SOBRE LA PROLONGACION DE FUNCIONALES LINEALES (*)

por

BALTASAR R.-SALINAS

Dada una función lineal f_0 sobre un subespacio lineal X_0 de un espacio lineal real X y una función subaditiva y positivamente homogénea p^* sobre X (1) se presenta el problema de averiguar si existe una función lineal f, que sea prolongación de f_0 y que verifique

$$(A) \qquad f(x) \leq p^*(x)$$

para cada $x \in X$, y

$$(B) \qquad f(y) \leq 0$$

para cada y perteneciente a un subconjunto Y de X.

Evidentemente, para que exista alguna función lineal f con tales propiedades es necesario que

$$f_0(x) \leq p^*(x - y)$$

para todo $(x, y) \in X_0 \times Y$. Esta condición es también suficiente cuando Y sea un subespacio lineal de X según se ve definiendo la función f_1 sobre $X_0 + Y$ por

$$f_1(x + y) = f_0(x)$$

(*) Este trabajo ha sido realizado con una ayuda de la Junta para el Fomento de la Investigación en la Universidad.

(1) Dado un subconjunto Y de un espacio lineal real X se dice que p es una función subaditiva y positivamente homogénea sobre Y $(\neq \emptyset)$ si

$$Y + Y \subset Y \text{ y } \alpha Y \subset Y$$

para cada $\alpha \in R+$, y si p es una función real finita, definida sobre Y, que satisface

$$p(y_1 + y_2) \leq p(y_1) + p(y_2)$$

para cada $(y_1, y_2) \in Y^2$ y

$$p(\alpha y) = \alpha p(y)$$

para cada $(\alpha, y) \in R+ \times Y$.

para cada $(x, y) \in X_0 \times Y$ (2) y aplicando el teorema de HAHN-BANACH a (f_1, p^*). Este resultado es también cierto, según se deduce del teorema 1 y observación 1, cuando $Y + Y \subset Y$ y $\alpha Y \subset Y$ para todo número real $\alpha \geq 0 : \alpha \in R^+$.

De forma más general, el teorema 1 resuelve el problema análogo que se obtiene cuando se sustituye la condición (B) por

$$(C) \qquad f(y) \leq p(y)$$

para cada $y \in Y$, siendo p una función subaditiva y positivamente homogénea sobre Y.

En el teorema 2 se expresa

$$\inf \{\omega_f \mid f \in \mathfrak{F}\}$$

en función de f_0, p y p^* cuando $\mathfrak{F}$ es la clase de las funciones lineales f sobre X que son prolongación de f_0 y satisfacen (A), $p \geq 0$ y

$$\omega_f = \sup \left\{ \frac{f(y)}{p(y)} \,\middle|\, y \in Y \right\} \text{ (3)} .$$

En el teorema 3 se trata de una cuestión semejante a la del teorema 2 para un conjunto $\{\omega'_f \mid f \in \mathfrak{F}\}$ de números definidos mediante una relación ϱ en X. Como consecuencia importante de este teorema se obtiene el teorema 4, punto inicial de este trabajo, en donde se expresa

$$\omega(\mu_0 ; \varrho) = \inf \{\omega(\mu_0 ; \mu, \varrho) \mid \mu \in M\}$$

sin hacer uso de M, siendo:

1. μ_0 una extensión sobre un anillo de Boole $\mathfrak{S}_0$ de partes de un conjunto no vacío E (4).

2. M la clase de las prolongaciones ultracompletas de μ_0 (5).

---

(2) Esta función, que está bien definida por ser $f_0(x) = 0$ para todo $x \in X_0 \cap Y$ en virtud de (B), es una función lineal sobre $X_0 + Y$.

(3) Se debe tomar $a/0$ igual a $-\infty$, 0 ó $+\infty$ según que $a < 0$, $\alpha = 0$ ó $\alpha > 0$. De este modo ω y ω_f son números no negativos.

(4) Una *extensión* es una función real de conjunto μ, definida sobre un anillo de Boole $\mathfrak{S}$ de partes de un conjunto no vacío E, finita y no negativa, y tal que

$$\mu(S_1 \cup S_2) = \mu(S_1) + \mu(S_2)$$

para todo par (S_1, S_2) de conjuntos disjuntos pertenecientes a $\mathfrak{S}$.

