SOLUCION POR APROXIMACIONES SUCESIVAS DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LAS ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES DE 3.er ORDEN LINEALES DE TIPO HIPERBOLICO CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

por

JOAQUIN M.ª CASCANTE DÁVILA

INDICE

PARTE SEGUNDA

Unicidad y dependencia continua de la solución respecto a los valores iniciales.

SOLUCION POR APROXIMACIONES SUCESIVAS DEL PROBLEMA DE CAUCHY PARA LAS ECUACIONES EN DERIVADES PARCIALES DE 3.er ORDEN LINEALES DE TIPO HIPERBOLICO CON DOS VARIABLES INDEPENDIENTES

CAPITULO II

En este trabajo se da más generalidad a los resultados obtenidos en una memoria nuestra anterior (*) publicada en COLLECTANEA MATHEMATICA (Vol. XII-1961), que en lo sucesivo siempre que nos refiramos a ella, designaremos abreviadamente por A.S., determinando la solución del problema de CAUCHY relativo a la ecuación lineal de tipo hiperbólico ya considerada en dicha memoria: $u_{112} + \varrho\,(x_1, x_2)\,u_{122} + \sum_{i,j=1;2} a_{ij}\,u_{ij} + \sum_{k=1.2} b_k\,u_k + c.u = g\,(x_1, x_2)$ por un método de aproximaciones sucesivas, en el supuesto de que los valores ini-

(*) « Aproximaciones sucesivas de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales de 3.er orden » [1] CAP. III (págs. 121-143). Véase la nota bibliográfica al final de la PARTE SEGUNDA.

ciales de la solución u y de sus derivadas u_1 y u_{12} vengan dados sobre un arco de curva (C) perteneciente a la clase (Γ) respecto al dominio de existencia de la ecuación diferencial ordinaria $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$, arcos que previamente fueron definidos y estudiados en la Introducción de un trabajo nuestro (**) publicado posteriormente a aquella memoria también por COLLECTANEA MATHEMATICA, que abreviadamente vamos a designar en lo que sigue por S.P.C., y al cual está estrechamente vinculado el que presentamos, pues se utilizan los resultados allí obtenidos para el cálculo de las aproximaciones, y que puede, por tanto, considerarse como una continuación de aquél.

Es deber por parte nuestra, agradecer y hacer mención expresa de la ayuda que nos proporcionó la « Comisaría General de Protección Escolar y Asistencia Social » mediante una Beca de Iniciación a la Investigación Científica, y a la que gracias a la misma se debe en gran parte la culminación de este trabajo realizado en el Seminario Matemático de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Barcelona.

PARTE PRIMERA

PLANTEO DEL PROBLEMA Y EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DEL MISMO

1. *Formulación del problema.* Consideremos la ecuación en derivadas parciales:

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2) . u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij} . u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k u_k + c.u = g(x_1, x_2) \quad (1)$$

en la que los coeficientes a_{ij}, b_k, c, g son funciones continuas que admiten derivadas parciales asimismo continuas, en un dominio G simplemente conexo y acotado, tal que G esté contenido en un cierto abierto R conexo, en el cual es $\varrho(x_1, x_2)$ una función dos veces continuamente diferenciable, no anulándose la misma en G, por tanto de signo constante en el mismo [signo que siempre se puede suponer positivo ([1])], cuyos valores se mantienen inferiores a un cierto número

(**) « Solución al problema de CAUCHY relativo a una cierta familia de ecuaciones en derivadas parciales de 3.er orden » [2] (págs. 162-168).

([1]) Bastaría en caso contrario efectuar el cambio de variables independientes: $\begin{cases} x_1 = -\xi_1 \\ x_2 = \xi_2 \end{cases}$

positivo $m < 1$ (2). G además es convexo respecto al haz de curvas integrales de la ecuación diferencial ordinaria $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ en el sentido considerado en el n.º 1 de la Introducción de S.P.C. [2].

Sean por otra parte $x_1 = x_1(r)$; $x_2 = x_2(r)$ dos funciones tres veces continuamente diferenciables en un cierto intervalo $r_A \leq r \leq r_B$, definiendo un arco de curva (C) perteneciente a la clase (Γ) respecto a G (n.º 1, Introd. de S.P.C. [2]), y sean $\varphi(r)$, $\Psi(r)$, $\chi(r)$ tres funciones que cumplen las siguientes condiciones:

1.º) $\varphi(r)$ está definida y admite derivadas sucesivas hasta las de tercer orden, continuas en el intervalo $r_A \leq r \leq r_B$ considerado.

2.º) $\Psi(r)$, $\chi(r)$ están definidas y admiten derivadas sucesivas hasta las de segundo orden continuas en el mismo intervalo.

2. *Curvas características.* Éstas vienen dadas, como se sabe, por los sistemas diferenciales asociados a cada una de las ecuaciones en derivadas parciales lineales:

$$\begin{cases} F_{x_1} = 0 \\ F_{x_2} = 0 \\ F_{x_1} + \varrho(x_1, x_2).\ F_{x_2} + 0 \end{cases}$$

en que se desdobla la expresión diferencial:

$$F_{x_1}^2 .\ F_{x_2} .+ \varrho(x_1, x_2).\ F_{x_1} .\ F_{x_2}^2 = 0$$

Tales características están definidas por las familias de curvas consideradas anteriormente (n.º 2 del CAP. I de S.P.C. [2]):

$$\left.\begin{array}{ll} (\alpha) & x_1 = C_1 \\ (\beta) & x_2 = C_2 \\ (\gamma) & \lambda\,[x_1(C_3),\ x_1,\ x_2] = x_2(C_3) \end{array}\right\} \quad (2)$$

3. *Dominio de dependencia de un punto M.* Sea un punto $M(x_1, x_2)$ del dominio de existencia $(\mathcal{E})$ de la función $r = h(x_1, x_2)$ (Véase el n.º 2 de la Introd. de S.P.C. [2],) y tracemos las tres características que pasan por él; supongamos que M es lo suficientemente

(2) En caso contrario, supuesto ya $\varrho(x_1, x_2) > 0$, bastaría efectuar el cambio de variables : $\begin{matrix}\xi_1 = kx_1 \\ \xi_2 = x_2\end{matrix}$, siendo k un número positivo cualquiera mayor que el extremo superior de $\varrho(x_1, x_2)$ en G.

próximo al arco (C), de modo que éste aparte de ser seguramente cortado por la característica del haz (γ), lo sea también por las características de los haces (α) y (β) (figs. 1 y 1′) que pasan por M.

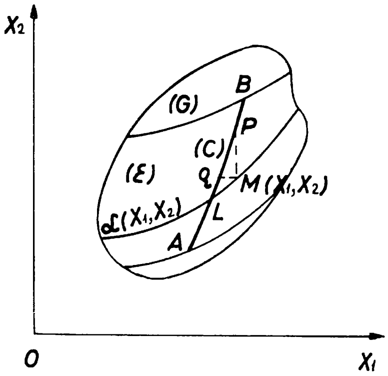


Fig. 1

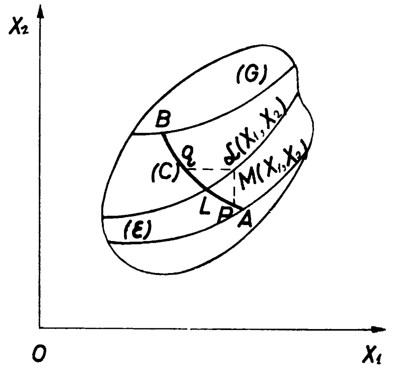


Fig. 1′

El dominio de dependencia de M sobre el arco (C), está constituido, como demostraremos posteriormente, por aquél de los tres intervalos curvilíneos PQ, QL, LP que sea reunión de los otros dos, que en dicho arco determinan, las intersecciones del mismo con las referidas características.

4. *Determinación del dominio de prolongación.* El dominio de prolongación (D) (figs. 2 y 2′) de un arco (C) perteneciente a la clase

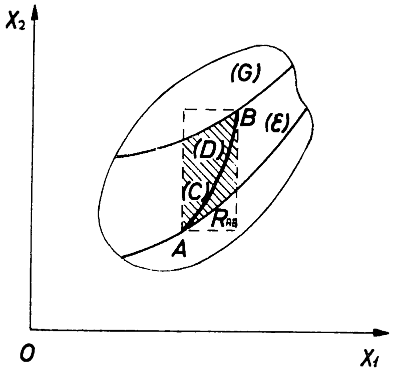


Fig. 2

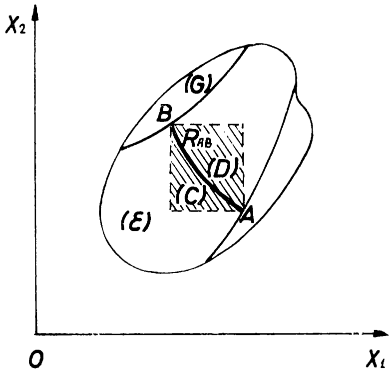


Fig. 2′

(Γ) respecto a G, viene determinado por la intersección $R_{AB} \cap \mathcal{E}$ del dominio de existencia $(\mathcal{E})$ de $r = h\ (x_1,\ x_2)$, y del rectángulo R_{AB} de lados paralelos a los ejes y de diagonal AB; y evidentemente está constituido por todos los puntos de $(\mathcal{E})$ cuyos dominios de dependencia definidos de acuerdo con el número anterior, están contenidos en el arco (C).

Estas definiciones serán justificadas más adelante.

5. *Teorema de existencia y unicidad.* «Supuestas satisfechas las condiciones prescritas en el n.º 1, la ecuación (1) posee una solución $u(x_1, x_2)$ tres veces continuamente diferenciable en el dominio de prolongación (D) de un arco (C) de curva de la clase (Γ), definido por $x_1 = x_1(r)$; $x_2 = x_2(r)$, $(r_A \leq r \leq r_B)$ (solución u perteneciente por tanto a la clase C_3 de las funciones tres veces continuamente diferenciables en (D)) que satisface a las condiciones iniciales:

a) se convierte en $\varphi(r)$ sobre (C), es decir, $u[x_1(r), x_2(r)] \equiv \varphi(r)$.

b) su derivada $u_1(x_1, x_2)$ se reduce sobre (C) a la función $\psi(r)$, es decir, $u_1[x_1(r), x_2(r)] \equiv \psi(r)$.

c) su derivada parcial mixta $u_{12}(x_1, x_2)$ se reduce sobre (C) a $\chi(r)$, es decir, $u_{12}[x_1(r), x_2(r)] \equiv \chi(r)$.

d) esta solución es única.

e) La aplicación $T: (\varphi, \psi, \chi) \to u$ es uniformemente continua si se provee al espacio producto $E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$ de los espacios normados E_φ, E_Ψ, E_χ constituidos el primero por las funciones $\varphi(r)$ definidas y tres veces continuamente diferenciables en $[r_A, r_B]$, y los dos últimos por las funciones $\psi(r)$, $\chi(r)$ dos veces continuamente diferenciables en $[r_A, r_B]$, dotados con las normas respectivas $||\varphi||_3 = \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\varphi(r)| + \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\varphi'(r)| + \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\varphi''(r)| + \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\varphi'''(r)|$; $||\Psi||_2 = \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\Psi(r)| + \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\Psi'(r)| + \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\Psi''(r)|$; $||\chi||_2 = \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\chi(r)| + \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\chi'(r)| + \sup_{r\in[r_A, r_B]} |\chi''(r)|$ de la norma del producto topológico $||(\varphi, \Psi, \chi)|| = \text{máx.}\,[||\varphi||_3, ||\Psi||_2, ||\chi||_2]$, y al espacio vectorial de las funciones u tres veces continuamente diferenciables en (D), de la norma $||u||_3 = \sup_{(D)} |u| +$

$$+ \underset{(i=1,2)}{\text{máx.}} \left[\sup_{(D)} \left| \frac{\delta u}{\delta x_i} \right| \right] + \underset{(j,k=1,2)}{\text{máx.}} \left[\sup_{(D)} \left| \frac{\delta^2 u}{\delta x_j\, \delta x_k} \right| \right] + \underset{(p,q,r=1,2)}{\text{máx.}} \left[\sup_{(D)} \left| \frac{\delta^3 u}{\delta x_p\, \delta x_q\, \delta x_r} \right| \right] »$$

6. *Definición de las aproximaciones y cálculo de las mismas.* Consideremos las ecuaciones en derivadas parciales que siguen:

$$(3)\begin{cases} \overset{0}{u}_{112} + \varrho(x_1, x_2)\ \overset{0}{u}_{122} = g(x_1, x_2) \\ \overset{n}{u}_{112} + \varrho(x_1, x_2).\ \overset{n}{u}_{122} = -\sum\limits_{i,j=1,2} a_{ij}\, \overset{n-1}{u_{ij}} - \sum\limits_{k=1,2} b_k\, \overset{n-1}{u_k} - c.\ u^{n-1}\ (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

cuyas soluciones determinaremos por recurrencia del siguiente modo: la de la primera con las condiciones iniciales:

$$u^0\,[x_1(r),\ x_2(r)] \equiv \varphi(r);\ \overset{0}{u}_1\,[x_1(r), x_2(r)] \equiv \Psi(r);\ \overset{0}{u}_{12}\,[x_1(r),\ x_2(r)] \equiv \chi(r)$$

y las de las restantes ecuaciones con las condiciones iniciales:

$$u^n\,[x_1(r),\ x_2(r)] = \overset{n}{u}_1\,[x_1(r),\ x_2(r)] = \overset{n}{u}_{12}\,[x_1(r),\ x_2(r)] \equiv 0\ (n = 1, 2, \ldots)$$

Dichas ecuaciones son del mismo tipo que la estudiada en el CAP. I de S.P.C. [2], así como las condiciones iniciales impuestas a las mismas, por lo que en virtud de lo demostrado allí, las funciones u^n están perfectamente determinadas en todo el dominio de prolongación (D) del arco (C) construido de acuerdo con la definición anterior.

