on a

$$Q_x^{i,0} = \Psi(X) \cap D^i, \quad \text{et} \quad Q_x^{0,i} = \Psi^{-1}(X) \cap D^i, \quad \text{où} \quad \Psi(X) \quad \text{et} \quad \Psi^{-1}(X)$$

sont des classes modulo ϱ_H^i distinctes de W_H^i.

Supposons alors qu'il existe $y \in Y \in N^i$, tel que l'on ait $y \in W_x^{0,1}$, c'est-à-dire $X.\cdot y = \phi$, ou $H.\cdot ay = \phi$, on aurait donc $ay \in W_H^{0,1} \subseteq W_H^i$ et par suite $\Psi(X).\,Y = W_H^i$, avec $\Psi(X) \neq W_H^i$, ce qui est impossible puisque $Y \in N^i$. On demontrerait de la même façon que l'on a $Y \cap W_X^{1,0} = \phi$. D'autre part, remarquons que, quel que soit $X \in \dfrac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$, on a $X \cap W_X^{1,0} = \phi$ et $X \cap W_X^{1,0} = \phi$, car pour tout $x \in X = H.\cdot a$, on a par exemple $H.\cdot ax \neq \phi$, puisque $ax \in H \cap D^{i+1}$, donc $ax \notin W_H^i$, et à fortiori $ax \notin W_H^{0,1}$.

c) Montrons que toute classe $X \in N^i$ est symétrique et que l'on a $N^i = \dfrac{D}{\varrho_X^1} - \{W_X^1\}$, avec W_X^1 premier.

D'après le théorème 5-3, X est un complexe fort, et l'on a,

$\varrho_H^i \subseteq \varrho_X^{1,0}$, de plus, $\varrho_H^i = \varrho_X^{1,0}$ dans $D - W_X^{1,0}$ et $W_H^i \subseteq W_X^{1,0}$;

$\varrho_H^i \subseteq \varrho_X^{0,1}$, de plus, $\varrho_H^i = \varrho_X^{0,1}$ dans $D - W_X^{0,1}$ et $W_H^i \subseteq W_X^{0,1}$.

D'autre part, d'après ce qui précède, on a

$$N^i \subseteq \frac{D}{\varrho_X^{1,0}} - \{W_X^{1,0}\}, \quad \text{pour tout} \quad X \in N^i.$$

Montrons que la condition $Y \in \dfrac{D}{\varrho_X^{1,0}} - W_X^{1,0}$ entraîne $Y \in N^i$.

Supposons que l'on ait $YZ = W_H^i$, $Y \in \dfrac{D}{\varrho_X^{1,0}} - \{W_X^{1,0}\} \subseteq \dfrac{D}{\varrho_H^i} - \{W_X^i\}$.

et $Z \in \dfrac{D}{\varrho_H^i}$. Soit $y \in Y$ et $z \in Z$, on a $yz \in W_H^i$.

X étant fort, on a $Y = X.\cdot\lambda$ pour tout $\lambda \in Z\cdot.y$.

Las conditions $\lambda y \in X$ et $\lambda yz \in W_H^i$, entraînent $XZ = W_H^i$, d'où $Z = W_H^i$, puisque $X \in N^i$.

On en déduit que Y appartient à N_d^i, on démontrerait de même que Y appartient à N_g^i, donc à N^i.

On a donc $N^i = \dfrac{D}{\varrho_X^{1,0}} - \{W_X^{1,0}\}$, pour tout $X \in N^i$.

Mais on peut démontrer de la même façon que

$$N^i = \frac{D}{\varrho_X^{0,1}} - \{W_X^{1,0}\}, \quad \text{pour tout} \quad W \in N^i.$$

On en déduit que X est symétrique, et l'on peut écrire

$$N^i = \frac{D}{\varrho_X^1} - \{W_X^1\}, \quad \text{pour tout} \quad X \in N^i.$$

D'autre part, W_X^1 est premier, car si l'on a Y, $Z \in \dfrac{D}{\varrho_X^1} - \{W_X^1\}$, on a $YZ \neq W_X^1$, puisque Y et Z appartiennent à N^i.