(5) Se llama *prolongación ultracompleta* de una extensión μ_0 sobre $\mathfrak{S}_0$ a toda extensión μ sobre la clase $\mathfrak{S}$ de las partes de los conjuntos $S_0 \in \mathfrak{S}_0$, que sea una prolongación de μ_0.

3. ϱ una relación definida en la clase $\mathfrak{S}$ de las partes de los conjuntos $S_0 \in \mathfrak{S}_0$.

4. $\omega(\mu_0 ; \mu, \varrho)$ el número definido de manera análoga que en [5], pág. 159 por

$$\omega(\mu_0 ; \mu, \varrho) = \sup \left\{ \frac{\mu(S) - \mu(S')}{\mu_e(S)} \;\middle|\; S \varrho S' \right\}^+ \quad (^6)$$

para $\mu \in M$, siendo μ_e la extensión exterior:

$$\mu_e(S) = \inf \{ \mu_0(S_0) \mid S_0 \in \mathfrak{S}_0, \; S_0 \supset S \} \quad (S \in \mathfrak{S}).$$

El teorema 5 es un caso particular notable del teorema 1 que hemos creído conveniente destacar, entre otras razones, por ser una generalización de dos teoremas de DIXMIER [1] y ROBISON [3].

Estos resultados se pueden generalizar para funciones A-modulares siguiendo el orden de ideas de [4]. De hecho el teorema 9 de [4] es una generalización del teorema 1.

* * *

TEOREMA 1. — Sean:

1. *X_0 un subespacio lineal de un espacio lineal real X e Y un subconjunto no vacío de X tal que*

$$Y + Y \subset Y \; y \; R^+ Y \subset Y.$$

2. *f_0 una función lineal sobre X_0.*

3. *p y p^* dos funciones subaditivas y positivamente homogéneas sobre Y y X, respectivamente.*

Entonces existe una función lineal f sobre X que satisface:

a) $f(x) = f_0(x)$ *para cada* $x \in X_0$,

b) $f(y) \leq p(y)$ *para cada* $y \in Y$,

c) $f(x) \leq p^*(x)$ *para cada* $x \in X$,

si y sólo si

(1) $$f_0(x) \leq p(y) + p^*(x - y)$$

para todo $(x, y) \in X_0 \times Y$.

(6) $a^+ = \max \{a, 0\}$.

DEMOSTRACIÓN. — Desde luego, si tal función lineal f existe, se tiene

$$\begin{aligned} f_0(x) &= f(y) + f(x-y) \\ &\leq p(y) + p^*(x-y) \end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in X_0 \times Y$.

Por otra parte, observando que

$$p' : p'(x) = \inf \{ p(y) + p^*(x-y) \mid y \in Y \} \quad (x \in X)$$

verifica :

$a_1)$ $f_0(x) \leq p'(x)$ para $x \in X_0$,

$b_1)$ $p'(y) \leq p(y)$ para $y \in Y$,

$c_1)$ $p'(x) \leq p^*(x)$ para $x \in X$,

para demostrar que (1) implica la existencia de una función lineal f sobre X con las propiedades requeridas bastará probar, según el teorema de HAHN-BANACH, que p' es una función subaditiva y positivamente homogénea sobre X. En efecto, como cualquiera que sea $x_i \in X$ para cada $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un $y_i \in Y$ de modo que

$$p(y_i) + p^*(x_i - y_i) < p'(x_i) + \frac{\varepsilon}{2},$$

resulta

$$\begin{aligned} p'(x_1 + x_2) &\leq p(y_1 + y_2) + p^*(x_1 + x_2 - y_1 - y_2) \\ &\leq p(y_1) + p^*(x_1 - y_1) \\ &\quad + p(y_2) + p^*(x_2 - y_2) \\ &\leq p'(x_1) + p'(x_2) + \varepsilon \end{aligned}$$

para cada $\varepsilon > 0$ y, por tanto,

$$p'(x_1 + x_2) \leq p'(x_1) + p'(x_2)$$

cualesquiera que sean los elementos x_1 y x_2 de X.

De manera análoga se puede probar que

$$p'(\alpha x) = \alpha p'(x)$$

para cada $(\alpha, x) \in R^+ \times X$.