Las fórmulas resolutivas que allí obtuvimos [n.º 6, CAP. I de S.P.C. [2]) son las que nos expresarán las funciones $u^0\,(x_1,\ x_2)$ y $u^n\,(x_1,\ x_2)$ $(n = 1,\ 2\ldots)$; es decir:

$$u^0\,(x_1,\ x_2) = \varphi\,[r\,(x_2)] + \int_{r(x_2)}^{r(x_1)} \Psi\,(r).\ x_1'\,(r)\,dr + \iint_{(PMQ)} \chi\,[h\,(\xi,\ \xi_2)]\,d\xi_1\,d\xi_2 +$$

$$+ \iint_{(PMQ)} J\,(g)\ d\xi_1\ d\xi_2,$$

$$u^n\,(x_1,\ x_2) = \iint_{(PMQ)} J\,(\Phi^{n-1})\ d\xi_1\ d\xi_2$$

en donde, por brevedad se representa $-\sum\limits_{i,j=1,2} a_{ij}.\ \overset{r}{u}_{ij} - \sum\limits_{k=1,2} b_k\, u^r{}_k - c.\ u^r$ por $\Phi^r\,(x_1,\ x_2)$.

Asimismo, las derivadas de las aproximaciones definidas por las ecuaciones (3), vienen expresadas por fórmulas análogas a las obtenidas en los números 7, 8 y 9 del CAP. I de S.P.C. [2].

Además, como se demostró en dicho capítulo, los dominios de dependencia y de prolongación de tales aproximaciones son los definidos en los números 3 y 4.

7. *Acotación de las aproximaciones correspondientes a los índices $n = 0$, $n = 1$ y de sus derivadas parciales.* Designemos por H una

cota superior de los módulos de los coeficientes a_{ij}, b_k, c de la ecuación (1) y de las derivadas primeras de los mismos en (D), por M_0 una cota superior asimismo de los módulos de $u^0(x_1, x_2)$ y de sus derivadas parciales hasta las de tercer orden, cotas existentes por las hipótesis hechas anteriormente sobre los coeficientes a_{ij}, b_k, c, g y por la continuidad (comprobable inmediatamente mediante las correspondientes fórmulas resolutivas) de $u^0(x_1, x_2)$ y sus derivadas, resultan en primer lugar las desigualdades válidas en (D) :

$$\left|\Phi^0(x_1, x_2)\right| = \left|\sum_{i,j=1,2} a_{ij}.\, u^0_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k\, u^0{}_k + c.\, u^0\right| \leq 6\, H\, M_0\, ;$$

$$\left|\Phi^0_{x_1}(x_1, x_2)\right| \leq \left|\sum_{i,j=1,2} a_{ij} u^0_{ij_1} + \sum_{k=1,2} b_k\, u^0_{k_1} + c\, u^0{}_1\right| + \left|\sum_{i,j=1,2} (a_{ij})_{x_1} u^0_{ij} + \sum_{k=1,2} (b_k)_{x_1} u^0_k + (c)_{x_1} u^0\right| \leq 12\, H M_0$$

y asimismo :

$$\left|\Phi^0_{x_2}(x_1, x_2)\right| \leq 12\ H M_0$$

Por otra parte, por razonamiento enteramente análogo (3) al que se efectuó en nuestro anterior trabajo (n.º 6, CAP. II de A.S. [1]), se deduce en virtud de las hipótesis efectuadas sobre $\varrho(x_1, x_2)$; $(0 < \varrho(x_1, x_2) < m < 1)$, que la posición de las curvas características (γ), $\lambda[x_1(C_3), x_1, x_2] = x_2(C_3)$, que pasan por los puntos de (D), con respecto a la recta (r) de coeficiente angular 1 que pasa por el punto L de intersección de tales características con la curva (C), es la que se representa en la fig. 3 : es decir, la curva pasa de la izquierda a la derecha de la recta (r) al pasar por tal punto L (en el sentido de las x_1 crecientes), no volviendo a cortar más a dicha recta.

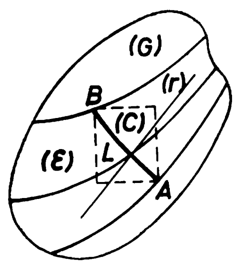
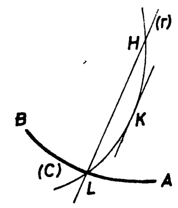


Fig. 3

De ahí se sigue, que para todo punto $M(x_1, x_2)$ de una de tales características per

(3) Dicho razonamiento es como sigue : en el punto L la pendiente $\dfrac{dx_2}{dx_1} = \varrho(x_1, x_2)$ de la curva característica que pasa por dicho punto es menor que la de la recta (r), y la curva característica no vuelve a cortar a la recta (r) en otro punto distinto del L, puesto que en caso contrario (véase figura) en virtud del teorema de los incrementos finitos habría un punto K de la curva característica, en el cual la tangente a la misma sería paralela a la recta (r), es decir, de pendiente $\varrho(K) = 1$, contrariamente a la hipótesis.



teneciente a uno de los dos subdominios $\bar{D}$, $\bar{\bar{D}}$ en que (C) divide a (D), se verifica :

$$\left.\begin{array}{r} \bar{\xi}_M + \bar{\eta}_M \geq \bar{\xi}_L + \bar{\eta}_L \\ \bar{\xi}_M \geq \bar{\xi}_Q \\ \bar{\eta}_M \geq \bar{\eta}_P \end{array}\right\} \bar{M} \epsilon \bar{D} \qquad \left.\begin{array}{r} \bar{\bar{\xi}}_M + \bar{\bar{\eta}}_M \geq \bar{\bar{\xi}}_L + \bar{\bar{\eta}}_L \\ \bar{\bar{\xi}}_M \geq \bar{\bar{\xi}}_Q \\ \bar{\bar{\eta}}_M \geq \bar{\bar{\eta}}_P \end{array}\right\} M \epsilon \bar{\bar{D}}$$

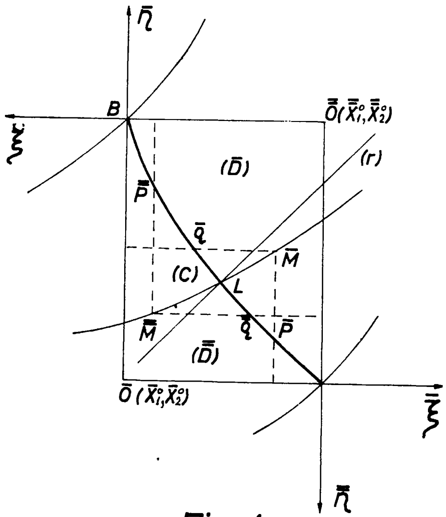


Fig. 4

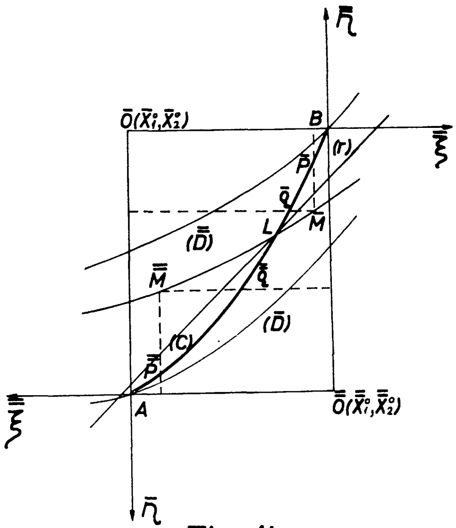


Fig. 4'

siendo $\bar{\xi}\,\bar{0}\,\bar{\eta}$ y $\bar{\bar{\xi}}\,\bar{\bar{0}}\,\bar{\bar{\eta}}$ los ejes indicados en las figuras 4 y 4'.

Establecido esto, procedamos a determinar las cotas superiores de $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas.

Previamente acotemos la integral curvilínea $\oint_{\mathcal{L}(x_1,x_2)} \Phi^0(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 = J(\Phi^0)$ que figura en las expresiones de las mismas, lo que conseguiremos fácilmente, reduciendo dicha integral curvilínea a definida, expresando las coordenadas de los puntos del camino de integración en función del parámetro:

$$v = \begin{cases} \bar{\xi} + \bar{\eta}, \text{ si } \bar{M} \epsilon \bar{D} \\ \bar{\bar{\xi}} + \bar{\bar{\eta}}, \text{ si } \bar{\bar{M}} \epsilon \bar{\bar{D}} \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que dicho camino de integración $\mathcal{L}(x_1, x_2) = \widehat{LM}$

pertenece al mismo sub-dominio $\overline{D}$ o $\overline{\overline{D}}$ a que pertenece $M(x_1, x_2)$, con lo que resulta:

$$d\nu = \begin{cases} d\overline{\xi} + d\overline{\eta} = \left(1 + \dfrac{d\overline{\eta}}{d\overline{\xi}}\right) d\overline{\xi}, \text{ si } \widehat{LM} \subset \overline{D} \\ d\overline{\overline{\xi}} + d\overline{\overline{\eta}} = \left(1 + \dfrac{d\overline{\overline{\eta}}}{d\overline{\overline{\xi}}}\right) d\overline{\overline{\xi}}, \text{ si } \widehat{LM} \subset \overline{\overline{D}} \end{cases}$$

Ahora bien, en el caso de la figura 4 se verifica:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \overline{x}_1{}^0 + \overline{\xi} \\ \xi_2 &= \overline{x}_2{}^0 + \overline{\eta} \\ \frac{d\xi_2}{d\xi_1} &= \frac{d\overline{\eta}}{d\overline{\xi}} = \varrho\,(\overline{x}_1{}^0 + \overline{\xi}, \overline{x}_2{}^0 + \overline{\eta}) \end{aligned}\right\} M \epsilon \overline{D} \qquad \left.\begin{aligned} \xi_1 &= \overline{\overline{x}}_1{}^0 - \overline{\overline{\xi}} \\ \xi_2 &= \overline{\overline{x}}_2{}^0 - \overline{\overline{\eta}} \\ \frac{d\xi_2}{d\xi_1} &= \frac{d\overline{\overline{\eta}}}{d\overline{\overline{\xi}}} = \varrho\,(\overline{\overline{x}}_1{}^0 - \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{x}}_2{}^0 - \overline{\overline{\eta}}) \end{aligned}\right\} M \epsilon \overline{\overline{D}}$$

mientras que en el caso de la figura 4':

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \overline{x}_1{}^0 + \overline{\xi} \\ \xi_2 &= \overline{x}_2{}^0 - \overline{\eta} \\ \frac{d\xi_2}{d\xi_1} &= -\frac{d\overline{\eta}}{d\overline{\xi}} = \varrho\,(\overline{x}_1{}^0 + \overline{\xi}, \overline{x}_2{}^0 - \overline{\eta}) \end{aligned}\right\} M \epsilon \overline{D} \qquad \left.\begin{aligned} \xi_1 &= \overline{\overline{x}}_1{}^0 - \overline{\overline{\xi}} \\ \xi_2 &= \overline{\overline{x}}_2{}^0 + \overline{\overline{\eta}} \\ \frac{d\xi_2}{d\xi_1} &= -\frac{d\overline{\overline{\eta}}}{d\overline{\overline{\xi}}} = \varrho\,(\overline{\overline{x}}_1{}^0 - \overline{\overline{\xi}}, \overline{\overline{x}}_2{}^0 + \overline{\overline{\eta}}) \end{aligned}\right\} M \epsilon \overline{\overline{D}}$$

