GLI SPAZI DI CARTAN E LE TEORIE UNITARIE

Memoria di

GIUSEPPE ARCIDIACONO (a Roma)

1 - *PREMESSA*

Sono trascorsi 10 anni da quando, in una Nota apparsa nei Rendiconti della Accademia Nazionale dei Lincei, nel 1954 (1), il FANTAPPIÉ proponeva la nuova « relatività finale », presentandola come un decisivo perfezionamento della relatività ristretta di EINSTEIN: infatti, il « gruppo di FANTAPPIÉ » su cui essa é basata, a differenza dei due precedenti gruppi di GALILEO e di LORENTZ, risulta « semplice », e quindi tale teoria non può più essere caso-limite di altre teorie basate su gruppi a 10 parametri ed operanti su di uno spazio-tempo a 4 dimensioni.

Fin da allora mi proposi di sviluppare sistematicamente la nuova relatività finale. Ma mentre il FANTAPPIÉ la studiava ponendosi dal punto di vista più elevato della « teoria degli Universi fisici », e quindi si serviva della tecnica dei gruppi topologici e dei funzionali analitici (2), io ritenni che sarebbe stato più proficuo ed agevole sviluppare la relatività finale con la stessa tecnica della relatività ristretta, alla quale essa doveva del resto ridursi quando il raggio r dello spazio-tempo a curvatura costante tendeva all'infinito, e quindi il cronotopo di De Sitter si riduceva a quello di MINKOWSKI. Questo punto di vista mi condusse l'anno successivo (1955) ad un primo risultato, che venne esposto in tre Note Lincee, presentate dallo stesso FANTAPPIÉ (3), e cioé che nella relatività finale il campo elettromagnetico deve essere completato da un nuovo campo a 4 componenti, del quale venivano stabilite le equazioni, ma il cui significato fisico era allora poco chiaro.

Nel 1956 davo una semplice interpretazione fisica del gruppo di FANTAPPIÉ (4), introducendo la distinzione tra *Universo assoluto* (spazio-tempo V_4 a curvatura costante) ed *Universi relativi* dei singoli osservatori (S_4 euclidei tangenti nei punti di V_4) nei quali ogni osservatore localizzava gli eventi fisici. Sviluppando la relatività finale dal punto di vista *relativo* (e cioé utilizzando gli S_4 tangenti), il suo aspetto matematico veniva molto semplificato, in quanto bastava la tecnica della geometria proiettiva, invece di quella della geometria differenziale, caratteristica della relatività generale.

In una successiva Nota lincea (l'ultima che presentò il FANTAPPIÈ, pochi mesi prima della sua immatura scomparsa) dimostravo che il nuovo campo ottenuto per via matematica, poteva identificarsi con quello della idrodinamica relativistica dei fluidi perfetti incompressibili, e da questo fatto seguiva la possibilità di stabilire un primo legame tra materia ed elettricità, senza ricorrere alla relatività generale, come del resto era richiesto dalla magneto-idrodinamica ([5]).

Nel 1960 sviluppai alcune conseguenze cosmologiche della relatività finale ([6]), facendo vedere come essa ci forniva una nuova alternativa alle varie teorie cosmologiche, perché era capace di soddisfare nel modo più semplice alle varie contrastanti esigenze.

E' noto che il FANTAPPIÈ non accettava il punto di vista della relatività generale, perché tale teoria abbandona il concetto di gruppo, sul quale é basata invece la teoria degli Universi fisici. In questa Memoria, dopo una rapida esposizione dei risultati precedentemente ottenuti (che vengono opportunamente completati), riprendo le classiche ricerche del CARTAN (1922) sul legame tra spazi di RIEMANN generalizzati e teoria dei gruppi ed affronto il problema di costruire una relatività generale a partire dalla relatività finale. A questo scopo occorre utilizzare la tecnica della geometria proiettiva differenziale, e si ottengono delle equazioni gravitazionali del tipo di quelle trovate da KALUZA-KLEIN ed altri nelle loro ricerche sulle teorie unitarie, ma il cui significato fisico é adesso essenzialmente diverso. Infatti nel nostro caso il tensore di curvatura include anche la « torsione », e tale torsione appare non appena c'é interazione tra materia ed elettricità.

2. *LA TEORIA DI MAXWELL GENERALIZZATA*

Il problema di scrivere le equazioni di MAXWELL nel cronotopo di DE SITTER era stato affrontato da vari Autori, tra i quali ricorderemo il DIRAC, il CORBEN ed altri ([7]). Per tale estensione si richiedeva l'uso di un formalismo pentadimensionale, e tali Autori si sono limitati a trascrivere le equazioni elettromagnetiche rot $F_{ik} = 0$;

div $F_{ik} = J_k$ [8], facendo variare gli indici dei tensori da 1 a 5, invece che da 1 a 4.

Invece un esame critico, da me svolto nei lavori precedentemente citati, ha condotto ad una generalizzazione, che mi sembra più naturale. Si cominciò a tale scopo con l'esaminare il passaggio dalle equazioni dell'elettrostatica in S_3 alle equazioni dell'elettromagnetismo in S_4 e si riconobbe che in tale passaggio non vi era alcun cambiamento formale, purché i due gruppi di equazioni venissero scritti in forma « aggiunta ». Ciò suggeriva in modo immediato la generalizzazione delle equazioni di MAXWELL alla relatività finale :

$$(2.1)\ \begin{cases} \mathrm{Rot}\ G_{IK} = J_{IKL} \\ \mathrm{Div}\ G_{IK} = 0 \end{cases} \quad \text{con le condizioni di integrabilità} \quad \mathrm{Rot}\ J_{IKL} = 0 \qquad (2.2)$$

