ESTRUCTURAS LINEALES Y SU ORIENTACION

por

E. Linés Escardó

1. Estructura lineal

1.1. Sea C un conjunto $\mathcal{P}(C)$ el conjunto de las partes de C, $\mathcal{D}(C)$ el conjunto de aquellas partes de C que constan de dos elementos, y $s : D(c) \to P(C)$ una aplicación de $\mathcal{D}(C)$ en $\mathcal{P}(C)$.

En la aplicación s, a cada conjunto de dos elementos de C tal como $\{a, b\}$ le corresponde una parte de C que se designa por $s(a, b)$ o por $s(b, a)$.

Una aplicación $s : \mathcal{D}(C) \to \mathcal{P}(C)$ *define en el conjunto C una estructura lineal, si se verifican las condiciones siguientes :*

α) *Para todo* a *y* b *de* C *es* $a, b \in s(a, b)$.

β) *Para todo* $c \in s(a, b) - \{a, b\}$ *es :*

$$s(a, c) \cup s(c, b) = s(a, b) \quad \text{y} \quad s(a, c) \cap s(c, b) = \{c\}$$

γ) *Para todo* a, b *y* c *de* C, *existe un* $s(p, q)$ *tal que* $a, b, c \in s(p, q)$.

En esta aplicación s se denomina *segmento* a, b a la imagen $s(a, b)$ del conjunto de dos elementos $\{a, b\}$. Los elementos a y b son los *extremos* del segmento.

1.2. *Si* $c \in s(a, b) - \{a, b\}$ *es* $s(a, c) \subset s(a, b)$ *y* $s(c, b) \subset s(a, b)$ *en sentido estricto.*

Demostración : En virtud de β) es $s(a, c) \subset s(a, b)$ y además $b \notin s(a, c)$ pues en caso contrario $b \in s(a, c) \cap s(c, b)$ en contra de β).

Análogamente se demuestra la segunda relación del enunciado.

1.3. *Sean* $a, b, c \in C$, *y* $a \neq b$, $b \neq c$ *y* $c \neq a$, *si* $a \in s(b, c)$ *es* $b \notin s(a, c)$ *y* $c \notin s(a, b)$.

DEMOSTRACIÓN : En virtud de β) es $s(b, c) = s(b, a) \cup s(a, c)$ y $s(b, a) \cap s(a, c) = \{a\}$. De esta última relación resulta $b \notin s(a, c)$ pues en caso contrario b pertenecería a $s(b, a) \cap s(a, c)$. Análogamente $c \notin s(a, b)$.

1.4. *Si* $c, d \in s(a, b) - \{a, b\}$ *y* $c \neq d$, *es:*

$$s(a, b) = s(a, c) \cup s(c, d) \cup s(d, b), \text{ donde}$$

$$s(a, c) \cap s(c, d) = \{c\}, \ s(c, d) \cap s(d, b) = \{d\} \text{ y } s(a, c) \cap s(d,b) = \phi\,;$$

$$\text{o es, } s(a, b) = s(a, d) \cup s(d, c) \cup s(c, b), \text{ donde}$$

$$s(a, d) \cap s(d, c) = \{d\}, \ s(d, c) \cap s(c, b) = \{c\} \text{ y } s(a, d) \cap s(c, b) = \phi.$$

DEMOSTRACIÓN : Como $d \in s(a, b) = s(a, c) \cup s(c, b)$, o $d \in s(a, c)$ o $d \in s(c, b)$, pero no pertenece a los dos segmentos, por ser $s(a, c) \cap s(c, b) = \{c\} \neq \{d\}$.

Si $d \in s(c, b)$, en virtud de β) es $s(c, b) = s(c, d) \cup s(d, b)$ y $s(c, d) \cap s(d, b) = \{d\}$, de donde resulta $s(a, b) = s(a, c) \cup s(c, d) \cup s(d, b)$.

Como $s(c, d) \subset s(c, b)$ es $s(a, c) \cap s(c, d) = \{c\}$. Finalmente como $s(d, b) \subset s(c, b)$ es $s(a, c) \cap s(d, b) \subset s(a, c) \cap s(c, b) = \{c\}$, pero $c \notin s(d, b)$, pues ya se ha visto que $s(c, d) \cap s(d, b) = \{d\}$, en consecuencia resulta $s(a, c) \cap s(d, b) = \phi$.

En caso de ser $d \in s(a, c)$ se hubiera obtenido igualmente la segunda parte de la proposición.

1.5. De la proposición anterior resulta:

Si $\{c, d\} \subset s(a, b)$ *es* $s(c, d) \subset s(a, b)$. *Si* $\{c, d\} \subset s(a, b)$ *y* $\{c, d\} \neq \{a, b\}$ *es* $s(c, d) \subset s(a, b)$ *en sentido estricto.*

1.6. *La aplicación* $s : \mathrm{D(C)} \rightarrow \mathcal{P}\mathrm{(C)}$ *es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN : Si $\{a, b\} \neq \{c, d\}$ y si $\{c, d\} \subset s(a, b)$ en virtud del resultado anterior $s(c, d) \subset s(a, b)$ en sentido estricto, lo que implica $s(c, d) \neq s(a, b)$.

Si $\{a, b\} \neq \{c, d\}$ y $c \notin s(a, b)$ o $d \notin s(a, b)$, como $c, d \in s(c, d)$ es $s(a, b) \neq s(c, d)$.

1.7. *Si* $c, d \in s(a, b) - \{a, b\}$ *y* $c \neq d$ *es:* $c \in s(a, d)$ *y* $d \in s(c, b)$, *o* $d \in s(a, c)$ *y* $c \in s(d, b)$.

DEMOSTRACIÓN : Si $c \in s(a, d)$ es $d \notin s(a, c)$, y como $d \in s(a, b) = s(a, c) \cup s(c, b)$ y $d \neq c = s(a, c) \cap s(c, b)$, resulta $d \in s(c, b)$.

Si $c \notin s(a, d)$, como $c \in s(a, b) = s(a, d) \cup s(d, b)$ y $c \neq d = s(a, d) \cap s(d, b)$ resulta $c \in s(d, b)$, de donde $d \notin s(c, b)$. Como $d \in s(a, b) = s(a, c) \cup s(c, b)$ y $d \neq c$ es $d \in s(a, c)$.

Como en el caso anterior se deduce que si $d \in s(a, c)$ es $c \in s(d, b)$.

1.8. *Si* $a, b, c. \in$ C, *o es* $a \in s(b, c)$ *o* $b \in s(a, c)$ *o* $c \in s(a, b)$

Esta es la primera proposición cuya demostración requiere el postulado γ).

Demostración: En virtud de γ) existe un $s(p, q)$ tal que $a, b. c \in s(p, q)$.

Si p y q coinciden con dos de los elementos a, b, c, la proposición queda demostrada en virtud de la misma hipótesis hecha para $s(p, q)$.

Si p o q coincide con uno de los elementos a, b, c, tal como $p = a$, entonces $b, c \in s(a, q)$ y en virtud de 1.7 o $b \in s(a, c)$ o $c \in s(a, b)$ lo que igualmente demuestra la proposición.

Sea el caso en que ninguno de los elementos p, q, coincida con ninguno de los elementos a, b, c. Como $b, c \in s(p, q) = s(p, a) \cup s(a, q)$ y $s(p, a) \cap s(a, q) = a$, se pueden dar las cuatro posibilidades siguientes:

$b, c \in s(p, a)$; $b, c \in s(a, q)$; $b \in s(p, a)$ y $c \in s(a, q)$; $c \in s(p, a)$ y $b \in s(a, q)$.

Las dos primeras posibilidades conducen al caso anterior y la proporción queda demostrada. En la tercera posibilidad

$$b \in s(p, a) \text{ y } c \in s(a, q),$$

de $b \in s(p, a)$ se deduce $a \notin s(p, b)$, y como $a \in s(p, q) = s(p, b) \cup s(b, q)$ y $a \neq b$ es $a \in s(b, q)$; por otra parte, como $c \in s(a, q)$ en virtud de 1.2 es $c \in s(b, q)$. En consecuencia $a, c \in s(b, p)$ y como en el caso anterior queda probada la proposición.