Si representamos por ξ, η indistintamente $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ ó $\overline{\overline{\xi}}$, $\overline{\overline{\eta}}$ y designamos por $\widetilde{\varrho}\,(\xi, \eta)$ la transformada de $\varrho\,(\xi_1, \xi_2)$ mediante el cambio correspondiente, se obtiene en definitiva: $\pm\, d\xi_1 = d\xi = \dfrac{d\nu}{1 \pm \widetilde{\varrho}\,(\xi, \eta)}$ tomándose el signo $+$ o el $-$ para $\widetilde{\varrho}\,(\xi, \eta)$ según se considere el caso de la figura 4 o el de la figura 4' respectivamente, y el signo $+$ o él $-$ para $d\xi_1$ en ambos casos, según que respectivamente, $M \epsilon \overline{D}$ o $\overline{\overline{M}} \epsilon D$, resultando en consecuencia (indicando por $\widetilde{\Phi}^0(\xi, \eta)$ la transformada de $\Phi^0(\xi_1, \xi_2)$ por el cambio considerado):

$$\left| J(\Phi^0) \right| = \left| \oint_{L(x_1,x_2)} \Phi^0(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| = \left| \int_{\nu_L}^{\nu_M} \widetilde{\Phi}^0(\xi, \eta) \frac{d\nu}{1 \pm \widetilde{\varrho}\,(\xi, \eta)} \right| \leq \frac{6\,H M_0}{1 - m} \left[\frac{\nu}{1!} \right]_{\nu_L}^{\nu_M} =$$

$$= \frac{6\,H M_0}{1 - m} \left[\frac{\xi_M + \eta_M}{1!} - \frac{\xi_L + \eta_L}{1!} \right] \leq M_0 \frac{6H}{1 - m} \cdot \frac{(\xi + \eta)}{1!} .$$

(en donde por brevedad escribimos $\xi + \eta$ en lugar de $\xi_M + \eta_M$), puesto que:

$$\left|\widetilde{\Phi}^0(\xi, \eta)\right| = \left|\Phi^0(\xi_1, \xi_2)\right| \leqq 6 H M_0 \,; \quad \frac{1}{1 \pm \widetilde{\varrho}(\xi, \eta)} < \frac{1}{1 - m} \,; \quad \xi_M + \eta_M \geqq \xi_L + \eta_L$$

según hemos visto anteriormente.

Y análogamente:

$$\left| J(\Phi^0_{x_2}) \right| = \left| \oint_{\mathcal{L}(x_1, x_2)} \Phi^0_{x_2}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 \right| \leq M_0 \frac{12H}{1 - m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

Vamos ahora a demostrar el siguiente:

TEOREMA I: «La aproximación $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas admiten como cota superior $M_0 K \dfrac{\xi + \eta}{1!}$, mientras que sus derivadas terceras admiten la cota numérica $\overline{M}_0$, siendo K y $\overline{M}_0$ números positivos perfectamente definidos.»

En efecto, a partir de la acotación que acabamos de obtener, resulta inmediatamente (fig. 5):

$$\left| u^1(x_1, x_2) \right| = \left| \iint_{(PMQ)} J(\Phi^0)\, d\xi_1\, d\xi_2 \right| = \left| \int_{x_1[r(x_2)]}^{x_1} d\xi_1 \int_{x_2[r(\xi_1)]}^{x_2} J(\Phi^0)\, d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_Q^M d\xi' \int_U^T \frac{6 H M_0}{1 - m} \cdot \frac{\xi' + \eta'}{1!}\, d\eta' \right| \leq$$

$$\leqq \frac{6 H M_0}{1 - m} \cdot \frac{(\xi + \eta)^2}{2.3} \cdot \frac{(\xi + \eta)}{1!} \leqq$$

$$\leq M_0 \frac{6H(\alpha + \beta)^2}{1 - m} \cdot \frac{\xi + \eta}{1!}$$

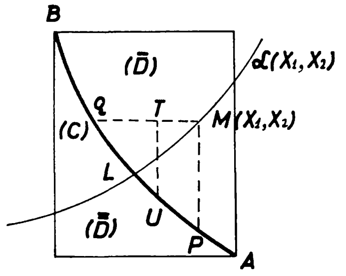


Fig. 5

siendo α y β las longitudes de los lados del rectángulo R_{AB} respectivamente paralelos a los ejes ξ y η.

Asimismo se tendrá:

$$\left.\begin{aligned}\left|u_1^1(x_1, x_2)\right| &= \left|\int_{(PM)} J(\Phi^0)\, d\xi_2\right| \leq M_0 \frac{6H(\alpha+\beta)}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}\\ \left|u_2^1(x_1, x_2)\right| &= \left|\int_{(QM)} J(\Phi^0)\, d\xi_1\right| \leq M_0 \frac{6H(\alpha+\beta)}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}\end{aligned}\right\}$$

Las cotas de las derivadas segundas (n.º 8, CAP. I de S.P.C. [2]) son las siguientes (en las que se ha designado por L una cota superior de los módulos de $\varrho(x_1, x_2)$, $\dfrac{1}{\varrho(x_1, x_2)}$ y de sus derivadas primeras y segundas en (D)):

$$|u_{11}^1(x_1, x_2)| \leq 6L \frac{HM_0}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!} + 6L \frac{HM_0}{1-m}(\alpha+\beta) \frac{\xi+\eta}{1!} + 6HM_0 \frac{\xi+\eta}{1!} =$$

$$= M_0 \cdot 6H \left[L \cdot \frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right] \frac{\xi+\eta}{1!}$$

ya que:

$$\left| \varrho(x_1, x_2) \cdot J(\Phi^0) \right| \leq 6L \frac{HM_0}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!};$$

$$\left| \int_{(PM)} \varrho_{x_2}(\xi_1, \xi_2) \cdot J(\Phi^0)\, d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq 6L \frac{HM_0}{1-m} \left| \int_P^M \frac{\xi'+\eta'}{1!}\, d\eta' \right| \leq 6L \frac{HM_0}{1-m} \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \leq 6L \frac{HM_0}{1-m}(\alpha+\beta) \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$\left| \int_{(PM)} \Phi^0(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq 6HM_0 \left| \int_P^M d\eta' \right| \leq 6HM_0 \cdot \frac{\eta}{1!} \leq 6HM_0 \frac{\xi+\eta}{1!}$$

y análogamente:

$$|u_{12}^1(x_1, x_2)| = |J(\Phi^0)| \leq M_0 \frac{6H}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$|u_{22}^1(x_1, x_2)| \leq M_0 \cdot 6LH \left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right] \frac{\xi+\eta}{1!}$$

Para las derivadas terceras, recordando las expresiones obtenidas en el n.º 9, CAP. I de S.P.C. [2] (en las que se ha sustituido $\Phi(x_1, x_2)$ por $\Phi^0(x_1, x_2) = -\sum_{i.j=1,2} a_{ij}\, u^0{}_{ij} - \sum_{k=1,2} b_k\, u^0{}_k - c.\, u^0$):

$$
(4)\left\{
\begin{aligned}
\overset{1}{u}_{111}(x_1, x_2) &= -\frac{\delta}{\delta x_1}\Big\{ \varrho(M).\, J(\Phi^0) \Big\} + \int_{(PM)} \Big\{ (\varrho_{x_2}(\xi_1, \xi_2).\, J(\Phi^0) \Big\}_{x_1} d\xi_1 + \\
&\quad + \int_{(PM)} \Phi^0_{x_1}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 - \Phi^0(P) \left[\frac{x'_2(r)}{x'_1(r)} \right]_{(P)} \\
\overset{1}{u}_{112}(x_1, x_2) &= \Phi^0(M) + \Phi^0(L).\left[\frac{x'_1(r)}{x'_2(r) - \varrho\,[x_1(r), x_2(r)].\, x'_1(r)} \right]_{(L)}. \\
&\quad .\, \varrho(M).\, \exp.\Big\{ -J(\varrho_{x_2}) \Big\} - \varrho(M).\, J(\Phi^0_{x_2}) \\
\overset{1}{u}_{122}(x_1, x_2) &= -\Phi^0(L).\left[\frac{x'_1(r)}{x'_2(r) - \varrho\,[x_1(r), x_2(r)].\, x'_1(r)} \right]_{(L)}. \\
&\quad .\, \exp.\Big\{ -J(\varrho_{x_2}) \Big\} + J.(\Phi^0_{x_2}) \\
\overset{1}{u}_{222}(x_1, x_2) &= -\frac{\delta}{\delta x_2}\left\{ \frac{J(\Phi^0)}{\varrho(M)} \right\} - \int_{(QM)} \left\{ \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho^2(\xi_1, \xi_2)}.\, J(\Phi^0) \right\}_{x_2} d\xi_1 + \\
&\quad + \int_{(QM)} \left[\frac{\Phi^0(\xi_1, \xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)} \right]_{x_2} d\xi_1 - \frac{\Phi^0(Q)}{\varrho(Q)}.\left[\frac{x'_1(r)}{x'_2(r)} \right]_{(Q)}
\end{aligned}
\right.
$$

resulta como consecuencia de la continuidad uniforme en (D) de los términos que las componen, que todas ellas admiten cotas numéricas determinadas por los extremos superiores de sus módulos, los cuales son finitos por la indicada continuidad uniforme de las mismas en (D).

Si ahora designamos por K el mayor de los factores que multiplican a $M_0 \dfrac{\xi + \eta}{1!}$ en las expresiones de las cotas obtenidas para $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas, resultará en definitiva como cota superior común de las mismas la $M_0.\, K \dfrac{\xi + \eta}{1!}$, y si $\overline{M}_0$ representa el máximo del conjunto constituido por M_0 y las cotas numéricas correspondientes a las derivadas terceras de $u^1(x_1, x_2)$, una cota común de dichas derivadas es $\overline{M}_0$.

El teorema resulta así, pues, demostrado.

Notemos por otra parte, que el resultado obtenido es válido, lo mismo si $M(x_1, x_2)$ pertenece a $\overline{D}$, que a $\overline{\overline{D}}$, pues en el primer caso los caminos de integración correspondientes a las integrales que figuran en las expresiones de $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas están contenidos en $\overline{D}$, y, por tanto, la cota para dicha aproximación y sus derivadas primeras y segundas sería, pues, $M_0 K \frac{\overline{\xi} + \overline{\eta}}{1!}$, mientras que en el segundo caso sería análogamente $M_0 K \frac{\overline{\overline{\xi}} + \overline{\overline{\eta}}}{1!}$, y ya hemos indicado al principio de este número que ξ, η representaban indistintamente $\overline{\xi}$, $\overline{\eta}$ ó $\overline{\overline{\xi}}$, $\overline{\overline{\eta}}$.

Asimismo, como la siguiente aproximación $u^2(x_1, x_2)$, se deduce de la aproximación $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas, y las integrales que figuran afectan a expresiones aplicadas a estas últimas con caminos de integración contenidos en $\overline{D}$ ó en $\overline{\overline{D}}$ según que respectivamente $M(x_1, x_2)$ pertenezca a $\overline{D}$ o a $\overline{\overline{D}}$, al mayorar los módulos de dichas integrales sustituiremos $u^1(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas por $M_0 K \frac{\xi + \eta}{1!}$, y las derivadas terceras por $\overline{M}_0$.

8. *Acotación de la aproximación correspondiente a $n = 2$ y sus derivadas parciales*

TEOREMA II: «Una cota superior de $u^2(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas es de la forma $M_0 K^2 . \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$; las derivadas terceras admiten como cota superior $\overline{M}_0 \overline{K} . \frac{\xi + \eta}{1!}$, siendo $\overline{K}$ un número positivo perfectamente definido.»