Par suite l'ensemble N^i est un groupe, d'après le théorème 2 de R. Croisot [3] ; on peut aussi le démontrer directement par la méthode utilisée dans le théorème 6-3.

Remarque : L'élément unité U du groupe N^i est élément unité dans $\dfrac{D}{\varrho_H^i}$. Il suffit de montrer que U est élément unité dans $\dfrac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$.

Soit $S \in N^i$, on a $US = S$.

Soit $X \in \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$, on a $XUS = XS$, H étant ϱ^i-fort, l'équivalence ϱ_H^i est simplifiable dans $D - \{W_H^i\}$, d'où l'on déduit $XU = X$.

On démontrerait de même que l'on a $UX = X$.

Théorème 6-7

H étant un complexe ϱ^i-symétrique, $\varrho^{i,0}$-fort, non net du demi-groupe D, l'équivalence ϱ_H^i étant définie à partir de la chaîne C_D, si N^i n'est pas vide, la condition nécessaire et suffisante pour que $\frac{D}{\varrho_H^i}$ soit un pseudo-groupe [5], est que son résidu W_H^i soit premier.

En effet, pour que $\frac{D}{\varrho_H^i}$ soit un pseudo-groupe, il faut et il suffit que l'on ait

$$N^i = \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\} \text{ c'est-à-dire } \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\} = \frac{D}{\varrho_X^1} - \{W_X^1\} \text{ pour tout } X \in N^i.$$

On en déduit qu'il faut et qu'il suffit que l'on ait $W_H^i = W_X^1$ pour tout $X \in N^i$. Cette dernière condition est équivalente à la condition : W_H^i est premier. En effet, si l'on a $W_H^i = W_X^1$, pour tout $X \in N^i$, W_H^i est premier, puisque W_X^1 est premier.

Réciproquement, si W_H^i est premier, N^i n'est pas vide, et quel que soit $X \in \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$, on a $X \in N^i$, d'où $N^i = \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\} = \frac{D}{\varrho_X^1} - \{W_X^1\}$ pour tout $X \in \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$, et par suite $W_H^i = W_X^1$.

Corollaire 6-3

Si S est un sous-demi-groupe ϱ^i-symétrique, $\varrho^{i,0}$-fort, non net de D, l'équivalence ϱ_S^i étant définie à partir de la chaîne C_D, l'ensemble $\frac{D}{\varrho_S^i}$ est un pseudo-groupe et pour tout $x \in D$, on a $Q_x^{i,0} = Q_x^{0,i}$.

Les hypothèses de l'énoncé entraînent que S est ϱ^i-parfait, par suite, on a $W_S^i = W_S^{0,1} = W_S^1$, et W_S^1 est premier d'après le théorème 5-7, le noeud N^i n'est donc pas vide, et $\frac{D}{\varrho_S^i}$ est un pseudo-groupe d'après le théorème 6-7.

D'autre part, la théorème 4-3 implique que l'élément unité du groupe $\frac{D}{\varrho_S^i} - \{W_S^i\}$ est la classe U modulo ϱ_S^i contenant S, on en déduit, comme dans le théorème 6-5, que l'on a $Q_x^{i,0} = Q_x^{0,i}$ pour tout $x \in D$.

Théorème 6-8

H étant un complexe ϱ^i-symétrique, non net et $\varrho^{i,0}$-fort du demi-groupe D, l'équivalence ϱ_H^i étant définie à partir de la chaîne C_D, pour que le noeud N^i soit non vide, il faut et il suffit que l'ensemble $\frac{D}{\varrho_H^i}$ possède un élément unité, il faut et il suffit que $H \cap D^{i+1}$ soit ϱ^i-parfait.