Análoga demostración se tiene en la cuarta posibilidad.

2. Estructura lineal subordinada

2.1. Sea $M \subset C$, la aplicación $s : D(C) \to P(C)$ subordina una aplicación $s^* : D(M) \to P(M)$ definida de la manera siguiente:

Si $\{a, b\} \subset$ M, *es* $s^*(a, b) = s(a, b) \cap$ M.

Esta aplicación s^* define una estructura lineal en M pues se verifican las condiciones α), β) y γ) :

α) Si $\{a, b\} \subset$ M es $a, b \in s^*(a, b)$, pues

$$\{a, b\} \subset s(a, b) \Rightarrow \{a, b\} \cap M \subset s(a, b) \cap M \Rightarrow \{a, b\} \subset s^*(a, b)$$

β) Si $c \in s^*(a, b) - \{a, b\}$ de las relaciones

$$s(a, c) \cup s(c, b) = s(a, b) \text{ y } s(a, c) \cap s(c, b) = \{c\},$$

se deduce

$(s(a, c) \cap M) \cup (s(c, b) \cap M) = s(a, b) \cap M$ o sea $s^*(a, c) \cup s^*(c, b) = s^*(a, b)$ y $(s(a, c) \cap s(c, b)) \cap M = (s(a, c) \cap M) \cap (s(c, b) \cap M) = \{c\} \cap M$ o sea $s^*(a, c) \cap s^*(c, b) = \{c\}$.

γ) Si $\{a, b, c\} \subset M \subset C$ como en virtud de 1.8 o es $a \in s(b, c)$, o $b \in s(a, c)$, o $c \in s(a, b)$, se verifica respectivamente o $a \in s(b, c) \cap M = s^*(b, c)$ o $b \in s(a, c) \cap M = s^*(a, c)$ o $c \in s(a, b) \cap M = s^*(a, b)$. En todo caso existe un $s^*(p, q)$ que contiene $\{a, b, c\}$.

3. Segmentos reducidos

3.1. *Un segmento $s(a, b)$ se denomina reducido si $s(a, b) = \{a, b\}$*, es decir, si el conjunto $s(a, b)$ tiene como únicos elementos a y b.

3.2. *Si $a \in$ C, entre todos los segmentos que tienen a por extremo, a lo más hay dos que son reducidos.*

Demostración: Sean $s(a, b) = \{a, b\}$ y $s(a, c) = \{a, c\}$ dos segmentos reducidos, se ha de probar que si x es un elemento cualquiera de C y $x \neq a$ y $x \neq b$, es $s(a, x) \neq \{a, x\}$; es decir, en virtud de α), que existe siempre algún elemento de C en $s(a, x)$.

Considerados los tres elementos a, b, c, de la hipótesis de que $s(a, b)$ y $s(a, c)$ son reducidos, resulta $c \notin s(a, b)$ y $b \notin s(a, c)$, por lo cual en virtud de 1.8 es $a \in s(c, b)$. Considerados los tres elementos a, b, x en virtud de 1.8, se verifica una y una sola de las tres posibilidades:

$$x \in s(a, b), \quad b \in s(a, x), \quad a \in s(b, x);$$

y análogamente considerados los tres elementos a, c, x se obtienen las tres posibilidades:

$$x \in s(a, c), \quad c \in s(a, x), \quad a \in s(c, x).$$

Las dos primeras quedan excluidas por ser reducidos los segmentos $s(a, b)$ y $s(a, c)$.

Las dos segundas indican que $s(a, x)$ no es reducido conforme lo enunciado.

Las terceras conducen a contradición como resulta del análisis siguiente. Considerados los tres elementos c, b, x en virtud de 1.8 se verifica una y una sola de las tres posibilidades :

$$x \in s(b,\ c), \quad b \in s(c,\ x), \quad c \in s(b,\ x)\ ;$$

si $x \in s(b,c)$ es $s(b,x) \cap s(x,c) = \{x\}$ lo que contradice $a \in s(b,x)$ y $a \in s(c,x)$,

si $b \in s(c,x)$ es $s(c,\ b) \cap s(b,\ x) = \{b\}$ lo que contradice $a \in s(c,b)$ y $a \in s(b,x)$,

si $c \in s(b,x)$ es $s(b,\ c) \cap s(c,\ x) = \{c\}$ lo que contradice $a \in s(c,b)$ y $a \in s(c,x)$.

3.21. *Si* C *es finito, y a es un elemento cualquiera de* C, *entre todos los segmentos que tienen a por extremo, hay por lo menos uno que es reducido.*

Demostración : Se supone que C consta de n elementos y se demuestra la propiedad por inducción, suponiéndola cierta para los conjuntos de $n - 1$ elementos.

Si $a \in C$ y c es otro elemento de C, o $s(a,\ c)$ es reducido y la propiedad queda demostrada, o $s(a,\ c)$ no es reducido y existe algún $d \in s(a,\ c)$. El conjunto $C - c$ consta de $n - 1$ elementos, y en él está definida la aplicación subordinada s^*. En virtud del principio de inducción, existe un $s^*(a,\ b)$ reducido de extremo en a, pero por la definición de s^* existe un segmento $s(a,\ b)$ en C tal que $s^*(a,\ b) = = s(a,\ b) \cap (C - c) = s(a,\ b) - s(a,\ b) \cap \{c\}$. El elemento c no pertenece a $s(a,\ b)$, pues en caso contrario $c \in s(a,\ b) \Rightarrow s(a,\ c) \subset s(a,\ b) \Rightarrow d \in s(a,\ b)$, y como $d \in C - c$, seria $d \in s^*(a,\ b)$ por lo que $s^*(a,\ b)$ no sería reducido. Como $s(a,\ b) \cap \{c\} = \phi$ $s^*(a,\ b) = s(a,\ b)$ y $s(a,\ b)$ es reducido.

3.3. *Si* C *es finito, existe un* $s(p,\ q)$, *con* $p,\ q \in$ C, *que contiene todos los elementos de* C, *o sea,* C $= s(p,\ q)$.

Demostración : Se supone que C consta de n elementos, y se demuestra la propiedad por inducción, suponiéndola cierto para los conjuntos de $n - 1$ elementos.

Si a, b y c son tres elementos de C, en virtud de 1.8, uno de los tres segmentos $s(a,\ b)$, $s(a,\ c)$, $s(b,\ c)$ contiene al elemento restante ; sea $c \in s(a,\ b)$. El conjunto $C - c$ consta de $n - 1$ elementos, y en él está definida la aplicación subordinada s^*. En virtud del principio de inducción existe un $s^*(p,\ q)$ que contiene a todos los elementos de $C - c$; pero teniendo en cuenta la definición de la aplicación s^*, existe un segmento $s(p, q)$ en C tal que $s^*(p, q) = s(p, q) \cap (C - c)$, de donde $s^*(p, q) \subset s(p, q)$. Por otra parte, como $a, b \in C - c$, es $a, b \in s^*(p, q) \subset s(p, q)$, de donde $s(a, b) \subset s(p, q) \Longrightarrow c \in s(p, q)$. Resulta en consecuencia que $C - c \subset s(p, q)$ y además $c \in s(p, q)$, luego $C = s(p, q)$.

3.4. *Si* C *es finito, existe dos elementos* $p, q \in$ C *y sólo dos, tales que cada uno de ellos es extremo de un solo segmento reducido.*

Demostración: En virtud de 3.3 existe un segmento $s(p, q) = C$. Tanto p como q son extremos de un solo segmento reducido. Si p fuese extremo de los dos segmentos reducidos $s(p, a)$ y $s(p, b)$, como según 1.8 entre los tres segmentos $s(p, a)$, $s(p, b)$ y $s(a, b)$ siempre hay uno de ellos que contiene al elemento restante, éste ha de ser $p \in s(a, b)$, pues los otros son reducidos. Pero de $a, b \in s(p, q)$, se deduce $s(p, a) \cap s(a, b) = \{a\}$ o $s(p, b) \cap s(b, a) = \{b\}$ lo que contradice a $p \in s\ (a, b)$.

Análogamente se prueba que q es extremo de un solo segmento reducido.