En efecto, análogamente al caso $n = 1$, tendremos:

$$\left| \Phi^1(x_1, x_2) \right| = \left| \sum_{i,j=1,2} a_{ij} u^1_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k u^1_k + c u^1 \right| \leq 6 H M_0 K \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$\left| \Phi^1_{x_1}(x_1, x_2) \right| \leq \left| \sum_{i,j=1,2} a_{ij} u^1_{ij1} + \sum_{k=1,2} b_k u^1_{k1} + c u^1_1 \right| + \left| \sum_{i,j=1,2} (a_{ij})_{x_1} u^1_{ij} + \sum_{k=1,2} (b_k)_{x_1} u^1_k + (c)_{x_1} u^1 \right| \leq$$

$$\leq 9 H M_0 K \frac{\xi + \eta}{1!} + 3 H \overline{M}_0 \leq 3H \left[3 M_0 K(\alpha + \beta) + \overline{M}_0 \right].$$

de la misma manera :

$$| \Phi^1_{x_2} (x_1, x_2) | \leq 3H [3 M_0 K (\alpha + \beta) + \overline{M}_0]$$

y además :

$$| J (\Phi^1) | = \left| \int_{v_L}^{v_M} \tilde{\Phi}^1(\xi, \eta) \frac{dv}{1 \pm \tilde{\varrho} (\xi, \eta)} \right| \leq \frac{6HM_0 K}{1 - m} \left| \int_{v_L}^{v_M} \frac{v}{1!} dv \right| \leq M_0 \frac{6H}{1 - m} K . \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$\left| J (\Phi^1_{x_2}) \right| \leq \frac{3H [3 M_0 K (\alpha + \beta) + \overline{M}_0]}{1 - m} \left| \int_{v_L}^{v_M} dv \right| \leq \frac{3 H [3 M_0 K (\alpha + \beta) + \overline{M}_0]}{1 - m} . \frac{\xi + \eta}{1!}$$

así como (considerando las expresiones (4) del número anterior, en las que se ha sustituido Φ^0 por Φ^1, y tenido en cuenta que los términos en que figuran como factores $\Phi^1(L)$, $\Phi^1(P)$, $\Phi^1(Q)$ desaparecen ya que estos últimos son nulos en virtud de las condiciones iniciales impuestas a $u^1(x_1, x_2)$) :

$$\left| J_{x_1} (\Phi^1) \right| = \left| \overset{2}{u}_{112} (x_1, x_2) \right| = \left| \Phi^1 (M) - \varrho (M) . J (\Phi^1_{x_2}) \right| \leq$$

$$\leq \overline{M}_0 . 3H \left[2K + L \frac{3K (\alpha + \beta) + 1}{1 - m} \right] \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$\left| J_{x_2} (\Phi^1) \right| = \left| \overset{2}{u}_{122} (x_1, x_2) \right| = \left| J (\Phi^1_{x_2}) \right| \leq \overline{M}_0 \frac{3H}{1 - m} \left[3K (\alpha + \beta) + 1 \right] \frac{\xi + \eta}{1!}$$

(en las que se ha sustituido M_0 por $\overline{M}_0$ en los términos donde figuraba).

Las cotas superiores de $u^2 (x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras son, por consiguiente :

$$\left| u^2 (x_1, x_2) \right| \leq \frac{6HM_0 K}{1 - m} \left| \int_Q^M d\xi' \int_U^T \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!} d\eta' \right| \leq \frac{6HM_0 K}{1 - m} . \frac{(\xi + \eta)^2}{3.4} . \frac{(\xi + \eta)^2}{2!} \leq$$

$$\leq M_0 \frac{6H (\alpha + \beta)^2}{1 - m} . K \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$\left| \overset{2}{u}_1 (x_1, x_2) \right| \leq \left| \frac{6HM_0 K}{1 - m} \right| \int_P^M \frac{(\xi' + \eta')^2}{2!} d\eta' \left| \leq \frac{6HM_0 K}{1 - m} . \frac{\xi + \eta}{3} . \frac{(\xi + \eta)^2}{2!} \leq \right.$$

$$\leq M_0 \frac{6H (\alpha + \beta)}{1 - m} K \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$$

$$\left| u_2^2\ (x_1,\ x_2) \right| \leq \frac{6HM_0\,K}{1-m} \left| \int_Q^M \frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}\, d\xi' \right| \leq \frac{6HM_0\,K}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{3} \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \leqq$$

$$\leq M_0\, \frac{6H\,(\alpha+\beta)}{1-m}\, K.\, \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

Para las derivadas segundas resultan las cotas:

$$\left| u_{11}^2\ (x_1,\ x_2) \right| \leq M_0.\ 6H. \left[L\, \frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right] K.\, \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

puesto que:

$$\left| \varrho\,(M).\ J\,(\Phi^1) \right| \leq \frac{6.\ LHM_0}{1-m}.\ K.\, \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

$$\left| \int_{(PM)} \varrho_{x_2}(\xi_1,\xi_2).J(\Phi^1)d\xi_2 \right| \leq \frac{6LHM_0K}{1-m} \left| \int_P^M \frac{(\xi'+\eta')^2}{2!}\, d\eta' \right| \leq \frac{6LHM_0K}{1-m} \cdot \frac{\xi+\eta}{3} \cdot \frac{(\xi+\eta)^2}{2!} \leqq$$

$$\leq M_0\, \frac{6LH\,(\alpha+\beta)}{1-m}.\ K.\, \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

$$\left| \int_{(PM)} \Phi^1\,(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_2 \right| \leq 6HM_0\,K \left| \int_P^M \frac{\xi'+\eta'}{1!}\, d\eta' \right| \leq M_0.\ 6H.\ K\, \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

y análogamente:

$$|\, u_{12}^2\,(x_1, x_2)\,| = |\, J\,(\Phi^1)\,| \leq M_0\, \frac{6H}{1-m}.\ K\, \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

$$|\, u_{22}^2\,(x_1, x_2)\,| \leq M_0\, 6LH \left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right].\ K.\, \frac{(\xi+\eta)^2}{2!}$$

El cálculo de las cotas de las derivadas terceras presenta más complicación, por lo que procederemos a acotar separadamente los diversos términos que las componen.

Así para $u_{111}^2\,(x_1,\ x_2)$, tendremos:

$$|\, \varrho_{x_1}\,(M).\ J\,(\Phi^1)\,| \leq \bar{M}_0\, \frac{6\,LH\,(\alpha+\beta)}{1-m} \cdot K \cdot \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$|\, \varrho\,(M).\ J_{x_1}\,(\Phi^1)\,| \leqq \bar{M}_0.\ 3.\ LH \left[2\,K + L\, \frac{3K\,(\alpha+\beta)+1}{1-m} \right].\ \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$\left| \int_{(PM)} \{\varrho_{x_2}(\xi_1, \xi_2) . J(\Phi^1)\}_{x_1} d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq \bar{M}_0 . 3 . L . H(\alpha + \beta) \left[\frac{2K(\alpha + \beta) + L[3K(\alpha + \beta) + 1]}{1 - m} + 2K \right] \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$\left| \int_{(PM)} \Phi^1_{x_1}(\xi_1, \xi_2) d\xi_2 \right| \leq \bar{M}_0 3H \left[3K(\alpha + \beta) + 1 \right] \frac{\xi + \eta}{1!}$$

Análogamente :

$$| \overset{2}{u}_{112}(x_1, x_2) | = | J_{x_1}(\Phi^1) | \leq \bar{M}_0 . 3H \left[2K + L \frac{3K(\alpha + \beta) + 1}{1 - m} \right] \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$| \overset{2}{u}_{122}(x_1, x_2) | = | J_{x_2}(\Phi^1) | \leq M_0 \frac{3H}{1 - m} \left[3K(\alpha + \beta) + 1 \right] \frac{\xi + \eta}{1!}$$

y finalmente las cotas de los diversos términos de $\overset{2}{u}_{222}(x_1, x_2)$, son las siguientes :

$$\left| \left[\frac{1}{\varrho(x_1, x_2)} \right]_{x_2} . J(\Phi^1) \right| \leq \bar{M}_0 \frac{6LH(\alpha + \beta)}{1 - m} . K . \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$\left| \frac{1}{\varrho(x_1, x_2)} . J_{x_2}(\Phi^1) \right| \leq \bar{M}_0 \frac{3L . H}{1 - m} \left[3K(\alpha + \beta) + 1 \right] . \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$\left| \int_{(QM)} \left\{ \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho^2(\xi_1, \xi_2)} . J(\Phi^1) \right\}_{x_2} d\xi_1 \right| \leq \bar{M}_0 \frac{3LH(\alpha + \beta)}{1 - m} \left[5K(\alpha + \beta) + 1 \right] . \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$\left| \int_{(QM)} \left[\frac{\Phi^1(\xi_1, \xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)} \right]_{x_2} d\xi_1 \right| \leq \bar{M}_0 . 3LH \left[5K(\alpha + \beta) + 1 \right] . \frac{\xi + \eta}{1!}$$

(En todas las cotas obtenidas para las derivadas terceras se ha sustituido M_0 por $\bar{M}_0$).

Recordando el significado de K resulta como cota superior de $u^2(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas la $M_0, K^2 . \frac{(\xi + \eta)^2}{2!}$, y si $\bar{K}$ designa el máximo del conjunto constituido por K y los factores que multiplican a $\bar{M}_0 . \frac{\xi + \eta}{1!}$ en las expresiones de las cotas obtenidas para las derivadas terceras de $u^2(x_1, x_2)$, una cota superior de estas últimas será la $\overline{M}_0 . \overline{K} . \dfrac{\xi + \eta}{1!}$, con lo que el teorema resulta así demostrado.

9. *Acotación de las restantes aproximaciones y sus derivadas.* Vamos a generalizar los resultados anteriores demostrando :

TEOREMA III : « La $(n + 1)$-ésima aproximación $u^n(x_1, x_2)$, así como sus derivadas parciales primeras y segundas admiten por cota superior la $M_0 . K^n . \dfrac{(\xi + \eta)^n}{n!}$, y una cota superior de sus derivadas terceras es de la forma $\overline{M}_0 \, \overline{K}^{n-1} . \dfrac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Para establecer dicho teorema procederemos por inducción completa; si suponemos que el teorema es cierto para la aproximación $u^{n-1}(x_1, x_2)$ y sus derivadas, tendremos en primer lugar las desigualdades :

$$| \Phi^{n-1}(x_1, x_2) | = \left| \sum_{i,j=1,2} a_{ij} \, u_{ij}^{n-1} + \sum_{k=1,2} b_k \, u_k^{n-1} + c u^{n-1} \right| \leq 6 \, H M_0 \, K^{n-1} \frac{(\xi + \eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$| \Phi_{x_1}^{n-1}(x_1, x_2) | \leq \left| \sum_{i,j=1,2} a_{ij} u_{ij1}^{n-1} + \sum_{k=1,2} b_k \, u_{k1_1}^{n-1} + c . u_1^{n-1} \right| +$$

$$+ \left| \sum_{i;j=1,2} (a_{ij})_{x_1} \, u_{ij}^{n-1} + \sum_{k=1,2} (b_k)_{x_1} . \, u_k^{n-1} + (c)_{x_1} . \, u^{n-1} \right| \leq$$

$$\leq 3 \, H \left[3 \, M_0 \, K^{n-1} (\alpha + \beta) + \overline{M}_0 \, \overline{K}^{n-2} \right] . \frac{(\xi + \eta)^{n-2}}{(n-2)!}$$

de la misma manera :

$$| \Phi_{x_2}^{n-1}(x_1, x_2) | \leq 3 \, H \left[3 \, M_0 \, K^{n-1} (\alpha + \beta) + \overline{M}_0 \, \overline{K}^{n-2} \right] \frac{(\xi + \eta)^{n-2}}{(n-2)!}$$

y asimismo :

$$| J(\Phi^{n-1}) | = \left| \int_{v_L}^{v_M} \widetilde{\Phi}^{n-1}(\xi, \eta) \frac{dv}{1 \pm \widetilde{\varrho}(\xi, \eta)} \right| \leq \frac{6 H M_0 K^{n-1}}{1 - m} \left| \int_{v_L}^{v_M} \frac{v^{n-1}}{(n-1)!} \, dv \right| \leq$$

$$\leq M_0 \frac{6H}{1 - m} . \, K^{n-1} \frac{(\xi + \eta)^n}{n!}$$

$$\left| J(\Phi_{x_2}^{n-1}) \right| \leq \frac{3H\,[3\,M_0\,K^{n-1}(\alpha+\beta)+\overline{M}_0\,\overline{K}^{n-2}]}{1-m} \left| \int_{v_L}^{v_M} \frac{v^{n-2}}{(n-2)!}\,dv \right| \leq$$

$$\leq \frac{3\,H\,[3\,M_0\,K^{n-1}(\alpha+\beta)+\overline{M}_0\,\overline{K}^{n-2}]}{1-m} \cdot \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

así como :

$$|\,J_{x_1}(\Phi^{n-1})\,| = |\,u_{112}^{n-1}(x_1, x_2)\,| = |\,\Phi^{n-1}(M) - \varrho\,(M).\ J(\Phi_{x_2}^{n-1})\,| \leq$$

$$\leq \overline{M}_0.\ 3H \left[2K + L\,\frac{3K(\alpha+\beta)+1}{1-m} \right] \overline{K}^{n-2}.\ \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|\,J_{x_2}(\Phi^{n-1})\,| = |\,u_{122}^{n-1}(x_1, x_2)\,| = |\,J(\Phi_{x_2}^{n-1})\,| \leq$$

$$\leq \overline{M}_0.\ \frac{3H}{1-m} \left[3K(\alpha+\beta)+1 \right].\ \overline{K}^{n-2}.\ \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(en las que se ha sustituido M_0 por $\overline{M}_0$ y algunos factores K por $\overline{K}$.), obteniéndose como cotas superiores de $u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras las siguientes:

$$|\,u^n(x_1, x_2)\,| \leq \frac{6\,HM_0\,K^{n-1}}{1-m}. \left| \int_Q^M d\xi' \int_U^T \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}\,d\eta' \right| \leq$$