Le equazioni (2.1) si possono spezzare nel seguente modo :

$$(2.3)\ \begin{cases} \mathrm{rot}\ G_{ik} = J_{ike} \\ \mathrm{div}\ G_{ik} + \frac{1}{r}\,\partial_5 G_{i5} = 0 \end{cases} \qquad (2.4)\ \begin{cases} \mathrm{rot}\ G_{i5} + \frac{1}{r}\,\partial_5 G_{ik} = J_{ik5} \\ \mathrm{div}\ G_{i5} = 0 \end{cases}$$

dove si sono indicati con rot e div gli operatori di S_4. Le (2.2) si spezzano a loro volta in

$$(2.5)\quad \mathrm{rot}\ J_{ike} = 0 \qquad ; \qquad (2.6)\quad \mathrm{rot}\ J_{ik5} + \frac{1}{r}\,\partial_5 J_{ike} = 0$$

al limite relativistico ($r \to \infty$) il tensore doppio antisimmetrico G_{IK} si decompone nel tensore antisimmetrico G_{ik} di S_4 e nei due vettori G_{i5}, $= - G_{5i}$, mentre il tensore triplo antisimmetrico J_{IKL} ci dà il tensore triplo J_{ike} ed il tensore doppio J_{ik5} di S_4. Possiamo quindi porre

$$(2.7)\qquad G_{i5} = C_i \quad ; \quad J_{ik5} = \Omega_{ik}$$

e le equazioni (2,3), (2,4) si riducono alle seguenti :

$$(2.8)\ \begin{cases} \mathrm{rot}\ G_{ik} = J_{ike} \\ \mathrm{div}\ G_{ik} = 0 \end{cases} \qquad (2.9)\ \begin{cases} \mathrm{rot}\ C_i = \Omega_{ik} \\ \mathrm{div}\ C_i = 0 \end{cases}$$

con le condizioni rispettive di integrabilità

$$(2.10)\quad \mathrm{rot}\ J_{ike} = 0 \qquad (2.11)\quad \mathrm{rot}\ \Omega_{ik} = 0$$

Le (2.8) sono identificabili con le ordinarie equazioni di MAXWELL (scritte in forma aggiunta), mentre le equazioni (2.9) descrivono un nuovo campo C_k a 4 componenti, di cui preciseremo la interpretazione.

Se la relatività di FANTAPPIÉ riflette un qualche significato fisico, essa riunirà presumibilmente in una sola teoria l'*elettromagnetismo* e la *meccanica dei mezzi continui*, che nella relatività ristretta risultano tra di loro indipendenti.
Ed infatti, se scriviamo il tensore T_{44} del campo elettromagnetico generalizzato

$$(2.12) \qquad T_{AB} = G_{AC}\, G^{C}_{.B} + \tfrac{1}{4}\, \delta_{AB}\, G_{CD}\, G^{CD}$$

possiamo scrivere le varie componenti, mettendo in evidenza l'indice 5, nel seguente modo

$$(2.13) \quad \begin{cases} T_{ik} = (G_{is}\, G^{s}_{.k} + \frac{1}{4}\, \delta_{ik}\, G_{rs}\, G^{rs}) + (G_{i5}\, G^{5}_{.k} + \frac{1}{2}\, \delta_{ik}\, G_{s5}\, G^{s5}) \\ T_{\alpha 5} = G_{\alpha s}\, G^{s}_{.5} \quad ; \quad T_{45} = G_{4\alpha}\, G^{\alpha}_{.5} \\ T_{55} = G_{55}\, G^{s}_{.5} + \frac{1}{4}\, G_{rs}\, G^{rs} + \frac{1}{2}\, G_{r5}\, G^{r5} \end{cases}$$

cioé, tenendo conto delle posizioni (2.7)

$$(2.14) \quad \begin{cases} T_{ik} = (G_{is}\, G^{s}_{.k} + \frac{1}{4}\, \delta_{ik}\, G_{rs}\, G^{rs}) - (C_i\, C_k - \frac{1}{2}\, \delta_{ik}\, C_s\, C^s) \\ T_{\alpha 5} = C_o\, H_\alpha + (\mathbf{E} \wedge \mathbf{C})_\alpha \quad ; \quad T_{45} = \mathbf{C} \times \mathbf{H} \\ T_{55} = \frac{1}{2}\, [(E^2 - H^2) + (C_o^2 - C^2)] \end{cases}$$

Si vede allora che, per $r \to \infty$ T_{ik} é un tensore di S_4, e si decompone in due parti : il tensore energetico del campo elettromagnetico ed un nuovo tensore energetico, che é naturale -in base a quanto abbiamo detto- identificare col tensore energetico dei fluidi perfetti, venendo così ad interpretare T_{ik} come il tensore energetico dello schema « fluido perfetto-campo elettromagnetico », secondo la locuzione di LICHNEROWICZ (9). Per tale identificazione, occorre che si abbia

$$(2.15) \qquad C_i\, C_k - \tfrac{1}{2}\, \delta_{ik}\, C_s\, C^s = \mu_0{}^*\, U_i\, U_k + p\delta_{ik}$$

dove p é la *pressione*, μ_0 la *densità propria di massa propria* e $\mu_0{}^* = \mu_0 + \frac{p}{c^2}$ (10). Ne segue che dovrà aversi

$$(2.16) \qquad C_i = \sqrt{\mu_0{}^*}\, U_i \ \text{ con } \ U_i\, U^i{}_5 = -c^2$$

ed inoltre :

$$-\tfrac{1}{2}\, C_s\, C^s = p \ \text{ cioé } \ \tfrac{1}{2}\, (\mu_0 + \tfrac{p}{c^2})\, c^2 = p$$

da cui

$$\boxed{p = \mu_0 c^2} \tag{2.17}$$

La (2.16) ci dice che il vettore C_i non é altro che il vettore «corrente idrodinamica» e la (2.17) ci dà la condizione di incompressibilità del fluido. In conseguenza la prima equazione (2.9) definisce il tensore antisimmetrico «vortice», mentre la seconda equazione (2.9) esprime, sotto altra forma, la incompressibilità del fluido.