Sólo falta probar que todos los elementos de C excepto p y q son extremos de dos segmentos reducidos. Sea $c \in C - \{p, q\}$ y $s(c, d)$ un segmento reducido que tiene c por extremo. Suponiendo que C tiene n elementos, y que es cierta la propiedad para los conjuntos de $n - 1$ elementos, en el conjunto $C - c$ de $n - 1$ elementos queda definida la aplicación subordinada s^* y en ella o d coincide con p o con q, y es extremo de un solo segmento reducido, o en caso contrario es extremo de dos segmentos reducidos. En el primer caso, sea $s^*(d, e)$ el único segmento reducido de extremo en d. Existe un segmento $s(d, e)$ en C tal que $s^*(d, e) = s(d, e) \cap (C - c)$. Si $c \notin s(d, e)$ es $s^*(d, e) = s(d, e)$ y $s(d, e)$ es reducido, y como también lo es $s(d, c)$, se tendrán dos segmentos reducidos de extremo d que coincide con p o q, lo que es imposible; por consiguiente ha de ser $c \in s(d, e)$ y $s^*(d, e) = s(d, e)\ c -$. En estas condiciones el segmento $s(d, e)$ consta de los tres elementos d, e, c y $s(c, d)$ y $s(c, e)$ son reducidos.

En el segundo caso $s^*(d, e)$ y $s^*(d, f)$ son los segmentos reducidos de extremo en d, y como $s^*(d, e) = s(d, e) \cap (C - c)$ y $s^*(d, f) = s(d, f) \cap (C - c)$, si c no perteneciera a ninguno de los segmentos $s(d, e)$ y $s(d, f)$ también serían reducidos lo que es imposible pues d ya es extremo del segmento reducido $s(d, c)$. Si c pertenece a $s(d, e)$, este segmento consta de los tres elementos d, e, c y $s(c, d)$ y $s(c, e)$ son reducidos. Razonamiento análogo se haría si c perteneciera a $s(d, f)$.

4. Extremos del conjunto

4.1. *Se dice que h es un extremo de* C, *si no existe ningún segmento $s(p, q)$ tal que $h \in s(p, q) - \{p, q\}$.*

El conjunto C no puede tener más de dos extremos.

Demostración: Si h y k son extremos de C, cualquier otro elemento $a \in C$ no es extremo, pues considerados los tres elementos $a, h, k \in C$ se puede presentar una y una sola de las tres posibilidades

$$a \in s(h, k), \quad h \in s(a, k), \quad k \in s(a, h).$$

Las dos últimas quedan excluidas por ser h y k extremos, y la primera expresa que a no es extremo.

Si el conjunto C *tiene dos extremos h y k, todo elemento $a \in$ C pertenece a $s(h, k)$, o sea* $\mathrm{C} = s(h, k)$, *y recíprocamente.*

Demostración: El razonamiento anterior muestra que si $a \notin s(h, k)$ ha de ser $h \in s(a, k)$ o $k \in s(a, h)$ lo que contradice la condición de extremo de h y k.

Si $C = s(h, k)$ y h no fuera extremo, existiría un $s(p, q) \ni h$, como $p, q \in C$ sería $s(p, (b \subset s(h, k)$. De $h \in s(p, q) \Rightarrow p \notin s(h, q) \Rightarrow p \in s(q, k)$, pues $s(h, q) \cup s(q, k) = s(h, k) = C$. Si $p \in s(q, k)$ es $h \in s(p, q) \subset s(q, k)$, que es imposible, pues $s(h, q) \cap s(q, k) = \{q\}$.

De 3.3 se deduce que *todo conjunto finito tiene dos extremos.*

5. Semirrectas

5.1. En el conjunto de los segmentos $s(c, x)$, uno de cuyos extremos es $c \in C$, se define una relación que se indica por $s(c, x) \sim s(c, x')$:

Los segmentos $s(c, x)$ y *$s(c, x')$ están en la relación $s(c, x) \sim s(c, x')$ si y sólo si*

$$s(c, x) \supset s(c, x') \text{ o } s(c, x) \subset s(c, x').$$

Cuando $x \neq x'$, estas dos condiciones son equivalentes a la condición única

$$c \notin s(x, x'),$$

pues de 1.8 resulta o $x \in s(c, x')$ o $x' \in s(c, x)$, y de 1.2 se deduce $s(c, x) \subset s(c, x')$ o $s(c, x') \subset s(c, x)$, respectivamente.

La relación $s(c, x) \sim s(c, x')$ es de equivalencia.

Demostración: Evidentemente se verifican las propiedades *recíproca* y *simétrica*. La propiedad *transitiva* es:

$$s(c,\ x) \sim s(c,\ x') \text{ y } s(c,\ x') \sim s(c,\ x'') \Rightarrow s(c,\ x) \sim s(c,\ x'')$$

Si $x = x'$ o $x' = x''$ o $x = x''$ la propiedad es inmediata. Cuando no se presenta ninguna de estas igualdades se puede expresar la propiedad transitiva de la siguiente forma:

$$c \notin s(x,\ x') \text{ y } c \notin s(x',\ x'') \Rightarrow c \notin s(x,\ x'')$$

Considerados los tres elementos $x\ x'\ x''$, de $c \notin s(x, x')$ y $c \notin s(x', x'')$ resulta:

si $x' \in s(x,\ x'') \Rightarrow s(x,\ x') \cup s(x',\ x'') = s(x,\ x'') \Rightarrow c \notin s(x,\ x'')$,

si $x \in s(x'\ x'') \Rightarrow s(x,\ x'') \subset s(x',\ x'') \Rightarrow c \notin s(x,\ x'')$

si $x'' \in s(x,\ x') \Rightarrow s(x,\ x'') \cap s(x,\ x') \Rightarrow c \notin s(x,\ x'')$.

5.2. *Si $c \in s(p,\ q) - \{p,\ q\}$, los segmentos $s(c,\ p)$ y $s(c,\ q)$ no son equivalentes*, pues en virtud de β), $s(c, p) \cap s(c, q) = \{c\}$, luego $p \notin s(c,q)$ y $q \notin s(c,\ p)$, y ni el segmento $s(c,\ q)$ contiene al $s(c,\ p)$, ni inversamente.

Si los segmentos $s(c, p)$ y $s(c, q)$ no son equivalentes, $c \in s(p, q) - \{p, q\}$

Considerados los tres elementos $c,\ p,\ q$, se presenta una de las tres posibilidades $p \in s(c, q)$ o $q \in s(c, p)$ o $c \in s(p, q)$. Si $p \in s(c, q) \Rightarrow s(c, q) \supset s(c,\ p) \Rightarrow s(c,\ p) \sim s(c,\ q)$, si $q \in s(c,\ p) \Rightarrow s(c,\ p) \supset s(c,\ q) \Rightarrow s(c,\ p) \sim s(c,\ q)$. Finalmente es $c \in s(p,\ q)$ y como $c \neq p$ y $c \neq q$ queda probada la proposición

5.21. *Si c no es extremo de C la relación de equivalencia definida en el conjunto de segmentos de extremo c, determina dos clases de equivalencia.*

Demostración: Si $c \in s(p, q) - \{p, q\}$ los segmentos $s(c, p)$ y $s(c, q)$ pertenecen a distinta clase de equivalencia. Por otra parte un segmento cualquiera $s(c,\ r)$ es equivalente a uno de los anteriores. Considerados los tres elementos $p,\ q,\ r$, se verifican una de las tres relaciones: $s(p, q) \cup s(q, r) = s(p, r)$, $s(p, r) \cup s(r, q) = s(p, q)$ y $s(r, p) \cup s(p, q) = s(r,\ q)$, donde las intersecciones de los segmentos de los primeros miembros son q, r y p, respectivamente.

Si $s(c, r)$ no es equivalente a $s(c, p)$, es $c \in s(r, p)$ y como $c \in s(p, q)$, resultaría $s(r, p) \cap s(p, q) \neq \{p\}$, lo que contradice la última de las relaciones anteriores, por lo que sólo pueden presentarse las dos primeras. Si se verifica la primera, como $c \in s(p, r)$ y $c \in s(p, q)$, siendo $s(p, q) \cap s(q, r) = \{q\}$, resulta $c \notin s(q, r) \Rightarrow s(c, q) \sim s(c, r)$. Si se verifica la segunda, por un motivo análogo resulta $c \notin s(r, q) \Rightarrow s(c, q) \sim s(c, r)$.