$$\leq \frac{6HM_0\,K^{n-1}}{1-m}.\ \frac{(\xi+\eta)^2}{(n+1)(n+2)}.\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!} \leq M_0\,\frac{6H(\alpha+\beta)^2}{1-m}.\ K^{n-1}\,\frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

$$|\,u_1^n(x_1, x_2)\,| \leq \frac{6HM_0\,K^{n-1}}{1-m} \left| \int_P^M \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}\,d\eta' \right| \leq \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-m}.\ \frac{\xi+\eta}{n+1}.\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!} \leq$$

$$\leq M_0\,\frac{6H(\alpha+\beta)}{1-m}\,K^{n-1}.\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

$$|\,u_2^n(x_1, x_2)\,| \leq \frac{6HM_0K^{n-1}}{1-m}. \left| \int_Q^M \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}\,d\xi' \right| \leq \frac{6HM_0\,K^{n-1}}{1-m}.\ \frac{\xi+\eta}{n+1}.\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!} \leq$$

$$\leq M_0\,\frac{6H(\alpha+\beta)}{1-m}\,K^{n-1}.\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

y para las derivadas segundas resultan las cotas :

$$|\,u_{11}^n(x_1, x_2)\,| \leq M_0.\ 6.\ H \left[L.\ \frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right].\ K^{n-1}.\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

ya que :

$$\left| \varrho(M).\ J(\Phi^{n-1}) \right| \leq \frac{6\,LH}{1-m}.\ M_0.\ K^{n-1}\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

$$\left| \int_{(PM)} \varrho_{x_2}(\xi_1,\ \xi_2).\ J(\Phi^{n-1})\ d\xi_2 \right| \leq \frac{6\,LHM_0\,K^{n-1}}{1-m}.\left| \int_P^M \frac{(\xi'+\eta')^n}{n!}\ d\eta' \right| \leq$$

$$\leq \frac{6\,LH(\alpha+\beta)}{1-m}\ M_0\,K^{n-1}\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

$$\left| \int_{(PM)} \Phi^{n-1}(\xi_1,\xi_2)\ d\xi_2 \right| \leq 6\,HM_0\,K^{n-1} \left| \int_P^M \frac{(\xi'+\eta')^{n-1}}{(n-1)}\ d\eta' \right| \leq 6\,HM_0\,K^{n-1}\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

asimismo :

$$|\ u_{12}^n(x_1,\ x_2)\ | = |\ J(\Phi^{n-1})\ | \leq M_0\ \frac{6H}{1-m}.\ K^{n-1}.\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

$$|\ u_{22}^n(x_1,\ x_2)\ | \leq M_0.\ 6\,LH \left[\frac{\alpha+\beta+1}{1-m} + 1 \right] K^{n-1}\ \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$$

Para el cálculo de las cotas de las derivadas terceras, acotaremos por separado cada uno de los términos que las componen.

De este modo para $u_{111}^n(x_1,\ x_2)$ obtenemos :

$$|\ \varrho_{x_1}(M).\ J(\Phi^{n-1})\ | \leq \frac{6LH(\alpha+\beta)\,K}{1-m}.\ \overline{M}_0.\ \overline{K}^{n-2}.\ \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$|\ \varrho(M).\ J_{x_1}(\Phi^{n-1})\,| \leq 3.L.H \left[2K + L\,\frac{3K(\alpha+\beta)+1}{1-m} \right] \overline{M}_0\overline{K}^{n-2}\frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left| \int_{(PM)} \left\{ \varrho_{x_2}(\xi_1,\ \xi_2).\ J(\Phi^{n-1}) \right\}_{x_1} d\xi_2 \right| \leq$$

$$\leq 3LH(\alpha+\beta)\left[\frac{2K(\alpha+\beta)+L\,[3K(\alpha+\beta)+1]}{1-m} + 2K \right] \overline{M}_0.\overline{K}^{n-2}.\ \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left| \int_{(PM)} \Phi_{x_1}^{n-1}(\xi_1,\ \xi_2)\ d\xi_2 \right| \leq 3H \left[3K.\,(\alpha+\beta)+1 \right] \overline{M}_0.\ \overline{K}^{n-2}.\ \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Análogamente :

$$| u^n_{112}(x_1, x_2) | = | J_{x_1}(\Phi^{n-1}) | \leq \overline{M}_0 . 3H \left[2K + L \frac{3K(\alpha+\beta)+1}{1-m} \right] . \overline{K}^{n-2} . \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$| u^n_{122}(x_1, x_2) | = | J_{x_2}(\Phi^{n-1}) | \leq \overline{M}_0 \frac{3H}{1-m} \left[3K(\alpha+\beta)+1 \right] . \overline{K}^{n-2} \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

y para los términos que componen $u^n_{222}(x_1, x_2)$ resultan las cotas :

$$\left| \left[\frac{1}{\varrho(x_1, x_2)} \right]_{x_2} . J(\Phi^{n-1}) \right| \leq \frac{6LHK}{1-m} (\alpha+\beta) . \overline{M}_0 . \overline{K}^{n-2} . \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left| \frac{1}{\varrho(x_1, x_2)} . J_{x_2}(\Phi^{n-1}) \right| \leq \frac{3LH}{1-m} \left[3K(\alpha+\beta)+1 \right] \overline{M}_0 . \overline{K}^{n-2} . \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left| \int\!\!\int_{(QM)} \left\{ \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho^2(\xi_1, \xi_2)} . J(\Phi^{n-1}) \right\}_{x_2} d\xi_1 \right| \leq \frac{3LH}{1-m} (\alpha+\beta) \left[5K(\alpha+\beta)+1 \right] \overline{M}_0 \overline{K}^{n-2} \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\left| \int\!\!\int_{(QM)} \left[\frac{\Phi^{n-1}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)} \right]_{x_2} d\xi_1 \right| \leq 3LH \left[5K(\alpha+\beta)+1 \right] \overline{M}_0 \overline{K}^{n-2} \frac{(\xi+n)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(En las cotas obtenidas para las derivadas terceras se ha sustituido M_0 por $\overline{M}_0$, y algunos factores K por $\overline{K}$).

Teniendo en cuenta la definición de K y $\overline{K}$ resulta como cota superior de $u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas la $M_0 . K^n . \frac{(\xi+\eta)^n}{n!}$, y como cota de las derivadas terceras la $\overline{M}_0 . \overline{K}^{n-1} \frac{(\xi+\eta)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Como para $n = 3$, se verifican las hipótesis del Teorema III según el Teorema II, queda, pues, demostrado lo que se pretendía.

10. *Construcción de la solución al problema de* CAUCHY. Consideremos las series:

$$\sum_{r=0}^{\infty} u^r ; \sum_{\substack{r=0 \\ (k=1,2)}}^{\infty} u^r_k ; \sum_{\substack{r=0 \\ (i,j=1,2)}}^{\infty} u^r_{ij} ; \sum_{\substack{r=0 \\ (i,j,k=1,2)}}^{\infty} u^r_{ijk} ; \sum_{r=0}^{\infty} \Phi^r \tag{5}$$

de las cuales las seis primeras admiten en (D) como mayorante la serie numérica de términos positivos y convergente :

$$M_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K^r . (\alpha+\beta)^r}{r!} = M_0 . e^{K(\alpha+\beta)}$$

las cuatro siguientes la:

$$M_0 + \bar{M}_0 . \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{K}^r . (\alpha + \beta)^r}{r!} = M_0 + \bar{M}_0 . e^{\bar{K}(\alpha+\beta)}$$

y la última la:

$$6 HM_0 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{K^r (\alpha + \beta)^r}{r!} = 6 HM_0 \, e^{K(\alpha+\beta)}$$

por lo que en (D) la convergencia de las series (5) será absoluta y uniforme.

La primera de dichas series define, por tanto en (D), una función $u(x_1, x_2)$ cuyas derivadas parciales hasta las de tercer orden vendrán expresadas por las sumas de las correspondientes series de (5) restantes.

En virtud de las fórmulas resolutivas que expresan las funciones: $S^r = u^r_{12} (x_1, x_2)$ $(r = 0, 1, 2, ...)$, se puede escribir:

$$\sum_{r=0}^{n} s^r = \chi \, [h (x_1, x_2)] + J \, [g (x_1, x_2)] + \sum_{r=0}^{n-1} J \, [\Phi^r (x_1, x_2)]$$

De esta igualdad, teniendo en cuenta la linealidad del operador J, y la convergencia uniforme en (D) de la sucesión de funciones:

$$V_n (x_1, x_2) = \sum_{r=0}^{n-1} \Phi^r (x_1, x_2)$$

y poniendo $s = \sum_{r=0}^{\infty} s^r$, se deduce por paso al límite esta otra:

$$s (x_1, x_2) = \chi \, [h (x_1, x_2)] + J \, [g (x_1, x_2)] + J \, [\Phi (x_1, x_2)] \qquad (6)$$

en la que $\Phi (x_1, x_2)$ designa la expresión $- \sum_{i,j=1,2} a_{ij} \, u_{ij} - \sum_{k=1,2} b_k \, u_k - cu$ resultante del paso al límite.

De (6) se obtiene:

$$\left. \begin{aligned} u_{112} = s_1 = \chi' \, [h \, (x_1, x_2)] \frac{\delta h}{\delta x_1} + J_{x_1} (g) + J_{x_1} (\Phi) \\ u_{122} = s_2 = \chi' \, [h \, (x_1, x_2)] \frac{\delta h}{\delta x_2} + J_{x_2} (g) + J_{x_2} (\Phi) \end{aligned} \right\}$$

y de estas últimas [habida cuenta que: $J_{x_1} (F) + \varrho (x_1, x_2) \, J_{x_2} (F) \equiv F$

(n.º 6, CAP. I de S.P.C. [2]), y : $\frac{\delta h}{\delta x_1} + \varrho(x_1, x_2) \frac{\delta h}{\delta x_2} \equiv 0$ (n.º 3, Introducción de S.P.C. [2])], resulta :

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2).\, u_{122} \equiv \Phi(x_1, x_2) + g(x_1, x_2)$$

es decir, en definitiva :

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2).\, u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_i + \sum_{k=1.2} b_k\, u_k + cu \equiv g(x_1, x_2)$$

lo que demuestra que la función $u(x_1, x_2)$ definida mediante la primera de las series (5) satisface idénticamente en (D) a la ecuación en derivadas parciales propuesta.

Cumple además, como se verifica fácilmente, las condiciones iniciales de convertirse la misma en $\varphi(r)$ sobre (C), de reducirse a $\Psi(r)$ sobre (C) su derivada parcial $u_1(x_1, x_2)$, y a $\chi(r)$ su derivada mixta $u_{12}(x_1, x_2)$.

Por otra parte, el dominio de dependencia de un punto $M(x_1, x_2)$ suficientemente próximo a (C) es el definido en el n.º 3, puesto que siendo éste dominio de dependencia para todas las aproximaciones $u^n(x_1, x_2)$, los valores de $\varphi(r)$, $\Psi(r)$ y $\chi(r)$ sobre el mismo, determinan unívocamente a $u(x_1, x_2)$ en $M(x_1, x_2)$, no influyendo sobre el valor de $u(x_1, x_2)$ en M, los valores de $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $\chi(r)$ fuera de tal dominio, quedando, pues, justificada la definición dada en el n.º 3.

Asimismo, el dominio de prolongación del arco (C), es efectivamente el (D) que se definió en el n.º 4, puesto que (C) contiene los dominios de dependencia de todos los puntos M de (D), y por tanto, los valores iniciales $\varphi(r)$, $\psi(r)$, $\chi(r)$ dados sobre (C) determinan unívocamente el valor de u en todo punto de (D).

La función $u(x_1, x_2)$ así construida, es, pues, la solución al problema de CAUCHY considerado. La unicidad, así como la dependencia continua de la misma respecto a los valores iniciales, se demuestran en los números correspondientes a la PARTE SEGUNDA que a continuación sigue.

PARTE SEGUNDA

Unicidad y dependencia continua de la solucion respecto a los valores iniciales.