Se allora poniamo per brevità

$$\mu^* = \frac{\mu_0^*}{1 - v^2/c^2} = \frac{\mu_0 + p/c^2}{1 - v^2/c^2} \tag{2.18}$$

dalle (2.14) si vede che accanto al noto vettore *densità relativa di quantità di moto* $g_\alpha = \frac{1}{c} T_{\alpha 4}$, cioé

$$g = \frac{1}{c}(C_0 \, \mathbf{C} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = \mu^* \mathbf{v} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \wedge \mathbf{H} \tag{2.19}$$

appare un nuovo vettore $g'_\alpha = \frac{1}{c} T_{55}$, così esprimibile

$$g' = \frac{1}{c}(C_0 \, \mathbf{H} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{C}) = \sqrt{\mu^*}\,(\mathbf{H} - \frac{\mathbf{v}}{c} \wedge \mathbf{E}) \tag{2.20}$$

che sarebbe legato alla presenza di onde magneto-idrodinamiche in seno al fluido. Inoltre, mentre la componente T_{44} ci dà una *densità relativa di energia totale*

$$W = \frac{1}{2}(E^2 + H^2) + (\mu^* \, c^2 - p) \tag{2.21}$$

la componente T_{55} sembra generalizzare l'*azione elettromagnetica* per unità di volume e per unità di tempo, che nella relatività ristretta era un invariante:

$$W' = \frac{1}{2}\,[(E^2 - H^2) + \mu^*_0 \, C^2] = \frac{1}{2}(E^2 - H^2) + p \tag{2.22}$$

Infine si ha

$$T_{45} = T_{54} = \mathbf{C} \times \mathbf{H} = \sqrt{\mu^*} \; \mathbf{v} \times \mathbf{H} \tag{2.23}$$

I due invarianti $E^2 - H^2$ ed $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ del campo elettromagnetico, vengono così generalizzati nella relatività finale:

$$\begin{cases} I_2 = (E^2 - H^2) - \mu_0^* \, c^2 = (E^2 - H^2) - 2p \\ I_4 = (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) + \mu^* \, (c\,\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{H})^2 - \mu^* \, (\mathbf{v} \times \mathbf{E})^2 \end{cases}$$

La teoría di MAXWELL generalizzata risulta per tanto interpretabile fisicamente come una magneto-idrodinamica relativista.

3. *UNA NUOVA COSMOLOGIA «PROIETTIVA»*

Come abbiamo visto in un precedente lavoro, la distinzione tra *Universo assoluto* (spazio-tempo V_4 a curvatura costante) ed *Universi relativi* (S_4 tangenti) ci conduce nel modo più semplice ad una nuova teoria cosmologica, del tipo di quella di MILNE, la quale ci consente di superare il dilemma tra teorie evoluzionarie e teorie stazionarie. Come ben dice SCIAMA ([11]), «siccome la teoria della relatività generale é compatibile con un numero infinito di modelli di Universo, noi dobbiamo trovare una teoria meno ampia di quella di EINSTEIN, che conduca ad un modello unico per l'Universo». La relatività finale, risultando il più semplice perfezionamento della relatività ristretta, ben si presta ad affrontare su solide basi logiche il problema cosmologico.

Nella relatività finale, le formule della traslazione nel tempo sono le seguenti (nel caso di due dimensioni x e t):

$$\boxed{x' = \frac{x\sqrt{1-\gamma^2}}{1-\frac{c}{r}\gamma t} \; ; \; t' = \frac{t - T_0}{1-\frac{c}{r}\gamma t}} \tag{3.1}$$

con $\gamma = \frac{cT_0}{r}$. Dalla seconda formula si deduce la seguente «legge di addizione delle durate»

$$t = \frac{t_1 + t_2}{1 + \frac{c^2}{r^2} t_1 t_2} \tag{3.2}$$

Ne segue la esistenza di una «durata limite» r/c, che può essere interpretata come «età apparente» dell'Universo, perché accade che per $T_0 = \pm\, r/c$ (cioé $\gamma = \pm\, 1$) $x' = 0$ qualunque sia x, e quindi l'Universo si riduce ad un punto. Dalle stesse formule segue poi la legge di espansione dell'Universo ([12]) data da

$$V = \frac{c}{r} \frac{x}{1 + \frac{ct}{r}} \tag{3.3}$$

Possiamo allora dire che nell'iperpiano $t = 0$ vale una legge di proporzionalità tra distanza e velocità di fuga:

$$V = \frac{c}{r} x \tag{3.4}$$

e quindi nella nostra teoria la costante di HUBBLE é data da c/r. Si vede poi che per $x = r$ si ha $V = c$, e quindi appare con un «orizzonte spaziale» di raggio r (13).

Si nella (3.3) poniamo $\alpha = x/r$; $\beta = V/c$ e $\gamma = c\ t/r$ essa si scrive nel seguente modo

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \tag{3.5}$$

Nella relatività finale, la distanza temporale tra due eventi é data da

$$\tau = \frac{r}{2c} \log \frac{r + \sqrt{c^2 t^2 - x^2}}{r - \sqrt{c^2 t^2 - x^2}} \tag{3.6}$$

dalla quale é facile dedurre la formula

$$\boxed{d\tau = \frac{dt \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \alpha^2 - \gamma^2}} \quad \text{con } \alpha = \beta\gamma \tag{3.7}$$

dove si é posto $\alpha = x/r$; $\beta = V/c$; $\gamma = ct/r$. Tale formula, per r tendente all'infinito si riduce quella ben nota $d\tau = dt \sqrt{1 - \beta^2}$ della relatività ristretta. Se ne deduce che nella relatività finale la massa di un corpo dipende non solo dalla sua velocità, ma anche dalla sua distanza spaziotemporale dall'osservatore, nel seguente modo

$$\boxed{m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} (1 + \alpha^2 - \gamma^2)} \quad \text{con } \alpha = \beta\gamma \tag{3.8}$$

De tale formula segue che ogni corpo di massa m_0 di quiete possiede non soltanto una *energia intrinseca* $E = m_0 c^2$, ma anche un *momento di inerzia intrinseco* $I = m_0 r^2$, come meglio vedremo in un successivo lavoro.

Infine, se nella (3.6) poniamo $x = 0$, essa si riduce alla

$$\tau = \frac{r}{2c} \log \frac{r + ct}{r - ct} = \frac{t_0}{2} \log \frac{1 + t/t_0}{1 - t/t_0} \tag{3.9}$$

con $t_0 = r/c$ (età dell'Universo). Tale formula é analoga a quella stabilita dal MILNE nella sua « relatività cinematica » :

$$\tau = t_0 + t_0 \log t/t_0 \tag{3.10}$$

che lega il tempo *dinamico* (τ) a quello *cinematico* (t), e nella quale t_0 é l'epoca presente sulla scala t.

Mentre nella relatività finale $\tau = \pm \infty$ per $t = \pm t_0 = \pm r/c$, e $\tau = 0$ per $t = 0$, nella relatività cinematica invece t_0 non é più una costante universale, ma é l'epoca in cui le due scale sono in coincidenza (per $t = t_0$ si ha $\tau = t_0$) ed inoltre $\tau = - \infty$ per $t = 0$ e $\tau = + \infty$ per $t = + \infty$.