Queda, pues, probado que si $s(c, r)$ no es equivalente a $s(c, p)$ es $s(c, r) \sim s(c, q)$.

Análogamente, si $s(c, r)$ no es equivalente a $s(c, q)$, es $s(c, r) \sim (c, p)$.

5.22. *Si c es extremo de* C, *la relación de equivalencia definida en el conjunto de segmentos de extremo c, determina una sola clase,* pues cualesquiera que sean $x, x' \in C$ como $c \notin s(x, x')$ por ser c extremo, resulta $s(c, x) \sim s(c, x')$.

5.3. *Si c no es extremo del conjunto* C, *una semirrecta de extremo $c \in$ C es el conjunto reunión de todos los segmentos de extremo c que pertenecen a una misma clase de equivalencia* 4.1.

Una semirrecta de extremo c se indica por (c, x).

5.31. *Un elemento c no extremo de* C, *es extremo de dos semirrectas,* pues según 5.21 son dos las clases de equivalencia definida entre los segmentos de extremo c.

De la misma demostración de la proporción 5.21 se deduce:

Si c no es extremo de C, *y (c, x) y (c, x')* son las dos semirrectas de extremo c, *un elemento cualquiera $g \in C$ $(g \neq c)$, pertenece a una y una sola de dichas semirrectas,* es decir $(c, x) \cup (c, x') = C$ y $(c, x) \cap (c, x') = \{c\}$.

5.32. *Si c es extremo de* C, *el conjunto reunión de todos los segmentos de extremo c, que pertenecen a una misma clase de equivalencia, es el conjunto C,* pues en virtud de 4.22 hay una sola clase de equivalencia entre los segmentos de extremo c.

5.4. *Si $d \neq a$, a no extremo de* C, *y $d \in (a, x)$, es $s(a, d) \subset (a, x)$, y $s(a, d)$ pertenece a una de las clases de equivalencia que define (a, x).*

DEMOSTRACIÓN: Como $d \in (a, x)$, en virtud de la definición de semirrecta, existe un segmento de extremo a tal como $s(a, b)$ que contiene a d, y tal que $s(a, b)$ pertenece a la clase de equivalencia que define (a, x). Como $d \in s(a, b) \Rightarrow s(a, d) \subset s(a, b) \Rightarrow s(a, d) \sim s(a, b) \Rightarrow s(a, d) \subset (a, x)$.

5.41. *Si* $a \neq b$, a *y* b *no extremos de* C, *y* (a, x) *y* (b, x), *son dos semirrectas de extremos* a *y* b, *respectivamente, se presenta una y una sola de las cuatro posibilidades :*

$$(a, x) \cap (b, x) = \phi,$$

$$(a, x) \cap (b, x) = s(a, b),$$

$$(a, x) \cap (b, x) = (b, x) \text{ o } (a, x) \supset (b, x)$$

$$(a, x) \cap (b, x) = (a, x) \text{ o } (b, x) \supset (a, x),$$

que corresponden a los cuatro casos :

$$a \notin (b, x) \text{ y } b \notin (a, x),$$

$$a \in (b, x) \text{ y } b \in (a, x),$$

$$a \notin (b, x) \text{ y } b \in (a, x)$$

$$\text{y } a \in (b, x) \text{ y } b \notin (a, x).$$

DEMOSTRACIÓN : *Primer caso :* $a \notin (b, x)$ *y* $b \notin (a, x)$.

Sea un d cualquiera tal que $d \in (a, x)$ y $d \neq a$, como $s(a, d) \subset (a, x)$ y $b \notin (a, x) \Rightarrow b \notin s(a, d) \Rightarrow s(b, a) \sim s(b, d)$, y como $a \notin (b, x) \Rightarrow d \notin (b, x)$. Luego todo elemento $d \in (a, x)$ es $d \notin (b, x)$. Análogamente se prueba que un d cualquiera tal que $d \in (b, x)$ es $d \notin (a, x)$. De estas dos conclusiones resulta $(a, x) \cap (b, x) = \phi$.

Segundo caso : $a \in (b, x)$ *y* $b \in (a, x)$.

Sea un d cualquiera tal que $d \in s(a, b)$, como $s(a, d) \subset s(a, b) \Rightarrow s(a, d) \sim s(a, b)$ y $b \in (a, x) \Rightarrow d \in (a, x)$. Análogamente como $s(b, d) \subset s(a, b) \Rightarrow s(b, d) \sim s(a, b)$ y $a \in (b, x) \Rightarrow d \in (a, x)$. Luego todo elemento $d \in s(a, b)$ pertenece a $(a, x) \cap (b, x)$.

Sea un d cualquiera tal que $d \notin s(a, b)$, por lo que es $a \in s(d, b)$ o $b \in s(a, d)$.

Si $a \in s(d, b) \Rightarrow s(a, b)$ no equivalente a $s(a, d)$ y como $b \in (a, x)$, $d \notin (a, x)$.

Si $b \in s(a, d) \Rightarrow s(b, a)$ no equivalente a $s(b, d)$, y como $a \in (b, x)$, $d \notin (b, x)$.

Luego todo elemento $d \notin s(a, b)$, o $d \in (a, x)$ o $d \notin (b, x)$ y en todo caso $d \notin (a, x) \cap (b, x)$.

Tercer caso : $a \notin (b, x)$ *y* $b \in (a, x)$.

Sea un d cualquiera tal que $d \in (b, x)$, como $s(d, b) \subset (b, x) \Rightarrow a \notin s(d, b)$, por lo que o $d \in s(a, b)$ o $b \in s(a, d)$.

Si $d \in s(a, b) \Rightarrow s(b, d) \subset s(a, b) \Rightarrow s(b, d) \sim s(a, b)$, y como $d \in (b, x) \Rightarrow a \in (b, x)$, lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente, es $b \in s(a, d) \Rightarrow s(a, b) \subset s(a, d) \Rightarrow s(a, b) \sim s(a, d)$, y como $b \in (a, x) \Rightarrow d \in (a, x)$. Luego, todo $d \in (b, x)$ es también $d \in (a, x)$, o sea $(a, x) \cap (b, x) = (b, x)$.

Cuarto caso : $a \in (b, x)$ *y* $b \notin (a, x)$.

Sea un d cualquiera tal que $d \in (a, x)$, como $s(a, d) \subset (a, x) \Rightarrow b \notin s(a, d)$, por lo que o $d \in s(a, b)$ o $a \in s(b, d)$.

Si $d \in s(a, b) \Rightarrow s(a, d) \subset s(a, b) \Rightarrow s(a, d) \sim s(a, b)$, y como $d \in (a, x) \Rightarrow b \in (a, x)$ lo que contradice la hipótesis. Por consiguiente, es $a \in s(b, d) \Rightarrow s(a, b) \subset s(b, d) \Rightarrow s(a, b) \sim s(b, d)$, y como $a \in (b, x) \Rightarrow d \in (b, x)$ Luego, todo $d \in (a, x)$ es también $d \in (b, x)$, o sea $(a, x) \cap (b, x) = (a, x)$.

5.42. De la propiedad anterior se deduce :

Si $a \neq b$, *a y b no extremos de* C *y* $(a, x) \supset (b, x)$ *es :*

$$(a, x) = s(a, b) \cup (b, x) \quad \text{y} \quad \{b\} = s(a, b) \cap (b, x).$$

Si (b, x') es la otra semirrecta que tiene por extremo b, de 4.31 se tiene

$$(b, x) \cup (b, x') = C \quad \text{y} \quad (b, x) \cap (b, x') = \{b\},$$

de donde

$$[(b, x) \cup (b, x')] \cap (a, x) = (a, x) \text{ y } [(b, x) \cap (b, x')] \cap (a, x) = \{b\}.$$

Como $(b, x) \subset (a, x)$, es $a \notin (b, x)$ y $b \in (a, x)$, según el tercer caso 4.41 y además $(b, x) \cap (a, x) = (b, x)$; y como $b \in (a, x)$ y $a \in (b, x')$ resulta $(a, x) \cap (b, x') = s(a, b)$ por el segundo caso de 5.41. Teniendo en cuenta estas relaciones de las igualdades anteriores se llega a las del enunciado.