1°) La condition $\frac{D}{\varrho_H^i}$ possède un élément unité est nécessaire pour que N^i soit non vide, d'après le théorème 6-6, et elle est évidemment suffisante.

2°) Démontrons la seconde partie du théorème. Si N^i est non vide, on sait que l'on a $H \cap D^{i+1} \cap W_H^i = \phi$, montrons qu'alors $H \cap D^{i+1}$ est ϱ^i-parfait. Soit $h \in H \cap D^{i+1}$. Posons $h = ab$, $a \in D^i$ donc $b \notin W_H^i$. Il existe $\lambda \in D^i$ tel que $ab\lambda \in H$.

Or H étant ϱ^i-fort d'après le théorème 6-6, les conditions $ab \in H$, $ab\lambda \in H$ et $a \in D^i$ entraînent $b \equiv b\lambda$ (ϱ_H^i).

De plus N^i n'étant pas vide, il existe dans $\frac{D}{\varrho_H^i}$ un élément unité U. Soit $u \in U$, on a

$$bu \equiv b\ (\varrho_H^i), \quad \text{d'où} \quad bu \equiv b\lambda\ (\varrho_H^i).$$

L'équivalence ϱ_H^i étant simplifiable dans $D - W_H^i$, on a $u \equiv \lambda$ (ϱ_H^i), d'où $abu \in hu \in H$ car $ab \in D^i$, et ceci pour tout $u \in U$, en particulier $hu \in H$ quel que soit $u \in U \cap D^i \neq \phi$.

Par suite si $h' \in H \cap D^{i+1}$, on a aussi $h'u \in H$ quel que soit $u \in u \cap D^i$, H étant ϱ^i-fort on en déduit $h \equiv h'$ (ϱ_H^i).

$H \cap D^{i+1}$ est donc ϱ^i-parfait et par suite, d'après le théorème 6-2 et la propriété 6-1, on a $H \cap D^{i+1} = V \cap D^{i+1}$ où $V = \Psi(U) = \Psi^{-1}(U)$.

Réciproquement, supposons que le complexe $H \cap D^{i+1}$ soit ϱ^i-parfait, et soit V la classe modulo ϱ_H^i contenant $H \cap D^{i+1}$, cette classe est distincte de W_H^i, donc l'ensemble $\frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$ n'est pas vide.

Soit X une classe modulo ϱ_H^i différente de W_H^i. Il existe Y, tel que l'on ait $YX = V$, on a donc $Y \neq W_H^i$. D'autre part, il existe une classe $U \in \frac{D}{\varrho_H^i} - \{W_H^i\}$ telle que l'on ait $VU = V$.

Par suite, on a

$$YXU = VU = V, \quad \text{d'où} \quad YXU = YX\,;$$

mais l'équivalence ϱ_H^i étant simplifiable à gauche dans $D - \{W_H^i\}$, on en déduit l'égalite $XU = X$.

L'ensemble $\frac{D}{\varrho_H^i}$ possède donc un élément unité à droite U.

Mais on peut écrire $XUX = X \cdot X$, $X \neq W_H^i$, $U \neq W_H^i$, d'où $UX = X$.

U est élément unité dans $\frac{D}{\varrho_H^i}$, par suite N^i n'est pas vide.

EXEMPLES :

1°) Soit D le demi-groupe défini par la table [9]

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a
c	a	a	b	a	b
d	a	a	a	d	d
e	a	a	a	d	d

Posons $H = \{b, d\}$. Nous avons $\varrho_H^{1,0} \neq \varrho_H^{0,1}$ mais $\varrho_H^{0,2} = \varrho_H^{2,0}$ et $W_H^{0,2} = W_H^{2,0}$.

H n'est pas fort mais H est ϱ^2-fort.

Les éléments de $\frac{D}{\varrho_H^2}$ sont $X = \{d, e\}$ et $W_H^2 = \{a, b, c\}$.

Nous avons : $N^2 = \frac{D}{\varrho_H^2} - \{W_H^2\} = X$ puisque W_H^2 est premier.