La relatività finale ci fornisce nel modo più semplice una teoria cosmologica, nella quale vale un « principio cosmologico perfetto » (perché l'Universo appare ad ogni osservatore sempre allo stesso modo, comunque si sposti nello spazio o nel tempo), e che nello stesso tempo risulta di tipo « evoluzionario » perché, per ogni osservatore l'Universo ha avuto origine da un punto r/c anni fa, e tra r/c anni si ridurrà di nuovo ad un punto. Non é possibile attribuire all'Universo, considerato nella sua totalità, alcuna età (perché nel modello di DE SITTER il tempo τ varia *da* $- \infty$ *a* $+ \infty$), pur tuttavia, per ogni osservatore esso si comporta come se avesse una età ben definita r/c.

Ma c'é di più. I tre gruppi di GALILEO, LORENTZ e FANTAPPIÉ hanno la seguente struttura

Gruppo di GALILEO Gl^{10}_{3+1}	Gruppo di LORENTZ $Lz^{10}_{3+1}\ (c)$	Gruppo di FANTAPPIÉ $Fn^{10}_{3+1}\ (c, r)$
Rotazioni R^3_3	Rotazioni R^6_4	Rotazioni R^{10}_5
Trascinamenti Tr^3_3		
Trasl. spaziali T^3_3	Traslazioni T^4_4	
Trasl. temporali T^1_1		

Con riferimento a questo schema, si vede subito che passando dalla fisica classica a quella relativistica, le rotazioni spaziali **r** ed i trascinamenti **v** vengono a formare un unico tensore doppio antisimmetrico del cronotopo di MINKOWSKI (rotazione infinitesima di S_4) mentre le traslazioni spaziali **t** e quelle temporali t_0 vengono a formare un unico vettore di S_4 (traslazione infinitesima di S_4). In corrispondenza, il campo elettrico **E** e quello magnetico **H** si riuniscono (tramite la costante universale c) nel tensore elettromagnetico F_{ik}, ed il vettore **C** e lo scalare C_0 (che sono proporzionali al vettore impulso ed allo scalare energia) si riuniscono in un unico vettore C_k di S_4. Passando invece alla relatività finale, le rotazioni e le traslazioni cronotopiche vengono a formare un unico tensore antisimmetrico R_{AB} (rotazione infinitesima di S_5), ed in corrispondenza il campo elettromagnetico F_{ik} si salda al campo idrodinamico C_k per formare un unico tensore antisimmetrico G_{AB} di S_5.

E' noto che la legge di conservazione della energia-quantità di moto é una conseguenza della invarianza per *traslazioni* delle leggi fisiche (i risultati delle esperienze infatti non dipendono dal tempo e dal luogo in cui esse vengono eseguite), mentre la legge della conservazione del momento della quantità di moto segue dalla invarianza per *rotazioni* delle leggi fisiche (i risultati delle esperienze non variano se l'insieme degli apparecchi viene ruotato di un angolo arbitrario). Passando alla relatività finale si viene a perdere la invarianza per traslazioni, perché adesso sia le rotazioni che le traslazioni sono assimilabili a rotazioni dello spazio a cinque dimensioni. *Ne segue che la legge della conservazione della energia-quantità di moto non dovrebbe più valere su scala cosmologica,* ma vale solo la legge della conservazione del momento della quantità di moto. Quest'ultima legge, al limite relativistico, si decompone appunto nelle due precedenti leggi, valide nella relatività ristretta. Si ritroverebbe per questa via la ipotesi della creazione continua di HOYLE, cioé la non validità su scala cosmologica della legge di conservazione della energia-quantità di moto, e quindi la possibilità di una creazione continua, sia pure apparente, di materia dal nulla. E' questo un punto che sarebbe interessante approfondire ulteriormente.

La relatività finale ritrova così i principali risultati delle varie teorie cosmologiche entro un unico schema coerente ed unitario. Essa ci offre inoltre una «sintesi» dello elettromagnetismo e della idrodinamica, aprendoci nuove prospettive nel campo delle teorie unitarie della materia e della elettricità, come vedremo nei successivi paragrafi.

4. *LA RELATIVITÁ GENERALE E LE TEORIE UNITARIE*

Come é noto, nella relatività generale, le equazioni gravitazionali di EINSTEIN

$$G_{ik} = R_{ik} - \tfrac{1}{2}\, g_{ik}\, R = \chi\, t_{ik} \tag{4.1}$$

stabiliscono un semplice legame tra distribuzione materiale ed energetica (descritta dal tensore energetico t_{ik}) e curvatura dello spazio-tempo (descritta dal tensore di curvatura contratto R_{ik}). In questo modo, la quantità meccaniche connesse con la gravitazione, vengono interpretate in termini di quantità geometriche del continuo RIEMANNIANO.

Il campo elettromagnetico, pur potendosi inserire nello schema della relatività generale, tramite il tensore energetico τ_{ik} del campo elettromagnetico.

$$G_{ik} = \chi\,(t_{ik} + \tau_{ik}) = \chi\, T_{ik} \tag{4.2}$$

tuttavia non ne riceve una adeguata interpretazione geometrica, perché la geometria riemanniana, essendo impegnata a spiegare la gravitazione, non ha parametri disponibili per rappresentarci il campo elettromagnetico. E' sorto così il problema di ampliare opportunamente la relatività generale, in modo da ottenere una geometrizzazione del campo elettromagnetico.

Le varie teorie unitarie che sono state proposte, risultano essenzialmente di due tipi :

a) *teorie quadridimensionali*, nelle quali si amplia la connessione riemanniana, aggiungendo ai simboli di CHRISTOFELL un tensore simmetrico $\gamma^l{}_{ik} = \gamma^l{}_{ki}$ (teoria di WEYL) (14) :

$$\begin{bmatrix} l \\ ik \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} + \gamma^l_{ik} \tag{4.3}$$

oppure un tensore antisimmetrico $\Omega^l_{ik} = -\Omega^l_{ki}$ (Teoria di STRANEO) (15):

$$\begin{bmatrix} l \\ ik \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} l \\ ik \end{Bmatrix} + \Omega^l_{ik} \tag{4.4}$$

o infine introducendo un tensore fondamentale non simmetrico (Teoria di EINSTEIN) (16) :

$$g_{ik} = h_{ik} + k_{ik} \tag{4.5}$$

si ottengono così altrettanti tipi di teorie unitarie della materia e della elettricità.

b) *teorie pentadimensionali*, nelle quali si amplia la relatività generale, ricorrendo ad una geometria riemanniana pentadimensionale (teorie di KALUZA-KLEIN, JORDAN-THIRY...), la quale può essere interpretata in termini di geometria proiettiva differenziale (teorie di VEBLEN, SCHOUTEN...). Anche per questa via si ottengono delle teorie unitarie ([17]).