5.43. *Si* $a \neq b$, *a no extremo de* C *y b extremo de* C *y* $b \in (a, x)$, *es* $(a, x) = s(a, b)$.

DEMOSTRACIÓN : Si $b \in (a, x)$ es $s(a, b) \subset (a, x)$. Si $c \in (a, x)$ es igualmente $s(a, c) \subset (a, x)$, además $b \neq s(a, c)$ por ser b extremo, y como $a \notin s(b, c)$, resulta $c \in s(a, b)$, luego $(a, x) = s(a, b)$.

6. SEMIRRECTAS EQUIVALENTES

6.1. En el conjunto de todas las semirrectas cuyos extremos son elementos cualesquiera, no extremos, de C se define la siguiente relación :

Dos semirrectas (a, x) *y* (b, x) *están en la relación* $(a, x) \sim (b, x)$, *si y sólo si*

$$(a, x) \supset (b, x) \text{ o } (a, x) \subset (b, x).$$

6.11. *Esta relación es de equivalencia.*

DEMOSTRACIÓN: Evidentemente se verifican las propiedades *recíproca* y *simétrica.*

La propiedad *transitiva* es:

$$(a, x) \sim (b, x) \text{ y } (b, x) \sim (c, x) \Rightarrow (a, x) \sim (c, x).$$

Si $a = b$ o $b = c$ o $c = a$ la propiedad es evidente y consecuencia de que si dos semirrectas son equivalentes y tienen el mismo extremo coinciden.

Se supone que los tres elementos a, b y c son distintos.

Si $(a, x) \supset (b, x)$ y $(b, x) \supset (c, x) \Rightarrow (a, x) \supset (c, x) \Rightarrow (a, x) \sim (c, x)$.

Si $(a, x) \subset (b, x)$ y $(b, x) \subset (c, x) \Rightarrow (a, x) \subset (c, x) \Rightarrow (a, x) \sim (c, x)$.

Si $(a, x) \supset (b, x)$ y $(b, x) \subset (c, x)$, en virtud de 5.41 equivalen a $a \notin (b, x)$, $b \in (a, x)$ y $c \notin (b, x)$, $b \in (c, x)$ respectivamente. Considerados los tres elementos a, b, c, se puede presentar una de las tres posibilidades:

$$b \in s(c, a), \quad c \in s(a, b) \text{ y } a \in s(b, c).$$

Se ha de excluir la primera, pues $b \in s(c, a) \Rightarrow s(c, b)$ no equivalente a $s(b, a)$, y como $a \notin (b, x) \Rightarrow c \in (b, x)$, lo que contradice la hipótesis.

La segunda $c \in s(a, b) \Rightarrow s(a, b) \supset s(a, c) \Rightarrow s(a, b) \sim s(a, c)$, y como $b \in (a, x) \Rightarrow c \in (a, x)$, y de la misma $c \in s(a, b) \Rightarrow s(c, a)$ no equivalente a $s(c, b)$, y como $b \in (c, x) \Rightarrow a \notin (c, x)$.

De estas dos conclusiones resulta 5.41, $(a, x) \supset (c, x) \Rightarrow (a, x) \sim (c, x)$.

La tercera $a \in s(b, c) \Rightarrow s(c, b) \supset s(c, a) \Rightarrow s(c, b) \sim s(c, a)$, y como $b \in (c, x) \Rightarrow a \in (c, x)$, y de la misma $a \in s(b, c) \Rightarrow s(a, b)$ no equivalente a $s(a, c)$, y como $b \in (a, x) \Rightarrow c \notin (a, x)$.

De estas dos conclusiones resulta 5.41, $(c, x) \supset (a, x) \Rightarrow (a, x) \sim (c, x)$.

Si $(a, x) \subset (b, x)$ y $(b, x) \supset (c, x)$, designando por (a, x'), (b, x') y (c, x') las otras semirrectas que tienen por extremos a, b y c, es $(a, x') \supset (b, x')$ y $(b, x') \subset (c, x')$, y por lo demostrado en el caso anterior $(a, x') \subset (c, x')$ o $(a, x') \supset (c, x')$, de donde resulta $(a, x) \supset (c, x)$ o $(a, x) \subset (c, x)$ respectivamente, y en todo caso $(a, x) \sim (c, x)$.

6.2. *Si $a \neq b$, y a y b no extremos de* C, *$(a, x) \sim (b, x)$, si y sólo si existe un elemento d que pertenece a las dos semirrectas (a, x) y (b, x), y no pertenece al segmento $s(a, b)$.*

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis $d \in (a, x) \cap (b, x)$, luego queda excluido el primer caso de 5.41; como también $d \notin s(a, b)$, y en el segundo caso 5.41, $(a, x) \cap (b, x) = s(a, b)$, queda excluido tal caso. En consecuencia, los únicos casos posibles son el tercero y cuarto por lo que $(a, x) \sim (b, x)$.

Recíprocamente, si $(b, x) \subset (a, x)$ según 4.42 es $(a, x) = s(a, b) \cup (b, x)$, y $d \in (b, x) \Rightarrow d \in (a, x)$. Además si $d \neq b$ es $d \notin s(a, b)$, pues, $s(a, b) \cap (b, x) = \{b\}$.

6.21. *Si existe un elemento d común a las dos semirrectas (a, x) y (b, x), no perteneciente al segmento $s(a, b)$, todo elemento común a las semirrectas distinto de a y b, no pertenece al segmento $s(a, b)$,* pues según 5.41 la intersección de las dos semirrectas es una de ellas.

6.22. *Si $a = b$ y no extremo de* C, *$(a, x) \sim (b, x)$ si y sólo si existe un elemento d que pertenece a las dos semirrectas,* ya que el elemento $a = b$ determina dos semirrectas 5.31, y todo elemento de C pertenece a una y una sola semirrecta.

6.3. *Si a y b no son extremos de C, toda semirrecta (b, x) es equivalente a una y a una sola de las dos semirrectas (a, x) y (a, x').*

DEMOSTRACIÓN: Según 5.41, consideradas las dos semirrectas (a, x) y (b, x) se puede presentar uno y uno sólo de los cuatro casos siguientes:

$$a \notin (b, x) \text{ y } b \notin (a, x) \Rightarrow a \notin (b, x) \text{ y } b \in (a, x') \Rightarrow (a, x') \supset (b, x)$$

$$a \in (b, x) \text{ y } b \in (a, x) \Rightarrow a \in (b, x) \text{ y } b \notin (a, x') \Rightarrow (b, x) \supset (a, x')$$

$$a \notin (b, x) \text{ y } b \in (a, x) \Rightarrow (a, x) \supset (b, x)$$

$$a \in (b, x) \text{ y } b \notin (a, x) \Rightarrow (b, x) \supset (a, x)$$

En los dos primeros casos es $(a, x') \sim (b, x)$, y en los dos últimos $(a, x) \sim (b, x)$.

7. Extensión de una estructura lineal

7.1. Sea una aplicación $s : \mathcal{D}(C) \to \mathcal{P}(C)$ que define una estructura lineal en el conjunto C, y sea $N \supset C$ un conjunto en el que está definida una estructura lineal por la aplicación $s' : \mathcal{D}(N) \to \mathcal{P}(N)$; se dice que s' *es una extensión a* N *de la estructura lineal* s *definida en* C, *si* s *es la aplicación subordinada por* s' *en* C.

Si el conjunto N resulta de la reunión del conjunto C con un conjunto de un solo elemento $\{c\}$, donde $c \neq C$, se dice que la extensión es *puntual*.

7.2. *Sea* s *una estructura lineal definida en un conjunto* C *y* $s(a, b)$ *un segmento reducido de la misma, existe una extensión puntual* s' *definida en* $\mathrm{N} = \mathrm{C} \cup \{c\}$, $c \notin \mathrm{C}$, *en la que los segmentos* $s'(a, c)$ *y* $s'(c, b)$ *son reducidos.*

Demostración: Si p y q son dos elementos cualesquiera de C, pueden presentarse los dos casos siguientes:

$$s(p, q) \supset s(a, b) \quad \text{y} \quad s(p, q) \not\supset s(a, b)$$

que se excluyen.