1. *Unicidad de la solución.* «La solución del problema de Cauchy considerado:

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho\,(x_1,\ x_2).\ u_{122} + \sum\limits_{i,j=1,2} a_{ij}\ u_{ij} + \sum\limits_{k=1,2} b_k\ u_k + cu = g\,(x_1,\ x_2) \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} u\,(P) = \varphi\,(P) \\ u_1\,(P) = \psi\,(P) \\ u_{12}\,(P) = \chi\,(P) \end{array}\right\}\ P \in (C) \end{array}\right\} \quad (1)$$

supuesto verificadas las restricciones exigidas en el n.º 1 de la PARTE PRIMERA es *única.*»

Para demostrar dicha unicidad, consideremos dos soluciones $u\,(x_1,\ x_2), \bar{u}\,(x_1,\ x_2)$ (pertenecientes a la clase C_3) del problema de Cauchy representado por el sistema (1). Poniendo $\bar{\bar{u}}\,(x_1, x_2) = u\,(x_1, x_2) - \bar{u}\,(x_1, x_2)$ la función $\bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2)$, será solución de la ecuación en derivadas parciales:

$$u_{112} + \varrho\,(x_1,\ x_2)\ u_{122} = \bar{\bar{\Phi}}\,(x_1,\ x_2) \quad (2)$$

$$(\text{con } \bar{\bar{\Phi}}\,(x_1,\ x_2) = -\sum_{i,j=1,2} a_{ij}\ \bar{\bar{u}}_{ij} - \sum_{k=1,2} b_k\ \bar{\bar{u}}_k - c.\,\bar{\bar{u}})$$

verificando las condiciones iniciales:

$$\bar{\bar{u}}\,(P) = \bar{\bar{u}}_1\,(P) = \bar{\bar{u}}_{12}\,(P) \equiv 0, \text{ si } P \in (C).$$

Dicha ecuación (2), así como las condiciones iniciales a que satisface $\bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2)$, es del mismo tipo que las estudiadas en el CAP. I de S.P.C. [2], por lo que $\bar{\bar{u}}\,(x_1,\ x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas vendrán expresadas en función de $\bar{\bar{\Phi}}\,(x_1,\ x_2)$, por las mismas fórmulas resolutivas que allí se obtuvieron (n.os 6, 7 y 8 de dicho Capítulo), las cuales aplicadas al caso que nos ocupa son las siguientes:

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\overline{u}}(x_1, x_2) = \iint\limits_{(PMQ)} J(\overline{\overline{\Phi}})\, d\xi_1\, d\xi_2 \\
&\overline{\overline{u}}_1(x_1, x_2) = \int\limits_{(PM)} J(\overline{\overline{\Phi}})\, d\xi_2 \\
&\overline{\overline{u}}_2(x_1, x_2) = \int\limits_{(QM)} J(\overline{\overline{\Phi}})\, d\xi_1 \\
&\overline{\overline{u}}_{11}(x_1, x_2) = -\varrho(M). J(\overline{\overline{\Phi}}) + \int\limits_{(PM)} \varrho_{x_2}(\xi_1, \xi_2). J(\overline{\overline{\Phi}})\, d\xi_2 + \iint\limits_{(PM)} \overline{\overline{\Phi}}(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_2 \\
&\overline{\overline{u}}_{12}(x_1, x_2) = J(\overline{\overline{\Phi}}) \\
&\overline{\overline{u}}_{22}(x_1, x_2) = -\frac{J(\overline{\overline{\Phi}})}{\varrho(M)} - \int\limits_{(QM)} \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho^2(\xi_1, \xi_2)} J(\overline{\overline{\Phi}})\, d\xi_1 + \int\limits_{(QM)} \frac{\overline{\overline{\Phi}}(\xi_1, \xi_2)}{\varrho(\xi_1, \xi_2)}\, d\xi_1
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si $\overline{\overline{M}}_0$ designa una cota superior en (D) de $\overline{\overline{u}}(x_1, x_2)$ y de sus derivadas primeras y segundas, y H es la cota superior, ya considerada anteriormente (n.º 7 de la PARTE PRIMERA) de los módulos de los coeficientes a_{ij}, b_k, c, se deducen inmediatamente y procediendo de igual modo que allí las acotaciones que siguen:

$$\left|\overline{\overline{\Phi}}(x_1, x_2)\right| = \left|\sum_{i,j=1,2} a_{ij}. \overline{\overline{u}}_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k \overline{\overline{u}}_k + c\overline{\overline{u}}\right| \leq 6\, HM_0$$

$$\left|J(\overline{\overline{\Phi}})\right| \leq \frac{6\, HM_0}{1-m} . \frac{\xi+\eta}{1!}$$

y por aplicación del teorema de la media a las integrales que figuran en las expresiones de $\overline{\overline{u}}$, $\overline{\overline{u}}_k$, $\overline{\overline{u}}_{ij}$, se obtienen para estas últimas las cotas:

$$|\overline{\overline{u}}\ (x_1, x_2)| \leq \overline{\overline{M}}_0 \frac{6H(\alpha+\beta)^2}{1-m} . \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$|\overline{\overline{u}}_1\ (x_1, x_2)| \leq \overline{\overline{M}}_0 \frac{6H(\alpha+\beta)}{1-m} . \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$|\overline{\overline{u}}_2\ (x_1, x_2)| \leq \overline{\overline{M}}_0 \frac{6H(\alpha+\beta)}{1-m} . \frac{\xi+\eta}{1!}$$

$$| \bar{\bar{u}}_{11}(x_1, x_2) | \leq \bar{\bar{M}}_0 \, 6H \left[L . \frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right] \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$| \bar{\bar{u}}_{12}(x_1, x_2) | \leq \bar{\bar{M}}_0 . \frac{6H}{1 - m} . \frac{\xi + \eta}{1!}$$

$$| \bar{\bar{u}}_{22}(x_1, x_2) | \leq \bar{\bar{M}}_0 \, 6L . H \left[\frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right] . \frac{\xi + \eta}{1!}$$

en las que L, igual que allí (n.º 7 de la PARTE PRIMERA) representa una cota superior de los módulos de $\varrho(x_1, x_2)$, $\dfrac{1}{\varrho(x_1, x_2)}$ y de sus derivadas primeras y segundas en (D).

Las cotas que se acaban de obtener, pueden sustituirse por la cota única $M_0 \, K \dfrac{\xi + \eta}{1!}$, si K tiene el mismo significado que anteriormente, es decir, si :

$$K = \text{máx.} \left[\frac{6H}{1 - m}, \frac{6H(\alpha + \beta)}{1 - m}, \frac{6H(\alpha + \beta)^2}{1 - m}, 6H\left(L . \frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right), 6LH\left(\frac{\alpha + \beta + 1}{1 - m} + 1 \right) \right]$$

Sustituyendo las funciones subintegrales por las cotas respectivas, aplicando el teorema de la media, y procediendo igual que en el n.º 8 de la PARTE PRIMERA, se obtiene de nuevo para $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ y sus derivadas parciales primeras y segundas la cota superior $\bar{\bar{M}}_0 . K^2 . \dfrac{(\xi + \eta)^2}{2!}$.

Y así sucesivamente, obteniéndose en general, como se demostraría fácilmente, procediendo por recurrencia, y de manera enteramente análoga a como se hizo en el n.º 9 de la PARTE PRIMERA, la cota superior $M_0 \, K^n \dfrac{(\xi + \eta)^n}{n!}$ para $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ y sus derivadas primeras y segundas; y al ser n cualquiera, y ser por otra parte $\xi + \eta \leq \alpha + \beta$, $\bar{\bar{u}}(x_1, x_2)$ y sus derivadas parciales de primero y segundo orden, serán menores en valor absoluto que cualquier número positivo prefijado al arbitrio, por lo que en (D) serán nulas idénticamente, es decir: $u(x_1, x_2) \equiv \bar{u}(x_1, x_2)$, lo que prueba la unicidad de la solución del problema de CAUCHY representado por el sistema (1).

2. *Dependencia continua de las soluciones de la ecuación homogénea* $u_{112} + \varrho(x_1, x_2)\, u_{122} + \sum\limits_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij} + \sum\limits_{k=1,2} b_k\, u_k + cu = 0$ *respecto a los valores iniciales dados sobre* (C). Consideremos la sucesión de aplicaciones :

$$T^{(n)} : (\varphi, \psi, \chi) \in E_\varphi \times E_\psi \times E_\chi \to u^n \in C_3$$

definidas por recurrencia como sigue :

$$\left.\begin{array}{l} u^n_{112} + \varrho(x_1, x_2)\, u^n_{122} = \Phi^{n-1}(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{l} u^n(P) \equiv \varphi(P) \\ u^n_1(P) \equiv \Psi(P) \\ u^n_2(P) \equiv \chi(P) \end{array}\right\} \quad P \in (c) \end{array}\right\} \quad (4)$$

con $\Phi^{n-1}(x_1, x_2) = -\sum\limits_{i,j=1,2} a_{ij}\, u^{n-1}_{ij} - \sum\limits_{k=1,2} b_k\, u^{n-1}_k - c.\, u^{n-1}$ $\quad (n = 1, 2, \ldots)$

y $\Phi^{n-1}(x_1, x_2) \equiv 0$ para $n = 0$, es decir, a cada terna ordenada $(\varphi, \psi, \chi) \in E\varphi \times E\psi \times E\chi$, la aplicación $T^{(r)}$ asigna como imagen la $u^r \in C_3$, solución del problema de CAUCHY definido por el sistema (4).

Las $T^{(n)}$ son unívocas en virtud del teorema de unicidad, y asimismo lineales, y aplican el espacio vectorial producto $E\varphi \times E\psi \times E\chi$ de los espacios normados $E\varphi$, $E\psi$, $E\chi$ constituidos el primero por las funciones $\varphi(r)$ definidas y tres veces continuamente diferenciables en $[r_A, r_B]$, y los dos últimos por las $\Psi(r)$ y $\chi(r)$ dos veces continuamente diferenciables en $[r_A, r_B]$ dotado de la norma $||(\varphi, \psi, \chi)|| =$ máx. $(||\varphi||_3, ||\Psi||_2, ||\chi||_2)$ con :

$$||\varphi||_3 = \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\varphi(r)| + \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\varphi'(r)| + \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\varphi''(r)| + \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\varphi'''(r)|$$

$$||\Psi||_2 = \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\Psi(r)| + \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\Psi'(r)| + \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\Psi''(r)|$$

$$||\chi||_2 = \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\chi(r)| + \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\chi'(r)| + \sup_{r \in [r_A, r_B]} |\chi''(r)|$$

en el espacio vectorial C_3 de las funciones tres veces continuamente diferenciables en (D), el cual supondremos provisto de la topología engendrada por la norma $\| u \|_3 = \sup_{(D)} \left| u \right| + \max_{(i=1,2)} \left[\sup_{(D)} \left| \frac{\delta u}{\delta xi} \right| \right] +$

$+ \max_{(j,k=1,2)} \left[\sup_{(D)} \left| \frac{\delta^2 u}{\delta x_j \delta x_k} \right| \right] + \max_{(p,q,r=1,2)} \left[\sup_{(D)} \left| \frac{\delta^3 u}{\delta x_p \, \delta x_q \, \delta x_r} \right| \right]$, espacio que provisto con dicha topología designaremos por E_u.

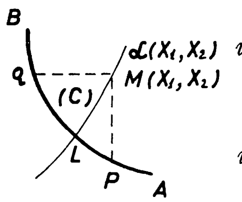
Nos proponemos demostrar el siguiente:

LEMA I. «Supuestos dotados los espacios vectoriales $E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$ y E_u de las normas acabadas de indicar, las aplicaciones $T^{(n)}$ son lineales y continuas, y pertenecen por tanto al espacio vectorial $\mathscr{L}(E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi, E_u)$ de las aplicaciones lineales y continuas de $E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$ en E_u».