Ma le teorie così ottenute non risultano pienamente soddisfacenti. Infatti, le teorie quadridimensionali, pur risultando più suggestive, perché interpretano il fenomeno gravitazionale in termini di *curvatura* a quello elettromagnetico in termini di *torsione* dello spazio-tempo, tuttavia non ci danno in modo semplice le equazioni del moto delle particelle elettrizzate.

Viceversa, le teorie pentadimensionali (o le equivalenti nella versione proiettiva), ci danno facilmente le equazioni del moto delle particelle elettrizzate. Esse però fanno intervenire una quinta dimensione, il cui significato fisico é poco chiaro : dovendo allora supporre la indipendenza dei campi fisici dalla quinta dimensione, non si ottiene più una « sintesi » dei due campi, che rimangono tra loro indipendenti.

Il motivo per il quale le varie teorie unitarie risultano insoddisfacenti, credo sia da ricercarsi nel fatto che tali teorie sono in fondo costruite a partire dalla relatività ristretta, basata sul gruppo di LORENTZ. Il gruppo di LORENTZ non é « semplice » (perché contiene come sottogruppo invariante quello delle traslazioni di S_4), e si decompone nelle *rotazioni* (a 6 parametri) e nelle *traslazioni* (a 4 parametri) del cronotopo (vedi schema del n° 3). Ciò porta alla suddivisione della relatività ristretta in due parti tra loro indipendenti, e cioé la teoria elettromagnetica e la meccanica dei mezzi continui, con conseguente netta distinzione delle proprietà della materia da quelle dell'elettricità. *Finché ci si basa sulla relatività ristretta, é quindi impossibile costruire una teoria che sia veramente unitaria.*

Perfezionando invece la relatività ristretta con la relatività finale, ecco che le *rotazioni* e le *traslazioni* del cronotopo vengono fuse nelle rotazioni di S_5, tramite la nuova costante universale r, e si viene a trovare un primo legame tra materia ed elettricità, rimanendo entro uno schema di tipo classico, cioé basato sui gruppi.

Se la relatività ristretta risulta caso-limite, per r tendente all'infinito della relatività finale, lo stesso si potrà dire della relatività generale, la quale potrà essere perfezionata in una teoria più ampia, nella quale il tensore energetico totale $T_{ik} = t_{ik} + \tau_{ik}$ che figura nelle equazioni gravitazionali (4.2) dovrà essere sostituito dal tensore più completo T_{AB}, che abbiamo esaminato al n° 2.

5. *GLI SPAZI DI CARTAN ED I GRUPPI DI OLONOMIA*

Per costruire una relatività generale a partire dalla relatività finale, occorre chiarire il legame tra la relatività ristretta, basata sul gruppo di LORENTZ e la relatività generale, che richiede l'uso di una geometria riemanniana.

A tale scopo é necessario utilizzare le classiche ricerche del Cartan sui rapporti tra geometria di RIEMANN e teoria dei gruppi, con le quali si inserisce la geometria riemanniana in una concezione gruppale, e si generalizza il concetto di spazio (18).

Il Cartan osserva che uno spazio di RIEMANN, pur non possedendo una omogeneità assoluta, può tuttavia essere immaginato costituito da infiniti elementi spaziali euclidei, tangenti ad esso in ogni suo punto. Su ognuno di tali spazi tangenti vale una geometria nel senso di KLEIN (il gruppo é in questo caso quello delle rototraslazioni). Questi infiniti elementi sono poi raccordati da una certa legge di « connessione », che il Cartan chiama « euclidea ».

In particolare, data una V_4 riemanniana, sia u^i un generico sistema di coordinate locali, ed immaginiamo di decomporre il ds^2 in una somma di quadrati

$$ds^2 = \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 + \omega_3{}^2 + w_4^2 \tag{5.1}$$

dove le ω^i sono delle espressioni lineari rispetto ai differenziali du^i delle coordinate. Effettuare una tale decomposizione, equivale a scegliere nello spazio vettoriale tangente nel generico punto P, quattro vettori ortogonali $\{\mathbf{e}_i\}$ aventi tale punto per origine. Le ω^i ci danno allora le componenti secondo gli assi del riferimento mobile, del vettore infinitesimo che unisce P al punto $P + dP$, e cioé le componenti della *traslazione* infinitesima, che insieme alla *rotazione* infinitesima $\omega_{ik} = - \omega_{ki}$, fanno passare da un riferimento a quello infinitamente vicino

$$dP = \omega^i \, \mathbf{e}_i \quad ; \quad de_i = \omega_i^k \, \mathbf{e}_k \tag{5.2}$$

con

$$\mathbf{e}_i \, . \, \mathbf{e}_k = \delta_{ik} \quad ; \quad \omega_i^k = \gamma_{is}^k \, \omega^s \tag{5.3}$$

dove le γ_{is}^{k} sono i coefficienti di rotazione di RICCI.

Il tensore di curvatura e quello di torsione possono essere allora introdotti considerando i *cicli infinitesimi* aventi origine in un punto P di V_4, e gli spostamenti associati a tali cicli.

Se facciamo descrivere ad un punto P ed al riferimento ad esso associato un ciclo infinitesimo (chiuso) sulla V_4, e poi sviluppiamo tale ciclo sullo spazio S_4 tangente a V_4 in P, in generale i vettori $\mathbf{e}_i$ del riferimento mobile non torneranno alla posizione iniziale, ed il ciclo non si chiude. Affinché questo avvenga occorre eseguire, *nello spazio tangente in* P, una *traslazione* Ω^i ed una *rotazione* $\Omega^i{}_k$ date da [19]:

$$(4.4) \qquad \begin{cases} \Omega^i = d\omega^i + \omega_s{}^i \wedge \omega^s \\ \Omega_k{}^i = d\omega_k{}^i + \omega_s{}^i \wedge \omega_k{}^s \end{cases}$$

Le Ω^i definiscono la *torsione*, e le $\Omega^i{}_k$ la *curvatura* di V_4, e per tale motivo esse si chiamano la «curvatura di traslazione» e la «curvatura di rotazione».