Como $s(a, b)$ es reducido, si $s(p, q) \not\supset s(a, b)$ puede darse una y una sola de las tres posibilidades:

$$s(a, b) \cap s(p, q) = \phi, \; s(a, b) \cap s(p, q) = \{a\} \text{ y } s(a, b) \cap s(p, q) = \{b\}$$

Una extensión puntual s' que verifica las condiciones enunciadas es la definida de la manera siguiente:
p y q son dos elementos cualesquiera de C,

1) $s'(p, q) = s(p, q) \cup \{c\}$ si $s(p, q) \supset s(a, b)$

2) $s'(p, q) = s(p, q)$ si $s(p, q) \not\supset s(a, b)$

3) $s'(p, c) = s(p, a) \cup \{c\}$ si $p \notin C - \{a, b\}$ y $b \notin s(p, a)$

4) $s'(p, c) = s(p, b) \cup \{c\}$ si $p \notin C - \{a, b\}$ y $a \notin s(p, b)$

5) $s'(a, c) = \{a, c\}$

6) $s'(c, b) = \{c, b\}$

La aplicación s' verifica las tres condiciones α), β) y γ) exigidas en la definición de estructura lineal.

La verificación de α) es evidente.

Verificación de la condición β) :

En 1), sea $r \in s'(p, q)$, si $r = c$, la misma definición de $s'(p, q)$ indica que se cumple β) ; si $r \neq c \Rightarrow r \in s(p, q) \Rightarrow s(p, q) = s(p, r) \cup s(r, q)$ y $s(p, r) \cap s(r, q) = \{r\}$, pero $s(a, b) = s(p, q) \cap s(a, b) = (s(p, r) \cap s(a, b)) \cup (s(r, q) \cap s(a, b))$ y si $s(p, r) \cap s(a, b) \neq \phi$ y $s(r, q) \cap s(a, b) \neq \phi$, a y b pertenecen uno a cada uno de los $s(p, r)$ y $s(r, q)$ por lo que $b \notin s(a, r)$ lo que contradice a la hipótesis de ser $s(a, b)$ reducido ; en consecuencia, o $s(a, b) \subset s(p, r)$, o $s(a, b) \subset s(r, q)$. En el primer caso $s'(p, r) = s(p, r) \cup \{c\}$ y $s'(r, q) = s(r, q)$, y como $s'(p, q) = s(p, q) \cup \{c\}$ resulta $s'(p, q) = s'(p, r) \cup s'(r, q)$ y además es evidente que $s'(p, r) \cap s'(r, q) = \{r\}$. Demostración análoga se hace en el segundo caso.

En 2), sea $r \in s'(p, q)$, como $s'(p, q) = s(p, q) \not\supset s(a, b) \Rightarrow s(p, r) \not\supset s(a, b) \Rightarrow s'(p, r) = s(p, r)$ y $s(r, q) \not\supset s(a, b) \Rightarrow s'(r, q) = s(r, q)$, luego $s'(p, q) = s'(p, r) \cup s'(r, q)$ y además $s'(p, r) \cap s'(r, q) = \{r\}$.

En 3), sea $r \in s'(p, c) = s(p, a) \cup \{c\}$, como $r \neq c$ es $r \in s(p, a) \Rightarrow s(p, a) = s(p, r) \cup s(r, a)$ y $s(p, r) \cap s(r, a) = \{r\}$, luego $s'(p, c) = s(p, r) \cup s(r, a) \cup \{c\}$ y como $s(p, r) \not\supset s(a, b)$ es $s(p, r) = s'(p, r)$, y además $s'(r, c) = s(r, a) \cup \{c\}$, pues $b \notin s(r, a)$, resulta finalmente $s'(p, c) = s'(p, r) \cup s'(r, c)$ y es evidente que $s'(p, r) \cap s'(r, c) = \{r\}$.

En 4) el razonamiento es el mismo que en 3).

En 5) y 6) la condición β) no tiene sentido.

Verificación de la condición γ):

Si d, e y f son tres elementos cualesquiera de $N = C \cup \{c\}$, existe siempre un $s(p, q)$, tal que $a, b, d, e, f \in s(p, q)$, como $s(a, b) \subset s(p, q)$ es $s'(p, q) \supset s(p, q)$, lo que demuestra lo propuesto.

Para demostrar que la aplicación s' es una extensión s, basta hallar $s'(p, q) \cap C$; en los casos 1) y 2) es $s(p, q)$ y en los casos restantes no se requiere comprobación pues $c \notin C$.

7.3. *Sea s una estructura lineal definida en el conjunto* C, *y a un elemento cualquiera de* C, *existen dos extensiones puntuales s' definidas en* $N = C \cup \{c\}$, $c \notin C$, *en las que* $s'(a, c)$ *es un segmento reducido.*

7.31. Si a no es extremo de C, determina dos semirrectas (a, x) y (a, x'). Una extensión puntual de s es la estructura lineal s' definida en $N = C \cup \{c\}$, donde $c \notin C$, de la manera siguiente:
p y q son dos elementos cualesquiera de C,

1) $s'(p, q) = s(p, q)$ si $a \notin s(p, q)$

2) $s'(p, q) = s(p, q) \cup \{c\}$ si $a \in s(p, q) - \{p, q\}$

3) $s'(p, q) = s(p, q)$ si $a = q$ y $p \in (a, x)$

4) $s'(p, q) = s(p, q) \cup \{c\}$ si $a = q$ y $p \in (a, x')$

5) $s'(p, c) = s(p, a) \cup \{c\}$ si $p \in (a, x) - \{a\}$

6) $s'(p, c) = (s(p, a) \cup \{c\}) - \{a\}$ si $p \in (a, x') - \{a\}$

7) $s'(a, c) = \{a, c\}$

De la misma definición resulta que la aplicación subordinada por s' en C es la dada s.

Otra extensión puntual s' de la s, en la que $s'(a, c)$ es un segmento reducido se obtiene cambiando x por x' y x' por x en los apartados 3), 4), 5) y 6) de la definición anterior.

En ambas extensiones es $s'(a, c) = \{a, c\}$, un segmento reducido.

7.32. Si a es extremo de C, una extensión puntual en $N = C \cup \{c\}$ es la definida de la manera siguiente:

1) $s'(p, q) = s(p, q)$ si p y q son cualesquiera de C

2) $s'(p, c) = s(p, a) \cup \{c\}$ si $p \neq a$

3) $s'(a, c) = \{a, c\}$

y otra extensión puntual es la siguiente:

1) $s'(p, q) = s(p, q)$ si $p \neq a$ y $q \neq a$

2) $s'(p, a) = s(p, a) \cup \{c\}$

3) $s'(p, c) = (s(p, a) \cup \{c\}) - a$

4) $s'(a, c) = \{a, c\}$

En ambas extensiones es $s'(a, c) = \{a, c\}$ un segmento reducido. Se comprueba que las estructuras s' definidas en 6.31 y 6.32 verifican las condiciones α), β) y γ) que definen una estructura lineal, de manera análoga a como se ha hecho en 6.2.

7.4. *Sea s una estructura lineal definida en un conjunto* C, *existen dos extensiones puntuales s' definidas en* $\mathrm{N} = \mathrm{C} \cup \{c\}$, $c \notin \mathrm{C}$, *en las que c es extremo de* N.

DEMOSTRACIÓN: Sea $a \in C$ y no extremo, una extensión puntual s' en $N = C \cup \{c\}$ es la definida de la manera siguiente:

1) $s'(p, q) = s(p, q)$ si p y q son cualesquiera de C

2) $s'(a, c) = (a, x) \cup \{c\}$ do nde (a, x)es *una* de las dos semirrectas determinadas por el punto a.

3) $s'(p, c) = (p, x) \cup \{c\}$ Si p es un elemento cualquiera de C no extremo y (p, x) es la semirrecta de extremo p equivalente a la (a, x).