On remarque que $H \cap D^3 \cap W_H^2 = \phi$ et que $Q_x^{2,0} = Q_x^{0,2} = X \cap D^2$ pour $x \in X$. On vérifie que X est un complexe fort, symétrique et que $W_X^1 = W_H^2$, $\varrho_X^1 = \varrho_H^2$.

2°) Soit D le demi-groupe défini par la table [9]

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	b
d	a	a	a	a	a
e	a	a	b	b	c

Posons $H = \{b,\ c\}$. Nous avons $\varrho_H^{1,0} \neq \varrho_H^{0,1}$ mais H est ϱ^2-symétrique. $\frac{D}{\varrho_H^2}$ est formé par $W_H^2 = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ et la classe $X = \{e\}$.

Le noeud N^2 est vide, d'ailleurs $H \cap D^3 \cap W_H^2 = \{b\} \neq \phi$.

Cependant, on remarque que H n'est pas fort, mais H est ϱ^2-fort.

2°) Envisageons maintenant l'étude de l'ensemble $\frac{D}{\varrho_H^i}$, H étant non net, ϱ^i-symétrique et $\varrho^{i,0}$-fort, dans le cas où l'équivalence ϱ_H^i est définie dans D à partir d'une chaîne C_M quelconque.

Un contre exemple nous montre que si H vérifie les conditions énoncées ci-dessus, et si le noeud N^i n'est pas vide, H n'est pas nécessairement dégagé de son résidu par rapport à l'équivalence ϱ_H^i. En effet, soit D le demi-groupe défini par le table suivante [9] :

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	b
c	a	a	a	a	c
d	a	a	b	a	b
e	a	b	a	d	e

Posons $H = \{b,\ c,\ d\}$ et $C_M = D \supset M_2 \supset M_3$, avec $M_2 = \{a,\ b\}$, $M_3 = \{a\}$.

H est ϱ^2-symétrique, on a $W_H^2 = \{a,\ b,\ c,\ d\}$, $N^2 = \{e\}$, et $H \cap M_2 D \cap W_H^2 = H \cap DM_2 \cap W_H^2 = \{b\}$; on remarque cependant que H est ϱ^2-fort, et que la classe $\{e\}$ est élément unité dans $\frac{D}{\varrho_H^2}$.

Nous pouvons donner un exemple dans lequel H est ϱ^2-symétrique, $\varrho^{2,0}$-fort, mais n'est pas $\varrho^{0,2}$-fort, et nous remarquons que dans ce cas N^2 est vide ; soit D le demi-groupe défini par la table [9] :

	a	b	c	d	e
a	a	a	a	a	a
b	a	a	a	a	a
c	a	a	a	a	b
d	a	a	a	b	a
e	a	a	b	b	c

Posons $H = \{b\}$, $C_M = D = M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3$, où $M_2 = \{a, b, c, d\}$, $M_3 = \{a, b, c\}$.

On a $\overset{2,0}{\varrho_H} = \overset{0,2}{\varrho_H}$, $\overset{2,0}{W_H} = \overset{0,2}{W_H} = \{a, b, c\}$, les autres classes étant $\{d\}$ et $\{e\}$. On vérifie facilement les propriétés énoncées plus haut.

En nous limitant seulement au cas où H est $\varrho^{i0,}$-parfait (par exemple) nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème 6-9

H étant un complexe ϱ^i-symétrique, $\varrho^{i,0}$-parfait, non net du demi-groupe D, le noeud N^i de $\dfrac{D}{\overset{i}{\varrho_H}}$ n'est pas vide, et c'est un groupe.

Puisque H est $\varrho^{i,0}$-parfait, on a $H \cap \overset{i}{W_H} = \phi$, et par suite H est ϱ^i-parfait, d'après le théorème 6-1.