Para demostrar dicho lema, probemos previamente que la aplicación $T^{(0)}$ es continua, lo cual resulta inmediatamente teniendo en cuenta la expresión de u^0 (véase n.º 6 del CAP. I de S.P.C. [2]):

$$u^0 = \varphi(Q) + \int_{(QP)} \Psi . \, dx_1 + \iint_{(PMQ)} \chi \, [h\,(\xi_1, \xi_2)] \; d\xi_1 \; d\xi_2$$

y que las de las derivadas primeras, segundas y terceras de u^0 son por tanto:



$$u_1^0 = \Psi(P) + \int_{(PM)} \chi \, [h\,(\xi_1, \xi_2)] \; d\xi_2$$

$$u_2^0 = \left[\frac{\varphi'(r)}{x'_2(r)} \right]_{(Q)} - \left[\Psi(r) . \, \frac{x'_1(r)}{x'_2(r)} \right]_{(Q)} + \int_{(QM)} \chi \, [h\,(\xi_1, \xi_2)] \; d\xi_1$$

$$u_{11}^0 = \left[\frac{\Psi'(r)}{x'_1(r)} \right]_{(P)} - \left[\chi\,(r) \; \frac{x'_2(r)}{x'_1(r)} \right]_{(P)} + \int_{(PM)} \chi' \, [h\,(\xi_1, \xi_2)] \; h_{x_1}(\xi_1, \xi_2) \; d\xi_2$$

$u_{12}^0 = \chi \, [h\,(x_1, x_2)] = \chi(L)$ [pues $h\,(x_1, x_2)$ es una integral primera de $\frac{dx_2}{dx_1} = \varrho\,(x_1, x_2)$ (n.º 3, Introd. de S.P.C. [2]) y por tanto es constante a lo largo de la curva integral $\mathcal{L}\,(x_1, x_2)$ que pasa por el punto $M\,(x_1, x_2)$],

$$u_{22}^0 = \left[\frac{1}{x'_2(r)} . \, \frac{d}{dr} \left\{ \frac{\varphi'(r)}{x'_2(r)} \right\} \right]_{(Q)} - \left[\Psi'(r) \, \frac{x'_1(r)}{x'_2(r)} \right]_{(Q)} - \left[\frac{\Psi(r)}{x'_2(r)} . \, \frac{d}{dr} \left\{ \frac{x'_1(r)}{x'_2(r)} \right\} \right]_{(Q)} -$$

$$-\left[\chi(r)\,\frac{x'_1(r)}{x'_2(r)}\right]_{(Q)}+\int_{(QM)}\chi'\,[h(\xi_1,\xi_2)].\ h_{x_2}(\xi_1,\xi_2)\,d\xi_1$$

$$u^0_{111}=\left[\frac{1}{x'_1(r)}.\frac{d}{dr}\left\{\frac{\Psi'(r)}{x'_1(r)}\right\}\right]_{(P)}-\left[\chi'(r).\ \frac{x'_2(r)}{x'_1(r)}\right]_{(P)}-\left[\frac{\chi(r)}{x'_1(r)}.\ \frac{d}{dr}\left\{\frac{x'_2(r)}{x'_1(r)}\right\}\right]_{(P)}-$$

$$-\left[\chi'(r).\ h_{x_1}.\ \frac{x'_2(r)}{x'_1(r)}\right]_{(P)}+\int_{(PM)}\frac{\delta}{\delta x_1}\left\{\chi'(h).\ h_{x_1}\right\}d\xi_2$$

$$u^0_{112}=\chi'(L).\ h_{x_1}(M)$$

$$u^0_{122}=\chi'(L).\ h_{x_2}(M)$$

$$u^0_{222}=\left[\left(\frac{1}{x'_2(r)}.\ \frac{d}{dr}\right)^{(2)}.\left\{\frac{\varphi'(r)}{x'_2(r)}\right\}\right]_{(Q)}-\left[\frac{1}{x'_2(r)}.\ \frac{d}{dr}\left\{\Psi'(r).\ \frac{x'_1(r)}{x'^2_2(r)}\right\}\right]_{(Q)}-$$

$$-\left[\frac{1}{x'_2(r)}.\ \frac{d}{dr}\left\{\Psi(r)\,\frac{x_2'(r)x_1''(r)-x_2''(r)x_1'(r)}{x'^3_2(r)}\right\}\right]_{(Q)}-\left[\chi'(r)\,\frac{x'_1(r)}{x'^2_2(r)}\right]_{(Q)}-$$

$$-\left[\frac{\chi(r)}{x'_2(r)}.\ \frac{d}{dr}\left\{\frac{x'_1(r)}{x'_2(r)}\right\}\right]_{(Q)}-\left[\chi'(r).\ h_{x_1}.\ \frac{x'_1(r)}{x'_2(r)}\right]_{(Q)}+\int_{(QM)}\frac{\delta}{\delta x_2}\left\{\chi'(h).\ h_{x_2}\right\}d\xi_1.$$

En efecto, basta aplicar el teorema de la media a las integrales que intervienen en las expresiones de $u^0(x_1,\ x_2)$ y de sus derivadas primeras, segundas y terceras, resultando, habida cuenta además, que $\varphi(r)$, $\varphi'(r)$, $\varphi''(r)$, $\varphi'''(r)$, $\Psi(r)$, $\Psi'(r)$, $\Psi''(r)$, $\chi(r)$, $\chi'(r)$, $\chi''(r)$, figuran linealmente en los términos no afectados del signo de integración, que $u^0(x_1,\ x_2)$ y sus derivadas de primero, segundo y tercer orden admiten en (D) la cota superior, $l.\,||(\varphi,\Psi,\chi)||$ en la que l es una constante positiva que sólo depende de (D) y de (C), y $||(\varphi,\ \Psi,\ \chi)||$ es la norma de $(\varphi,\ \Psi,\ \chi)\ \epsilon\ E_\varphi\times E_\psi\times E_\chi$ considerada anteriormente.

De todo ello se deduce que :

$$||u^0||_3=\sup_{(D)}.\,|u^0|+\max_{(i=1,2)}.\left[\sup_{(D)}.\left|\frac{\delta u^0}{\delta x_i}\right|\right]+\max_{(j,k=1,2)}.\left[\sup_{(D)}.\left|\frac{\delta^2u^0}{\delta x_j\delta x_k}\right|\right]+$$

$$+\max_{(p,q,r=1,2)}.\left[\sup_{(D)}.\left|\frac{\delta^3u}{\delta x_p\,\delta x_q\,\delta x_r}\right|\right]\le 4\,l.\left\|(\varphi,\ \Psi,\ \chi)\right\|$$

lo que demuestra la continuidad de la aplicación $T^{(0)}$ en el punto $(0,0,0)\ \epsilon\ E_\varphi\times E_\Psi\times E_\chi$, y en virtud de la linealidad de $T^{(0)}$, la continuidad uniforme de la misma en todo $E_\varphi\times E_\Psi\times E_\chi$.

Demostrado ya que $T^{(0)} \in \mathcal{L}(E_\varphi \times E_\Psi \times E_\varkappa,\ E_u)$, se generaliza fácilmente el resultado procediendo por recurrencia.

Supuesto que la aplicación $T^{(n-1)} \in \mathscr{L}(E_\varphi \times E_\Psi \times E_\varkappa,\ E_u)$, al considerar las expresiones de $u^n(x_1, x_2)$ y sus derivadas de primero, segundo y tercer orden, las cuales resultan de superponer las correspondientes a las soluciones de los problemas de CAUCHY parcialmente homogéneos :

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho\,(x_1, x_2)\, u_{122} = 0 \\ \left.\begin{array}{l} u\ \ (P) = \varphi\,(P) \\ u_1\ (P) = \Psi(P) \\ u_{12}\,(P) \equiv \chi\ (P) \end{array}\right\} P \in (C) \end{array}\right\} (5) \qquad \left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho(x_1, x_2) u_{122} = \Phi^{n-1}(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{l} u\ \ (P) \equiv 0 \\ u_1\ (P) \equiv 0 \\ u_{12}(P) \equiv 0 \end{array}\right\} P \in (C) \end{array}\right\} (5')$$

en que se desdobla el problema de CAUCHY representado por el sistema :

$$\left.\begin{array}{l} \overset{n}{u}_{112} + \varrho\,(x_1,\ x_2)\ \overset{n}{u}_{122} = \Phi^{n-1}\,(x_1,\ x_2) \\ \left.\begin{array}{l} u^n\ \ (P) \equiv \varphi\ \ (P) \\ \overset{n}{u}_1\ \ (P) \equiv \Psi\,(P) \\ \overset{n}{u}_{12}\,(P) \equiv \chi\ \ (P) \end{array}\right\} P \in (C) \end{array}\right\}$$

y tener en cuenta las fórmulas resolutivas de los n.os 6, 7, 8, 9 del CAP. I de S.P.C. [2], expresiones que en definitiva son las siguientes :

$$u^n = u^0 + \iint\limits_{(PMQ)} J\,(\Phi^{n-1})\ d\xi_1\ d\xi_2$$

$$\overset{n}{u}_1 = \overset{0}{u}_1 + \int\limits_{(PM)} J\ (\Phi^{n-1})\ d\xi_2$$

$$\overset{n}{u}_2 = \overset{0}{u}_2 + \int\limits_{(QM)} J\ (\Phi^{n-1})\ d\xi_1$$

$$\overset{n}{u}_{11} = \overset{0}{u}_{11} - \varrho\,(M).\ J(\Phi^{n-1}) + \int\limits_{(PM)} \varrho_{x_2}\,(\xi_1, \xi_2).\ J\,(\Phi^{n-1})\ d\xi_2 + \int\limits_{(PM)} \Phi^{n-1}\,(\xi_1, \xi_2)\ d\xi_2$$

$$\overset{n}{u}_{12} = \overset{0}{u}_{12} + J\,(\Phi^{n-1})$$

$$u_{22}^{n} = \overset{0}{u}_{22} - \frac{J(\Phi^{n-1})}{\varrho(M)} - \int_{(QM)} \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1,\xi_2)}{\varrho^2(\xi_1,\xi_2)} J(\Phi^{n-1}) d\xi_1 + \int_{(QM)} \frac{\Phi^{n-1}(\xi_1,\xi_2)}{\varrho(\xi_1,\xi_2)} d\xi_1$$

$$u_{111}^{n} = \overset{0}{u}_{111} - \frac{\delta}{\delta x_1}\left\{ \varrho(M).\, J(\Phi^{n-1}) \right\} + \int_{(PM)} \left\{ \varrho_{x_2}(\xi_1,\xi_2)\, J(\Phi^{n-1}) \right\}_{x_1} d\xi_2 +$$
$$+ \int_{(PM)} \Phi_{x_1}^{n-1}(\xi_1,\xi_2)\, d\xi_2 - \Phi^{n-1}(P) \left[\frac{x_2'(r)}{x_1'(r)} \right]_{(P)}$$

$$u_{112}^{n} = \overset{0}{u}_{112} - \Phi^{n-1}(L) \left[\frac{x'_1(r)}{x'_2(r) - \varrho\,[x_1(r), x_2(r)].\, x_1'(r)} \right]_{(L)} .\ \varrho(M).\ \exp.\ \{-J(\varrho_{x_2})\} -$$
$$- \varrho(M).\ J(\Phi_{x_2}^{n-1})$$

$$u_{122}^{n} = \overset{0}{u}_{122} - \Phi^{n-1}(L) \left[\frac{x_1'(r)}{x_2'(r) - \varrho\,[x_1(r), x_2(r)]\, x_1'(r)} \right]_{(L)} .\ \exp.\ \{-J(\varrho_{x_2})\} + J(\Phi_{x_2}^{n-1})$$

$$u_{222}^{n} = \overset{0}{u}_{222} - \frac{\delta}{\delta x_2}\left\{ \frac{J(\Phi^{n-1})}{\varrho(M)} \right\} - \int_{(QM)} \left\{ \frac{\varrho_{x_1}(\xi_1,\xi_2)}{\varrho^2(\xi_1,\xi_2)}.\ J(\Phi^{n-1}) \right\}_{x_2} .\ d\xi_1 -$$
$$- \frac{\Phi^{n-1}(Q)}{\varrho(Q)} . \left[\frac{x_1'(r)}{x_2'(r)} \right]_{(Q)} + \int_{(QM)} \left[\frac{\Phi^{n-1}(\xi_1,\xi_2)}{\varrho(\xi_1,\xi_2)} \right]_{x_2} d\xi_1 .$$

se obtiene sin dificultad, para u^n y sus derivadas primeras, segundas y terceras por aplicación del teorema de la media (en las que R designa una cota superior en (D) de los módulos de los coeficientes que afectan $\Phi^{n-1}(L)$, $\Phi^{n-1}(P)$ y $\Phi^{n-1}(Q)$), y observando que:

$$|\ \Phi^{n-1}\ | \leq 6H\,.\, ||\ u^{n-1}\ ||_3$$
$$|\ \Phi_{x_1}^{n-1}\ | \leq 12H\,.\, ||\ u^{n-1}\ ||_3$$
$$|\ \Phi_{x_2}^{n-1}\ | \leq 12H\,.\, ||\ u^{n-1}\ ||_3$$
$$|\ J\ (\Phi^{n-1})\ | \leq 6H\alpha\,.\, ||\ u^{n-1}\ ||_3$$
$$|\ J_{x_1}\ (\Phi^{n-1})\ | \leq 6H\ [1 + R + 2\,L\,\alpha]\,.\, ||\ u^{n-1}\ ||_3$$
$$|\ J_{x_2}\ (\Phi^{n-1})\ | \leq 6H\ [R + 2\alpha]\,.\, ||\ u^{n-1}\ ||_3$$

las siguientes cotas:

$|u^n \quad| \leq 6H\alpha^2\beta. ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

$|u_1^n \quad| \leq 6H\alpha\beta. ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

$|u_2^n \quad| \leq 6H\alpha^2. ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

$|u_{11}^n \,| \leq 6H\,[L\alpha(1 + \beta) + \beta]. ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

$|u_{12}^n \,| \leq 6H\alpha. ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

$|u_{22}^n \,| \leq 6HL.\,\alpha\,(2 + \alpha). ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

$|u_{111}^n| \leq 6H\,[L\,(1 + \beta). (1 + R + 2L\,\alpha + \alpha) + 2\beta]. ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