4) $s'(e, c) = \{e, c\}$ si e es el extremo de C (*cuando existe*) contenido en (a, x).

5) $s'(e', c) = N$ si e' es el extremo de C (*cuando existe*) no contenido en (a, x)

De la misma definición resulta que la aplicación subordinada por s' en C es la dada s.

La aplicación s' verifica las tres condiciones α), β) y γ) exigidas en la definición de estructura lineal.

La verificación de α) es evidente.

Verificación de la condición β) :

En 1) sea $r \in s'(p, q)$ o $r \in s(p, q)$, como $s'(p, r) = s(p, r)$ y $s'(r, q) = s(r, q)$ resulta $s'(p, q) = s'(p, r) \cup s'(r, q)$ y $s'(p, r) \cap s'(r, q) = \{r\}$.

En 2) sea $r \in s'(a, c)$, como $r \neq c$, es $r \in (a, x)$. Si r no es extremo de C sea (r, x) la semirrecta equivalente a la (a, x), de donde resulta $(a, x) \supset (r, x)$. Según 5.42 es $(a, x) = s(a, r) \cup (r, x)$ y de $s'(a, c) = (a, x) \cup \{c\}$ resulta $s'(a, c) = s(a, r) \cup ((r, x) \cup \{c\}) = s'(a, r) \cup s'(r,c)$. De $\{r\} = s(a, r) \cap (r, x)$ se deduce inmediatamente $\{r\} = s'(a, r) \cap s'(r, c)$.

Si r es extremo de C, como $r \in (a, x)$ es $(a, x) = s(a, r)$. Según 1) es $s'(a, r) = s(a, r)$ y según 4) $s'(r, c) = \{r, c\}$, de donde $s'(a, r) \cup s'(r, c) = s'(a, c)$ y $s'(a, r) \cap s'(r, c) = \{r\}$.

En 3) sea $r \in s'(p, c)$, como $r \neq c$, es $r \in (p, x) \Rightarrow (r x) \sim (p, x) \sim (a, x)$ y el razonamiento continua como en el caso anterior.

En 4) la condición β) no tiene sentido.

En 5) sea $r \in s'(e', c) = N$. Si r no es extremo de C sean (r, x) y (r, x') las semirrectas determinadas por r en C, y (r, x) la equivalente a (a, x). Como $(r, x) \cup (r, x') = C$ y $(r, x) \cap (r, x') = \{r\}$ es $s'(e', c) = (\{c\} \cup (r, x)) \cup (r, x')$ y según 3) y 1) resulta finalmente $s'(e', c) = s'(r, c) \cup s'(r, e')$. Es evidente $s'(r, c) \cap s'(r, e') = \{r\}$.

Si $r = e$, como $N = C \cup \{c\} = s(e, e') \cup \{e, c\}$ resulta $s'(e', c) = s'(e, e') \cup s'(e, c)$ y evidentemente $s'(e, e') \cap s'(e, c) = \{e\}$.

7.41. Si en la construcción de la aplicación s' en lugar de considerar la semirrecta (a, x) se hubiera tomado otra equivalente (b, x), el resultado hubiera sido el mismo en virtud de la propiedad transitiva de la equivalencia de rectas.

7.42. Considerando la otra semirrecta (a, x') en la construcción de la aplicación s' se hubiera obtenido una segunda extensión puntual conforme a lo enunciado.

7.5. *Si s es una estructura lineal definida en un conjunto* C, *existen dos extensiones* s' *definidas* en $\mathrm{N} = \mathrm{C} \cup \{c, d\}$, $c \notin \mathrm{C}$ y $d \notin \mathrm{C}$, *en la que c y d son extremos de* N.

DEMOSTRACIÓN: En virtud de la proposición anterior se puede definir una estructura lineal s_1 en el conjunto $N_1 = C \cup \{c\}$ en la que c es extremo; y aplicando de nuevo la proposición anterior se puede definir una estructura s' en el conjunto $N = N_1 \cup \{d\}$ en la que d sea extremo, conservándose el extremo c, por las siguientes condiciones:

1) $s'(p, q) = s_1(p, q)$ si p y q son elementos cualesquiera de N_1.

2) $s'(a, d) = (a, x') \cup \{d\}$ donde a no es extremo de C y (a, x') es la semirrecta de extremo a no considerada en la extensión anterior.

3) $s'(p, d) = (p, x') \cup \{d\}$ si p es un elemento cualquiera de $p \in C$, y (p, x') es la semirrecta de extremo p equivalente a la (a, x').

4) $s'(e, d) = \{e, d\}$ si e, es el extremo de N_1 (*cuando existe*) contenido en $(a\ x')$

5) $s'(c, d) = N$

Se observa que en N, el elemento c continua siendo extremo, pues si existiese un $s'(p, q)$ tal que $c \in s'(p, q) - \{p, q\}$, donde p, $q \in C \cup \{d\}$, o p, $q \in C$ y entonces $s'(p, q) = s_1(p, q) \not\ni c$, o $q = d$ (o $p = d$) y sería $s'(p, q) = s'(p, d) = (p, x') \cup \{d\}$ de donde $c \in (p, x')$. lo que contradice a la condición 3).

8. SEGMENTOS ORIENTADOS

8.1. *El segmento orientado* $[a, b]$ *es* $\{s(a, b), (a, b)\}$ *donde* (a, b) *es el par ordenado en el que a es el primer elemento y b el segundo.*

El elemento a es el primer extremo u *origen* del segmento orientado, y b el segundo extremo.

8.2. *Dos segmentos orientados* $[a, b]$ *y* $[c, d]$ *tienen el mismo sentido, si se verifica una al menos de las tres condiciones:*

$s(a, c) \cap s(b, d) = \phi$ *o un solo elemento*

$s(a, d) \supset s(b, c)$

$s(a, d) \subset s(b, c)$.

Se indicará que los segmentos orientados $[a, b]$ y $[c, d]$ tienen el mismo sentido escribiendo $[a, b] \sim [c, d]$.

Cuando no se verifica ninguna de las condiciones anteriores los segmentos orientados $[a, b]$ y $[c, d]$ tienen distinto sentido.

8.21. La definición anterior es aplicable al caso de que los dos segmentos orientados tengan coincidentes algunos de sus extremos. Los dos segmentos orientados $[a, b]$ y $[c, d]$, con algún extremo coincidente, tienen el mismo sentido en los casos siguientes:

Si $a = c$, $[a, b] \sim [a, d]$ si $s(a, d) \supset s(a, c)$ o $s(a, d) \subset s(c, a)$

$b = d$, $[a, b] \sim [c, b]$ si $s(a, b) \supset s(b, c)$ o $s(a, b) \subset s(b, c)$.

$a = d$, $[a, b] \sim [c, a]$ si $s(a, c) \cap s(b, a) = \phi$ o un punto

$b = c$, $[a, b] \sim [b, d]$ si $s(a, b) \cap s(b, d) = \phi$ o un punto

$a = c$ y $b = d$, $[a, b] \sim [a, b]$ pues $s(a, b) \supset s(a, b)$ y $s(a, b) \subset s(a, b)$

En todos los demás casos los segmentos orientados con algún extremo común, tienen distinto sentido.

8.3. Sea $S_1(C)$ el conjunto de todos los segmentos orientados definidos en C, tales que *ninguno de sus orígenes es un extremo de* C, y $\mathcal{R}(C)$ el conjunto de todas las semirrectas definidas en C; y sea $S_1(C) \to \mathcal{R}(C)$ una aplicación definida de la manera siguiente: *a cada* $[a, b] \in S_1(C)$ *le corresponde la semirrecta que tiene el extremo en a y que contiene a b*. Esta semirrecta se designa por (a, b, x).

8.31. *Si* $[a, b], [c, d] \in S_1(C)$ *y* $[a, b] \sim [c, d]$, *es* $(a, b, x) \sim (c, d, x)$.

Primer caso: $s(a, c) \cap s(b, d) = \phi$ *o un elemento.*

De la hipótesis se deduce $a \neq b$, $c \neq d$, $a \neq c$ y $b \neq d$. Los únicos casos de coincidencia de elementos, no excluidos inicialmente, son $b = c$ y $a = d$.