Se invece si sceglie come riferimento quello «naturale» indotto dal sistema di coordinate locali sullo spazio vettoriale tangente nel generico punto P, allora si avrà

$$(4.5) \qquad \mathbf{e}_i = \partial_i P \quad ; \quad \mathbf{e}_i \,.\, \mathbf{e}_k = g_{ik} \quad ; \quad \omega^i = du^i$$

ed inoltre

$$(4.6) \qquad \omega_i^k = \Gamma_{is}^k \, du^s \quad ; \quad \omega_{ij} + \omega_{ji} = dg_{ij}.$$

dove $\Gamma_{is}^k = \left\{ {k \atop is} \right\}$ é il simbolo di CHRISTOFFEL.

Sostituendo tali espressioni nelle (4.4) avremo

$$(4.7) \qquad \begin{cases} R_{mn}^i = \Gamma_{mn}^i - \Gamma_{nm}^i = 0 \\ R_{klm}^i = \partial_m \Gamma_{kl}^i - \partial_e \Gamma_{mk}^i + \Gamma_{kl}^r \Gamma_{mr}^i - \Gamma_{mk}^r \Gamma_{lr}^i \end{cases}$$

che sono appunto la curvatura e la torsione nei riferimenti naturali di coordinate locali. Negli spazi di RIEMANN, la torsione é quindi nulla.

Se poi consideriamo gli spostamenti associati ai cicli chiusi *finiti*, uscenti da un punto P di una V_4, si trova che tali spostamenti formano un gruppo, detto «gruppo di olonomia» relativo al punto P. Secondo il «teorema di omogeneità del CARTAN, tale gruppo non dipende dal particolare punto di V_4 che si sceglie.

Possiamo quindi dire che mentre il tensore di curvatura e quello di torsione, ottenuti considerando cicli *infinitesimi* uscenti dai diversi punti, definiscono intrinsecamente le proprietà *locali* di V_4, il gruppo di olonomia, nato dalla considerazione dei cicli *finiti*, definisce pure delle proprietà intrinseche della V_4, ma tali proprietà sono *globali*.

Le considerazioni quì fatte per gli spazi a connessione *euclidea*, nei quali sugli spazi tangenti vale la geometria euclidea, si estendono subito al caso in cui su tali spazi vale una geometria basata su di un gruppo G (nel senso di KLEIN).

Ad ogni geometria basata su di un gruppo (geometria che il CARTAN chiama « olonoma ») si possono far corrispondere delle geometrie « non olonome » a seconda del particolare gruppo di olonomia che si sceglie.

Così per esempio, nel cronotopo di MINKOWSKI della relatività ristretta, il gruppo di olomonia é l'identità, perché tale spazio é olonomo. Invece, lo spazio-tempo riemanniano della relatività generale non é più olonomo perché ammette per gruppo di olonomia quello di LORENTZ ristretto (rotazioni di S_4), in quanto é privo di torsione.

6. *GLI SPAZI A « CONNESSIONE PROIETTIVA »*

Abbiamo visto al n.° 3 che, per sviluppare la relatività finale con la tecnica della teoria dei gruppi, e cioé senza ricorrere alla geometria riemanniana, occorre utilizzare la « rappresentazione geodetica » di BELTRAMI dello spazio-tempo V_4 a curvatura costante. Lo spazio-tempo di MINKOWSKI viene quindi sostituito da un S_4 formato dai punti « esterni » alla quadrica *assoluto* di CAYLEY, KLEIN

$$c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = r^2 \tag{6.1}$$

Le trasformazioni del gruppo di FANTAPPIÉ sono allora le proiettività che mutano in sé tale quadrica, e rappresentano i movimenti in sé dello spazio-tempo V_4 a curvatura costante.

Ne segue che per costruire una relatività generale basata sulla relatività finale, occorre introdurre uno spazio non olonomo X_4, che ammette per gruppo di olonomia il gruppo proiettivo di FANTAPPIÉ. E siccome quest'ultimo gruppo é isomorfo a quello delle rotazioni di S_5, dal punto di vista formale, per sviluppare tale teoria utilizzeremo una geometria riemanniana di V_5 (che ammette per gruppo di olonomia quello delle rotazioni di S_5). Questa geometria di V_5 dovrà poi essere interpretata in termini di geometria differenziale proiettiva di una varietà X_4 quadridimensionale. Ed infatti é noto che *la geometria differenziale proiettiva di una X_n, ammette una interpretazione $(n+1)$-dimensionale in termini di geometria riemanniana di V_{n+1}* ([20]).

Fatta questa premessa, vediamo come si introduce uno spazio a « connessione proiettiva » secondo il CARTAN. Egli osserva che uno spazio a connessione affine é uno spazio avente, nell'intorno infinitesimo di ciascun suo punto, i caratteri di uno spazio affine, e dotato inoltre di una legge di raccordo o di rappresentazione affine fra gli intorni di due suoi punti infinitamente vicini.

In modo analogo, uno spazio a « connessione proiettiva » X_4 (secondo la definizione che ne ha dato il CARTAN nel 1924) *é uno spazio avente nell'intorno infinitesimo di ciascun suo punto i caratteri di uno spazio proiettivo, e dotato inoltre di una legge di rappresentazione proiettiva (omografica) fra gli intorni di due suoi punti infinitamente vicini* ([21]).

Più precisamente : assegnato sulla X_4 un sistema di coordinate curvilinee (u^i, u^5), e sui singoli spazi tangenti dei sistemi di riferimento proiettivi, siano (X^i, X^5) le coordinate proiettive omogenee dei punti degli spazi tangenti, rispetto a tali sistemi di riferimento ; la legge di trasporto dei punti sia rappresentabile mediante il sistema differenziale

$$dx^A + \omega_B^A \, x^B = 0 \quad \text{con} \quad \omega_A^B = \pi_{BC}^A \, du^C \tag{6.2}$$

Si assegni poi un campo di quadriche Q, poste sugli spazi tangenti nei singoli punti P di X_4

$$Q \equiv g_{AB} \, dx^A \, dx^B = 0 \tag{6.3}$$

con $g_{AB}(u^i, u^5)$. Fissato il punto P di X_4, la quadrica (4.2) costituisce l'assoluto di una *metrica non euclidea locale:* la geometria a connes sione proiettiva della X_4 legata al campo di quadriche, sta alle metriche non euclidee locali che tali quadriche determinano, in una relazione analoga a quella che passa tra la geometria riemanniana e quella euclidea locale che il tensore fondamentale determina su ciascun spazio tangente.