V étant la classe modulo $\overset{i}{\varrho_H}$ contenant H, on a :

$$\overset{i}{\varrho_H} = \overset{1,0}{\varrho_V} = \overset{0,1}{\varrho_V} = \overset{1}{\varrho_V},$$

d'après le théorème3-5 ; par suite on a $\dfrac{D}{\overset{i}{\varrho_H}} = \dfrac{D}{\overset{1}{\varrho_V}}$, avec $\overset{1}{W_V} = \overset{i}{W_H}$.

V est une classe modulo $\overset{1}{\varrho_V}$, distincte de $\overset{1}{W_V}$, et de plus V est un complexc fort, donc $V \cap D^2$ est parfait et par suite le noeud N de $\dfrac{D}{\overset{1}{\varrho_V}}$ n'est pas vide (propriété 2 [3]). Or, ce noeud est aussi le noeud N^i de $\dfrac{D}{\overset{i}{\varrho_H}}$. Par suite d'après le théorème 1 [3], N^i est un groupe.

Corollaire 6-4

S étant un sous-demi-groupe ϱ^i-symétrique, $\varrho^{i,0}$-fort et non net de, le noeud N^i n'est pas vide et l'ensemble $\frac{D}{\varrho_S^i}$ est un pseudo-groupe.

En effet, d'après le théorème précédent, on a $\frac{D}{\varrho_S^i} = \frac{D}{\varrho_U^1}$, avec $W_S^i = W_S^1 = W_U^1$, et l'on sait que W_S^1 est premier, d'après le théorème 5-7.

On a donc $N^i = \frac{D}{\varrho_U^1} - \{W_U^1\}$ où W_U^1 est premier, par suite $\frac{D}{\varrho_S^i} = \frac{D}{\varrho_U^1}$ est un pseudo-groupe.

2°) *Etude de l'ensemble* $\frac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ $(ij \neq 0)$.

L'équivalence $\varrho_H^{i,j}$ est régulière, $\frac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ est un demi-groupe.

Nous considérerons seulement les deux cas suivants :
— H est $\varrho^{i,j}$-parfait et bilatèrement net,
— H est un sous-demi-groupe $\varrho^{i,j}$-fort, non net.
a) H est $\varrho^{i,j}$-parfait et bilatèrement net.

Théorème 6-10

Si H est un complexe $\varrho^{i,j}$-parfait et bilatèrement net du demi-groupe de D, l'équivalence $\varrho_H^{i,j}$ étant définie à partir d'une chaîne C_M quelconque de D, le demi-groupe $\frac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ est un semi-groupe à noyau.

Soit U la classe modulo $\varrho_H^{i,j}$ contenant H ; H étant bilatèrement net, il en est de même de U. D'autre part, d'après le théorème 3-5, U est bilatèrement fort et l'on a $\varrho_H^{i,j} = \varrho_H^{1,1}$ d'où $\frac{D}{\varrho_H^{i,j}} = \frac{D}{\varrho_U^{1,1}}$.

U est bilatèrement parfait puisque c'est une classe modulo $\varrho_H^{1,1}$, par suite l'ensemble $\frac{D}{\varrho_H^{i,j}} = \frac{D}{\varrho_H^{1,1}}$ est un semi-groupe à noyau, d'après le théorème 16 de R. Croisot [2].

Théorème 6-11

Si H est un complexe $\varrho^{i,j}$-parfait et net à droite (par exemple) de D, le demi-groupe quotient $\dfrac{D}{\varrho_H^{i,j}}$ est un groupe.

On sait qu'un complexe net à droite (par exemple) est bilatèrement net. Donc, comme dans le cas étudié précédemment, et avec les mêmes notations, on a $\dfrac{D}{\varrho_H^{i,j}} = \dfrac{D}{\varrho_H^{1,1}}$.

U est bilatèrement parfait et net à droite, il suffit d'appliquer le théorème 18 de R. CROISOT [2].

Corollaire 6-5

Si H est un complexe $\varrho^{i,j}$-parfait et net à droite (par exemple) de D, la classe U modulo $\varrho_H^{i,j}$ contenant H est un complexe parfait, symétrique et net.