Si $b = c$ es $s(a, c) \cap s(b, d) = b \Rightarrow a \notin s(b, d)$ y $d \notin s(a, b)$, luego $b \in s(a, d) \Rightarrow s(a, b) \sim s(a, d) \Rightarrow d \in (a, b, x)$ y como $d \in (c, d, x)$ y $d \notin s(a, c)$, es 6.2, $(a, b, x) \sim (c, d, x)$.

Si $a = d$ es $s(a, c) \cap s(b, d) = d \Rightarrow c \notin s(b, d)$ y $b \notin d(c, d)$, luego $d \in s(c, b) \Rightarrow s(c, d) \sim s(c, b) \Rightarrow b \in (c, d, x)$ y como $b \in (a, b, x)$ y $b \notin s\ (a, c)$ es 6.2, $(c, d, x) \sim (a, b, x)$.

Si no hay ninguna coincidencia entre los elementos a, b, c y d, $d \notin s(a, c)$ y $d \in (c, d, x)$ y también $d \in (a, b, x)$, pues $s(a, b) \sim s(a, d)$ por ser $a \notin s(b, d)$, luego $(a, b, x) \sim (c, d, x)$.

Segundo caso: $s(a, d) \supset s(b, c)$.

De la hipótesis se deduce $a \neq b$, $c \neq d$, $a \neq d$ y $b \neq c$. Los únicos casos de coincidencia de elementos, no excluidos inicialmente, son $a = c$ y $b = d$.

Si $a = c$, de $s(a, d) \supset s(a, b) \Rightarrow s(a, d) \sim s(a, b) \Rightarrow d \in (a, b, x)$ y como $d \in (c, d, x)$, según 6.21 es $(a, b, x) \sim (c, d, x)$.

Si $b = d$, como $d \in (a, b, x)$ y $d \in (c, d, x)$ y en virtud de la hipótesis $c \in s(a, d)$, de donde $d \notin s(a, c)$, resulta de 6.2 $(a, b, x) \sim (c, d, x)$.

Si no hay ninguna coincidencia entre los elementos a, b, c y d, $s(a, d) \supset s(b, c) \Rightarrow c \in s(a, d) \Rightarrow s(a, d) \supset s(a, c)$ y $d \notin s(a, c)$, y según 6.2 $(a, b, x) \sim (c, d, x)$.

Tercer caso: $s(a, d) \subset s(b, c)$.

De la hipótesis se deduce $a \neq b$, $c \neq d$, $a \neq d$ y $b \neq c$. Los únicos casos de coincidencia no excluidos inicialmente son $a = c$ y $b = d$.

Si $a = c$, de $s(a, b) \supset s(a, d) \Rightarrow s(a, b) \sim s(a, d) \Rightarrow d \in (a, b, x)$ y como $d \in (c, d, x)$, según 6.21 es $(a, x, b) \sim (c, d, x)$.

Si $b = d$, como $d \in (a, b, x)$ y $d \in (c, d, x)$ y en virtud de la hipótesis $a \in s(c, d)$ y $d \notin s(a, c)$, resulta de 6.2 $(a, b, x) \sim (c, d, x)$.

Si no hay ninguna coincidencia entre los elementos a, b, c y d, $s(a, d) \subset s(b, c) \Rightarrow a \in s(b, c) \Rightarrow s(b, c) \supset s(c, a)$ y $b \notin s(c, a)$, y según 6.2 $(a, b, x) \sim (c, d, x)$.

8.32. *Si son equivalentes las dos semirrectas* (a, x) y (c, x) *y* b *y* d *son dos elementos cualesquiera, respectivamente de* (a, x) *y* (b, x), *es* $[a, b] \sim [c, d]$.

Si $a = c$, entonces los elementos b y d pertenecen a la misma semirrecta por lo que $s(a, b) \sim s(a, d) \Rightarrow [a, b] \sim [c, d]$.

Si $a \neq c$ y $(a, x) \supset (c, x)$, según 5.41, $a \in (c, x)$ y como $d \in (c, x) \subset (a, x)$, en virtud de 6.21 es $d \notin s(a, c)$, por lo que $c \in s(a, d)$, y en consecuencia $s(a, c) \subset s(a, d)$.

Cuando $b \in s(a, d)$, si $b \neq c$ es $s(b, c) \subset s(a, d) \Rightarrow [a, b] \sim [c, d]$, y si $b = c$ es $s(a, c) \cap s(b, d) = \{b\} \Rightarrow [a, b] \sim [c, d]$.

Cuando $b \notin s(a, d)$, como $b, d \in (a, x) \Rightarrow s(a, b) \sim s(a, d) \Rightarrow$

$a \notin s(b,d)$ y en consecuencia $d \in s(a, b)$, de donde $s(a, d) \cap s(d, b) = \{d\}$ y como $s(a, c) \subset s(a, d)$ resulta $s(a, c) \cap s(d, b) = \phi \Rightarrow [a, b] \sim [c, d]$.

Conclusiones análogas resultan cuando $(a, x) \subset (c, x)$.

8.4. *Sea* C *un conjunto en el que se ha definido una estructura lineal* s, *y sea* S(C) *el conjunto de todos los segmentos orientados en* C, *la relación* $[a, b] \sim [c, d]$ *definida en* S.C) *que expresa que los dos segmentos tienen el mismo sentido es una relación de equivalencia.*

Demostración: Sea s' la estructura lineal definida 7.5 en $N = C \cup \{p, q\}$, extensión de la s, y en la que p y q son extremos de N. Sea $S_2(N)$ el conjunto de todos los segmentos orientados de N tales que el origen y el extremo de cada uno de ellos es distinto de p y de q. $S(C) = S_2(N)$, pues si $a, b \in C$ es $p, q \notin s'(a, b)$ en virtud de la definición de extremos del conjunto N.

Según 7.4 si $a, b \in C$ es $s'(a, b) = s(a, b)$, y en consecuencia las condiciones enunciadas en 8.2 para que dos segmentos orientados $[a, b]$ y $[c, d]$ tengan el mismo sentido, son las mismas cuando los segmentos pertenecen a $S(C)$ o cuando se consideran pertenecientes a $S_2(N)$.

Dos segmentos $[a, b]$, $[c, d] \in S_2(N)$ tienen el mismo sentido si $s(a, b, x) \sim (c, d, x)$ y recíprocamente 8.31, 8.32, y como esta relación entre semirrectas es de *equivalencia* 6.11, resulta en consecuencia que la relación $[a, b] \sim [c, d]$ entre los segmentos orientados de $S(C)$ es también de equivalencia.

9. Orientación de una estructura lineal.

9.1. Sea s una estructura lineal definida en un conjunto C, y $S(C)$ el conjunto de los segmentos orientados en C, y sea ω la relación definida en $S(C)$ que expresa que dos segmentos tienen el mismo sentido. En 8.4 se ha demostrado que ω es una relación de equivalencia que da lugar a una partición de $S(C)$, lo que permite introducir la definición siguiente:

Una orientación en la estructura lineal s definida en C, *es una clase de equivalencia originada por la relación* ω.

9.2. El número de clases de equivalencia originadas por ω es *dos*, pues según 6.3 en la relación de equivalencia definida en el conjunto de las semirrectas contenidas en $N = C \cup \{p, q\}$ cuyos orígenes son distintos de p y q, son también dos las clases de equivalencia, y si $[a, b] \sim [c, d]$ es $(a, b, x) \sim (c, d, x)$ y recíprocamente ; en consecuencia :

Toda estructura lineal s definida en un conjunto C, *admite dos y solo dos orientaciones.*

BIBLIOGRAFIA

BORSUK, K. and SZMIELEW, W. — *Foundations of Geometry.* Amsterdam, 1960.

COXETER, H. S. M. — *Introduction to Geometry.* New York-London, 1961; Part III, 12.

HILBERT, D. — *Grundlagen der Geometrie.* 8, Auflage-Stuttgart, 1956.

PASCH, M. and DEHN, M. — *Vorlesungen über neuere Geometrie.* 2 Auflage. — Berlín, 1926.

PICKERT, G. — *Projektive Ebenen.* — Berlín. Göttingen-Heidelberg, 1955.