Il trasporto parallelo in una V_4 riemanniana conserva gli angoli (cioé i coni isotropi) ; in modo analogo la connessione proiettiva π_{BC}^A deve dar luogo ad una legge di *traslazione proiettiva,* che conservi il campo di quadriche, cioé tale che

$$\nabla_A \, g_{BC} = 0 \tag{6.4}$$

Perché sia soddisfatta tale condizione, dovrà aversi

$$(6.5) \qquad \pi^A_{BC} = \left\{ \begin{matrix} A \\ BC \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{AK} \ (\partial_C \ g_{BK} + \partial_B \ g_{KC} - \partial_K \ g_{CB})$$

ed é questa la connessione proiettiva del VEBLEN ([17]).

A partire da tale connessione proiettiva si può costruire al solito modo il « tensore di curvatura proiettiva » :

$$(6.6) \qquad R^A_{BLM} = \partial_L \ \pi^A_{BM} - \partial_M \ \pi^A_{BL} + \pi^A_{RL} \ \pi^R_{BM} - \pi^A_{KM} \ \pi^K_{BL}$$

il cui annullarsi é la condizione necessaria e sufficiente perché lo spazio assegnato sia « proiettivamente piano » e cioé a curvatura costante (perché le varietà a curvatura costante sono localmente rappresentabili sullo spazio euclideo, con conservazione delle geodetiche).

Così, mentre nella relatività generale, l'annullarsi del tensore di curvatura di RIEMANN ci fa ricadere nello spazio-tempo della relatività ristretta, nella relatività generale proiettiva, l'annullarsi del tensore di curvatura proiettiva, ci fa riottenere lo spazio-tempo a curvatura costante della relatività finale, perché — come é noto — la geometria riemanniana degli spazi a curvatura costante può essere subordinata alla geometria proiettiva, una volta assegnata una quadrica come « assoluto » di una geometria metrica.

7. *IL TENSORE DI « CURVATURA E TORSIONE »*

Data una X_4 a connessione proiettiva, sarà naturale prendere ogni punto $\mathbf{e}_5$ della varietà come uno dei vertici del riferimento proiettivo legato a quel punto. Se indichiamo con $\mathbf{e}_k$ gli altri 4 punti (posti sullo spazio tangente in $\mathbf{e}_5$), avremo un sistema di 5 punti $\mathbf{e}_A$, che potrà essere considerato come un *sistema di riferimento mobile*. Ogni punto x dello spazio tangente in e_5 potrà porsi sotto la forma

$$(7.1) \qquad \mathbf{x} = x^1 \ \mathbf{e}_1 + x^2 \ \mathbf{e}_2 + x^3 \ \mathbf{e}_3 + x^4 \ \mathbf{e}_4 + x^5 \ \mathbf{e}_5$$

e le $(x^i, \ x^5)$ sono le *coordinate omogenee* di $\mathbf{x}$ rispetto al riferimento $(e_i, \ e_5)$.

Ciò premesso, le componenti dello spostamento infinitesimo del riferimento mobile, quando si passa da un punto di X_4 a quello infinitamente vicino, sono definite dalle formule

$$(7.2) \qquad d\mathbf{e}_i = \omega_i{}^k \ \mathbf{e}_k + \omega_i{}^5 \ \mathbf{e}_5 \ ; \ d\mathbf{e}_5 = \omega_5{}^k \ \mathbf{e}_k + \omega_5{}^5 \ \mathbf{e}_5$$

dove le ω_i^k, ω_5^k, ω_5^5, sono delle forme lineari nei differenziali delle coordinate (u^i, u^5).

Fatta questa premessa, le (7.2) possono così riassumersi

$$d\mathbf{e}_A = \omega_A^B \ \mathbf{e}_B \tag{7.3}$$

Si possono allora introdurre gli spostamenti Ω_B^A associati ai cicli infinitesimi, e le equazioni di struttura dello spazio X_4 a connessione proiettiva sarnno le seguenti

$$\Omega_B^A = d\omega_B^A + \omega_R^A \wedge \omega_B^R \tag{7.4}$$

che sono analoghe alle (4.4)

Alle Ω_B^A corrisponde il tensore R^A_{BLM}, dato dalle (6.6), che é chiamato dal Cartan « tensore di curvatura e torsione », perché, a differenza di quanto accade negli spazi a connessione affine, adesso *alla curvatura di uno spazio a connessione proiettiva é subordinata la nozione di torsione* ([22]).

Questa importante circostanza é dovuta al fatto che il gruppo di Fantappié (gruppo di olonomia di X_4) si decompone, al limite $r \to \infty$, nelle rotazioni e nelle traslazioni di S_4, alle quali corrispondono rispettivamente la « curvatura di rotazione » e la « curvatura di traslazione » (o torsione).

Per convincercene, poniamoci nel riferimento che il Cartan chiama « naturale », per il quale

$$\omega^i{}_5 = du^i \ ; \ \omega^i{}_j = \pi^i{}_{js}\, du^s \ ; \ \omega_i{}^5 = \pi^5{}_{is}\ du^s \tag{7.5}$$

ed inoltre

$$du^5 = 0 \quad ; \quad \pi^i{}_{ik} = 0 \tag{7.6}$$

Allora, dalle (7.4) si ricava

$$\begin{aligned} \omega^i{}_5 &= d\omega^i{}_5 + \omega^i{}_s \wedge \omega^s{}_5 = ddu^i + \pi^i{}_{hk}\, du^h \wedge du^k \\ &= \pi^i{}_{hk}\ du^h \wedge du^k = R^i{}_{5hk}\ du^h \wedge du^k \end{aligned}$$

ed in conseguenza

$$2\ R^i{}_{5hk} = \pi^i{}_{hk} - \pi^i{}_{kh} = 0 \tag{7.7}$$

che é appunto la torsione, la quale, per le ipotesi fatte, é nulla. *Però adesso la torsione non é più un tensore, perché fa parte del tensore di curvatura e torsione* R^A_{BLM}, e quindi pur essendo nulla in un riferimento, non lo é più in un altro riferimento ([23]).