On sait que l'on a $\varrho_H^{i,j} = \varrho_U^{1,1}$. La classe U est un complexe bilatèrement parfait, net à droite, et coïncide avec son saturé modulo $\varrho_U^{1,1}$, U est donc parfait, symétrique et net, d'après le corollaire 1 de R. CROISOT ([2], p. 389).

Théorème 6-12

Si S est un sous-demi-groupe $\varrho^{i,j}$-fort et bilatèrement net du demi-groupe D, l'ensemble $\dfrac{D}{\varrho_S^{i,j}}$ est un groupe dont l'élément unité est l'enveloppe unitaire de S.

Soit U l'enveloppe unitaire de S, on a

$$\varrho_S^{i,j} = \varrho_U^{1,1}$$

Il suffit d'appliquer le théorème 19 de R. CROISOT [2].

b) H est un sous-demi-groupe $\varrho^{i,j}$-fort, non bilatèrement net de D, que nous désignerons par S.

On sait que S est $\varrho^{i,j}$-parfait, et si U est l'enveloppe unitaire de S, on a $\varrho_S^{i,j} = \varrho_U^{1,1}$ et $W_S^{i,j} = W_S^{1,1} = W_U^{1,1}$.

La classe U est un complexe bilatèrement fort, non bilatèrement net de D, l'étude de l'ensemble $\dfrac{D}{\varrho_S^{i,j}} = \dfrac{D}{\varrho_U^{1,1}}$ se ramène donc à celle qui a été faite par R. CROISOT dans [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD A.H. et PRESTON G.B. — *The algebraic theory of semigroups.* Vol. 1, 1961 (p. 43).

[2] CROISOT ROBERT. — *Equivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe : J. de Math. pures et appliquées,* t. 70, 1953, p. 373-417.

[3] CROISOT ROBERT. — *Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes ;* Bull. Soc. Math. de France, t. 80, 1952, p. 217-223.

[4] DESQ, ROGER. — *Thèse.* — París, 1964.

[5] DUBREIL PAUL. — *Contribution à la théorie des demi-groupes ;* Mém. Inst. de France, t. 63, 1941, p. 52.

[6] DUBREIL PAUL. — *Contribution à la théorie des demi-groupes.* Bul. Soc. Math. de France, t. 81, 1953, p. 289-300.

[7] GRILLET PIERRE. — *Sur la notion d'équivalence principale ;* Sém. Dubreil — Pisot — Alg. et th. des nombres — 17ème année 1963-64, n.º 2-3.

[8] LEFEBVRE PIERRE. — *Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes ;* Ann. Mat. pura ed applicata (IV). Vol LIX. Pp. 77-164.

[9] TAMURA T. — *All semigroups of order at most 5 ;* J. Gakugei Tokushima Univ., t. 6, 1955, p. 19-39.

La plupart des résultats concernant les équivalences $\varrho_H^{i,j}$ $(ij \geq 0)$ définies dans un demi-groupe D, à partir d'un complexe H et de la chaîne principale C_D, ont été publiés dans quelques Notes aux Comptes rendus de l'Académie des Sciences :

— CALAIS, JOSETTE. — *Equivalences principales généralisées dans les demi-groupes.* — C. R. Acad. Sc., t. 254, p. 3802-3804.

— CALAIS, JOSETTE. — *Propriétés des équivalences principales généralisées.* — C. R. Acad. Sc., t. 254, p. 4410-4412.

— CALAIS, JOSETTE. — *Propriétés des équivalences principales généralisées.* — C. R. Acad. Sc., t. 256, p. 1420-1423.

— CALAIS, JOSETTE. — *Complexes $\varrho^{\alpha,\beta}$-parfaits d'un demi-groupe. Etude de* $\dfrac{D}{\varrho_H^{\alpha,\beta}}$ — C. R. Acad. Sc., t. 257, p. 338-341.