$|u_{112}^n| \leq 6H\,[1 + R + 2L\,\alpha]. ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

$|u_{122}^n| \leq 6H\,[R + 2L\,\alpha]. ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

$|u_{222}^n| \leq 6HL\,[\alpha\,(4 + \alpha) + (1 + \alpha). (R + 2\,\alpha)]. ||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$

cotas que pueden sustituirse por la cota común $k.||u^{n-1}||_3 + ||u^0||_3$, siendo k el mayor de los coeficientes de $||u^{n-1}||_3$, resultando en consecuencia:

$$\left\| u^n \right\|_3 = \sup_{(D)} \left| u^n \right| + \max_{(i=1,2)} \left[\sup_{(D)} \left| \frac{\delta u^n}{\delta x_i} \right| \right] + \max_{(j,k=1,2)} \left[\sup_{(D)} \left| \frac{\delta^2 u^n}{\delta x_j \delta x_k} \right| \right] +$$

$$+ \max_{(p,q,r=1,2)} \left[\sup_{(D)} \left| \frac{\delta^3 u^n}{\delta x_p\, \delta x_q\, \delta x_r} \right| \right] \leq 4\,k\,||u^{n-1}||_3 + 4\,||u^0||_3$$

Por tanto, en virtud de la continuidad ya demostrada de $T^{(0)}$ y de la hipótesis de recurrencia, elegido al arbitrio un $\varepsilon > 0$, se podrán determinar $\eta_1 > 0$ y $\eta_2 > 0$, tales que:

$$\begin{cases} (\forall\,(\varphi, \Psi, \chi) \in E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi) : ||(\varphi, \Psi, \chi)|| < \eta_1 \Rightarrow ||u^0||_3 < \dfrac{\varepsilon}{8} \\ (\forall\,(\varphi, \Psi, \chi) \in E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi) : ||(\varphi, \Psi, \chi)|| < \eta_2 \Rightarrow ||u^{n-1}||_3 < \dfrac{\varepsilon}{8k} \end{cases}$$

y si η designa el mín. (η_1, η_2), se obtiene en definitiva:

$$(\forall\,(\varphi, \Psi, \chi) \in E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi) : ||(\varphi, \Psi, \chi)|| < \eta \Rightarrow ||u^n||_3 <$$

$$< 4\,k\,\frac{\varepsilon}{8k} + 4\,\frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon,$$

lo que demuestra la continuidad uniforme de $T^{(n)}$ en $E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$.

Como para $n = 1$, es cierta la hipótesis de recurrencia, el resultado obtenido es completamente general, quedando demostrado pues, lo afirmado en el Lema.

Sentado esto, demostremos el siguiente :

LEMA II. «La aplicación: T: $(\varphi, \Psi, \chi) \in E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi \to u \in E_u$, que asigna a cada terna ordenada $(\varphi, \Psi, \chi) \in E_\varphi \times E_\psi \times E_\chi$, como imagen la función $u \in C_3$ solución del problema de CAUCHY :

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho(x_1, x_2)\, u_{122} + \sum\limits_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij} + \sum\limits_{k=1,2} b_k\, u_k + cu = 0 \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{r} u\ (P) \equiv \varphi\,(P) \\ u_1\ (P) \equiv \psi\,(P) \\ u_{12}(P) \equiv \chi\ (P) \end{array}\right\} P \in (C) \end{array}\right\} \quad (6)$$

es lineal y continua, supuestos dotados $E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$ y E_u de las normas respectivas consignadas anteriormente, y pertenece, por consiguiente, al espacio vectorial $\mathscr{L}(E_\varphi \times E_\Psi \times E_\varkappa,\ E_u)$ de las aplicaciones lineales y continuas de $E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$ en E_u».

En efecto, en virtud de lo demostrado en el n.º 10 de la PARTE PRIMERA, la suma de la serie de aproximaciones $\overset{n}{u}$, $(n = 0, 1, 2, ...)$ definidas por las ecuaciones en derivadas parciales y condiciones iniciales siguientes :

$$\left.\begin{array}{l} \overset{0}{u}_{112} + \varrho(x_1, x_2)\, \overset{0}{u}_{122} = 0 \\ \overset{n}{u}_{112} + \varrho\,(x_1, x_2).\, \overset{n}{u}_{122} = -\sum\limits_{i,j=1,2} a_{ij}\, \overset{n-1}{u}_{ij} - \sum\limits_{k=1,2} b_k\, \overset{n-1}{u}_k - c\overset{n-1}{u} \quad (n=1, 2, ...) \\ \qquad \left.\begin{array}{l} \overset{0}{u}(P) \equiv \varphi\,(P)\,;\ \overset{0}{u}_1(P) \equiv \Psi\,(P)\,;\ \overset{0}{u}_{12}(P) \equiv \chi\ (P) \\ \overset{n}{u}\ (P) = \overset{n}{u}_1\ (P) = \overset{n}{u}_{12}\ (P) \equiv 0 \quad (n = 1,\ 2,\ ...) \end{array}\right\} P \in (C) \end{array}\right\}$$

y las de las series de sus derivadas primeras, segundas y terceras convergen uniformemente en (D) hacia la solución u del problema de CAUCHY representado por el sistema (6) y hacia sus derivadas primeras, segundas y terceras, respectivamente ; o lo que es equivalente, poniendo :

$$\overset{0}{v} = \overset{0}{u}\,; \quad \overset{n}{v} = \overset{0}{u} + \overset{1}{u} + ... + \overset{n}{u} \quad (n = 1,\ 2,\ ...)$$

la sucesión (v^n) de soluciones correspondientes a la sucesión de problemas de CAUCHY :

$$\left.\begin{array}{l} v^n_{112} + \varrho\,(x_1,\ x_2).\ v^n_{122} = \Phi^{n-1}(x_1,\ x_2) \\ \left.\begin{array}{l} v^n\,(P) \equiv \varphi\,(P) \\ v^n_1\,(P) \equiv \Psi(P) \\ v^n_{12}(P) \equiv \chi\,(P) \end{array}\right\} \quad P \in (C) \end{array}\right\} \quad (6')$$

$$\left[\text{con } \Phi^{n-1}\,(x_1,\ x_2) = -\sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, v^{n-1}_{ij} - \sum_{k=1.2} b_k\, v^{n-1}_k - c.v^{n-1}\ (n = 1,\ 2,\ \ldots) \right.$$
$$\left. \text{y } \Phi^0\,(x_1,\ x_2) \equiv 0 \right]$$

converge hacia la solución u del problema de CAUCHY representado por el sistema (6), según la norma $|\ \ |_3$ del espacio E_u,

Es decir, si $T^{(n)}$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ denota la aplicación que asigna a cada terna ordenada $(\varphi,\ \Psi,\ \chi) \in E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$ la solución v^n (construida por recurrencia) del problema de CAUCHY definido por el sistema (6'), aplicación que en virtud del Lema I es lineal y continua, la sucesión $(T^{(n)})$ es tal que para cada $(\varphi,\ \Psi,\ \chi) \in E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$, la sucesión de imágenes $T^{(n)}\,(\varphi,\ \Psi,\ \chi) = v^n$ tiene un límite u en E_u, lo que significa que la sucesión de aplicaciones $T^{(n)} \in \mathscr{L}(E_\varphi \times E_\Psi \times \times E_\chi,\ E_u)$ converge simplemente hacia $T \in \mathcal{F}\,(E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi,\ E_u)$ [$\mathcal{F}\,(H,\ G)$ designa, como es habitual, el espacio vectorial de todas las aplicaciones lo mismo lineales que no lineales, continuas o no continuas, del espacio vectorial topológico H en el espacio vectorial topológico G], siendo $E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$ un espacio tonelado separado (puesto que es de Banach) y E_u un espacio localmente convexo separado (por ser normado), por lo que en virtud del teorema de Banach-Steinhaus (*), la aplicación T es asimismo lineal y continua, y pertenece, por consiguiente, al espacio vectorial $\mathscr{L}\,(E_\varphi \times E_\Psi \times E_\varkappa,\ E_u)$ de las aplicaciones lineales y continuas de $E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$ en E_u.

Este resultado demuestra lo afirmado en el Lema II.

3. *Dependencia continua de las soluciónes de la ecuación no homogénea :* $u_{112} + \varrho\,(x_1,\ x_2)\ u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij}\ u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k\ u_k + cu = g\,(x_1,\ x_2)$,

---

(*) Véase, por ejemplo, el Chap. III, § 3, n.º 6 del Livre V de N. Bourbaki « Espaces vectoriels topologiques » [3], o también el Chap. VI, § 5, n.º 1 de la obra de J. Garsoux « Espaces vectoriels topologiques et distributions »[4].

respecto a los valores iniciales dados sobre (C). Demostremos finalmente el siguiente:

TEOREMA: «La aplicación T: $(\varphi, \Psi, \chi) \epsilon E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi \rightarrow u \epsilon E_u$, que asigna a cada $(\varphi, \Psi, \chi) \epsilon E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$ como imagen la función $u \epsilon E_u$, solución del problema de CAUCHY:

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho(x_1, x_2)\, u_{122} + \sum\limits_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij} + \sum\limits_{k=1,2} b_k\, u_k + cu = g(x_1, x_2) \\ \left.\begin{array}{l} u\ (P) = \varphi\ (P) \\ u_1\ (P) = \Psi(P) \\ u_{12}(P) = \chi\ (P) \end{array}\right\} P \epsilon (C) \end{array}\right\} \quad (7)$$

es uniformemente continua en $E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$».

En efecto, si $u^*(x_1, x_2)$ y $u^{**}(x_1, x_2)$ son dos soluciones de la ecuación:

$$u_{112} + \varrho(x_1, x_2)\, u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k\, u_k + cu = g(x_1, x_2)$$

correspondientes respectivamente a los sistemas de condiciones iniciales:

$$\left.\begin{array}{l} u^*(P) = \varphi^*(P)\,;\ \ u_1^*(P) = \Psi^*(P)\,;\ \ u_{12}^*(P) = \chi^*(P) \\ u^{**}(P) = \varphi^{**}(P); u_1^{**}(P) = \Psi^{**}(P); u_{12}^{**}(P) = \chi^{**}(P) \end{array}\right\} P \epsilon (C)$$

la función $u^*(x_1, x_2) - u^{**}(x_1, x_2)$, será solución del problema de CAUCHY:

$$\left.\begin{array}{l} u_{112} + \varrho(x_1, x_2)\, u_{122} + \sum\limits_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij} + \sum\limits_{k=1,2} b_k\, u_k + cu = 0 \\ \left.\begin{array}{l} u\ (P) \equiv \varphi^*\ (P) - \varphi^{**}\ (P) \\ u_1\ (P) \equiv \Psi^*(P) - \Psi^{**}(P) \\ u_{12}(P) \equiv \chi^*\ (P) - \chi^{**}\ (P) \end{array}\right\} P \epsilon (C) \end{array}\right\}$$

y, por tanto, en virtud del Lema II acabado de demostrar, $u^* - u^{**} \epsilon C_3$ será imagen de $(\varphi^* - \varphi^{**}, \Psi^* - \Psi^{**}, \chi^* - \chi^{**}) \epsilon E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi$, mediante una cierta aplicación $\widetilde{T} \epsilon \mathscr{L}(E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi, E_u)$, resultando en consecuencia:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0): \|(\varphi^* - \varphi^{**}, \Psi^* - \Psi^{**}, \chi^* - \chi^{**})\| < \delta \Rightarrow \|u^* - u^{**}\|_3 < \varepsilon$$

lo que demuestra la continuidad uniforme de la aplicación T: $(\varphi, \Psi, \chi) \in E_\varphi \times E_\Psi \times E_\chi \to u \in E_u$ de acuerdo con lo afirmado en el Teorema.

En definitiva, el problema en los límites que hemos considerado, es adecuado a la ecuación:

$$u_{112} + \varrho (x_1, x_2)\, u_{122} + \sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, u_{ij} + \sum_{k=1,2} b_k\, u_k + cu = g(x_1, x_2)$$

propuesta.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

[1] J. M.ª CASCANTE. — « *Aproximaciones sucesivas de las soluciones de ecuaciones en derivadas parciales de 3.er orden* » (publicado en Collectanea Mathematica, Vol. XIII, Fasc. 1.º y 2.º Año 1961).

[2] J. M.ª CASCANTE. — « *Solución al problema de Cauchy relativo a una cierta familia de ecuaciones en derivadas parciales de 3.er orden* » (publicado en Collectanea Mathematica, Vol. XIV, Fasc. 2.º Año 1962).

[3] N. BOURBAKI. — « *Espaces vectoriels topologiques* », Hermann & Cie., Editeurs. Paris (1955).

[4] J. GARSOUX. — « *Espaces vectoriels topologiques et distributions* ». Edit. Dunod. Paris (1963).