Fatta questa premessa sulla struttura del tensore di curvatura e torsione, é facile scrivere le equazioni di EINSTEIN generalizzate. Costruito il tensore R_{AB} a partire dal tensore di curvatura proiettiva, si formi il tensore

$$G_{AB} = R_{AB} - \frac{1}{2} g_{AB} R \tag{7.8}$$

e le equazioni gravitazionali generalizzate sono le seguenti

$$\boxed{G_{AB} = \chi\, T_{AB}} \tag{7.9}$$

dove T_{AB} é il tensore energetico che abbiamo studiato al n.º 2.

Le equazioni (7.9), pur essendo dello stesso tipo di quelle ottenute nella teoria unitaria pentadimensionale di KALUZA-KLEIN o nella teoria proiettiva di VEBLEN, tuttavia hanno un significato essenzialmente diverso.

Infatti, nelle precedenti teorie é necessaria l'ipotesi che i campi fisici siano indipendenti dalla quinta coordinata : si ottengono così le equazioni gravitazionali di EINSTEIN e le equazioni di MAXWELL, ma nessun legame appare tra questi due campi.

Nella teoria da noi proposta invece i campi vengono a dipendere dalla quinta coordinata omogenea, ed allora la curvatura e la torsione dello spazio-tempo vengono a formare un unico tensore. Il tensore energetico che compare a secondo membro, ci dà per la sua parte spazio-temporale il tensore energetico dello schema fluido perfetto-campo elettro-magnetico, mentre le componenti T_{i5} ci descrivono la interazione tra questi due campi. Ne segue che *nella nostra teoria la torsione risulta legata alla presenza di una interazione tra materia ed elettricità,* e dovrebbe essere nulla se é presente soltanto materia o soltanto elettrictà (perché in tal caso $T_{i5} = 0$).

In un successivo lavoro faremo uno studio sistematico delle equazioni di EINSTEIN generalizzate nella relatività finale. ([24])

NOTE E BIBLIOGRAFIA

(1) L. FANTAPPIÈ. — *Su una nuova teoria di relatività finale*. Rend. Lincei, ser 8, vol. XVII (1954).

(2) L. FANTAPPIÈ. — *Sui fondamenti gruppali della fisica*. Collectanea Mathematica, vol. XI, fasc. 2 (1959).

(3) G. ARCIDIACONO. — *Sull'importanza del gruppo base nel problema della unificazione dei campi fisici ; Le equazioni di Maxwell generalizzate nella teoria di relatività finale ; Sul campo elettromagnetico generalizzato*. Rend. Lincei, ser. 8, vol. XVIII, fasc. 4, 5, 6 (1955).

(4) G. ARCIDIACONO. — *Sul significato fisico della teoria di relatività finale*. Rend. Lincei, ser. 8, vol. XX, fasc. 4 (1959).

(5) G. ARCIDIACONO. — *La elettrodinamica e la idrodinamica nella teoria di relatività finale*. Rend. Lincei, ser. 8, vol. XX, fasc. 5 (1956) ; *La relatività di Fantappiè*, Collectanea Mathematica, vol. X, fasc. 2 (1958) ; *Sul tensore energetico dello schema fluido perfetto-campo elettromagnetico*, Rend. Lincei, ser 8, vol. XXXIII, fasc. 5 (1962).

(6) G. ARCIDIACONO. — *Relatività finale e cosmologia*. Collectanea Mathematica, vol. XII, fasc. 1 (1960).

(7) P. A. M. DIRAC. — *The electron wave equation in De Sitter space*. Annals of Mathematics, 36, 657 (1935) ; H. C. CORBEN, *A Classical theory of electromagnetism and gravitation*. Physical Review, 69, 225 (1946 a).

(8) Indicheremo con le lettere maiuscole A, B, C... gli indici variabili da 1 a 5, con le lettere minuscule a, b, c.. gli indici variabili da 1 a 4 e con le lettere greche α, β, γ... gli indici variabili da 1 a 3.

(9) A. LICHNEROWICZ. — *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*. Masson, Paris, 1955, pag. 17.

(10) C. CATTANEO. — *Introduzione alla teoria einsteniana della gravitazione*, vol. I, Veschi, Roma 1961, pag. 126 e 131.

(11) D. W. SCIAMA. — *Les trois lois de la Cosmologie*. Ann. Inst. Poincaré, vol. XVII, p. 13 (1961).

(12) Ci riteriamo qui al caso bidimensionale (x, t).

(13) Nel caso tridimensionale, occorre porre $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ al posto di x. Si veda pure H. NARIAI, *On some linear equivalence in Kinematic Relativity*, The Science rep. Tôhoku University, ser. I, vol. XXXVII, n.° 2, pag. 243.

(14) H. WEYL. — *Raum, Zeit, Materie,* Berlín 1918.

(15) P. STRANEO. — Note Lincee del 1931-32.

(16) A. EINSTEIN. — *The meaning of relativity,* Princeton 1955.

(17) O. VEBLEN. — *Projective relativity,* Phys. Rew. 36, 810 (1955) ; Y. THIRY *Etude mathematique des equations d'une théorie unitaire à quinze variables de champ,* Journ. Math. pures et appl. (9), 275 (1951).

(18) E. CARTAN. — *Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces a torsion,* C. R. Acad. Sci. París, t. 174, p. 593 (1922) ; *Oeuvres Complètes,* Partie III, vol. I, Gauthier-Villars, París 1955.

(19) Per il calcolo differenziale esterno vedi C. CATTANEO. — *Introduzione alla teoria einsteniana della gravitazione,* vol. II, Veschi, Roma, cap. XVI ; A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie,* Roma, Cremonese (1955).

(20) E. BORTOLOTTI. — *Spazi a connessione proiettiva,* Roma, Ferri 1941, pag. 202.

(21) E. CARTAN. — *Leçons sur la théorie des espaces a connexion projective,* París, Gauthier-Villars, 1937.

.(22) E. CARTAN. — o.c. pag. 186

(23) Nella teoria del Cartan la torsione é un tensore, perché si fa la ipotesi della indipendenza dalla 5° coordinata. Ma noi non ci poniamo in tale ipotesi.

(23) Su tale argomento ho tenuto una conferenza (8 maggro 1962) all'Istituto Nazionale di Alta Matematica.