OBSERVACIÓN 1. — *Si* $p = 0$ *la condición* (1) *se reduce a*

(1.1) $$f_0(x) \leq p^*(x - y)$$

para todo $(x, y) \in X_0 \times Y$. *Si además* $- Y \subset Y$, *es decir, si* Y *es un subespacio lineal de* X, *se puede sustituir* $b)$ *por*

$b_0)$ $f(y) = 0$ *para cada* $y \in Y$.

OBSERVACIÓN 2. — *Si* p_* *es la función definida sobre* X *por*

(2) $$p_*(x) = \sup \{f_0(x') - p^*(x' - x) \mid x' \in X_0\} \quad (x \in X) \text{ (7)}$$

se puede escribir (1) *en forma equivalente así :*

(1) $$p_*(y) \leq p(y)$$

para cada $y \in Y$.

En particular, resulta

(3) $$p_*(x) = -p^*(-x) \quad (x \in X)$$

y

(4) $$f_0(x) = p^*(x) \quad (x \in X_0) \text{ (8)}$$

cuando sea

(5) $$p^*(x + y) = f_0(x) + p^*(y)$$

para todo $(x, y) \in X_0 \times X$, como ocurre en los casos siguientes:

1. $X_0 = \{0\}$ y $f_0 = 0$.

2. X es un espacio lineal real ordenado [9] tal que para cada $x \in X$ se puede encontrar un elemento $x_0 \geq x$ de X_0, f_0 es no decreciente y

(6) $$p^*(x) = \inf \{f_0(x') \mid x' \in X_0, x' \geq x\} \quad (x \in X).$$

TEOREMA 2. — *Con las condiciones* 1, 2 *y* 3 *del teorema* 1, *sean :*

1. $p \geq 0$, p_* *la función definida por* (2) *y*

(7) $$\omega = \sup \left\{ \frac{p_*(y)}{p(y)} \,\middle|\, y \in Y \right\} \text{ (3)}$$

---

[7] Si $f_0(x) \leq p_*(x)$ para cada $x \in X_0$ resulta $p_*(x) \leq f_0(x)$ para todo $x \in X$; si $f_0(x) > p_*(x)$ para algún $x \in X_0$ es $p_* = -\infty$.

[8] Entonces *a)* es una consecuencia de *c)*.

[9] Un conjunto X, dotado de una estructura de espacio lineal real y de una estructura de orden, se dice un *espacio lineal real ordenado* si se verifican :

1. La relación $x \leq y$ en X implica $x + z \leq y + z$ cualquiera que sea $z \in X$.
2. La relación $x \geq 0$ implica $\alpha x \geq 0$ para todo $\alpha \in R+$.

2. *$f_0(x) \leq p^*(x)$ para todo $x \in X_0$, $\mathfrak{F}$ la clase de las funciones lineales f sobre X que son prolongación de f_0 y satisfacen $f(x) \leq p^*(x)$ para cada $x \in X$, y*

$$\omega_f = \sup \left\{ \frac{f(y)}{p(y)} \,\middle|\, y \in Y \right\} \text{ (}^3\text{)} \tag{8}$$

para $f \in \mathfrak{F}$.

Entonces,

$$\omega = \min \{ \omega_f \mid f \in \mathfrak{F} \}. \tag{9}$$

Demostración. — En primer lugar, siendo evidentemente $p_* \leq f$ para $f \in \mathfrak{F}$, resulta $\omega \leq \omega_f$ para todo $f \in \mathfrak{F}$ y, por tanto,

$$\omega \leq \inf \{ \omega_f \mid f \in \mathfrak{F} \}.$$

Por esta desigualdad, para demostrar (9) en el caso $\omega = +\infty$ bastará probar que $\mathfrak{F} \neq \phi$, cosa que se efectúa sin dificultades aplicando el teorema de Hahn-Banach a (f_0, p^*).

Por último, si $\omega \neq +\infty$ y se aplica el teorema 1 y la observación 2 a $(f_0, \omega p, p^*)$ se deduce que existe una función $f \in \mathfrak{F}$ que satisface

$$f(y) \leq \omega p(y)$$

para cada $y \in Y$ y, por consiguiente, $\omega_f \leq \omega$; de donde se sigue (9) teniendo en cuenta la desigualdad probada anteriormente.

Teorema 3. — Sean:

1. *X_0 un subespacio lineal de un espacio lineal real X, y f_0 una función lineal sobre X_0.*

2. *p^* una función subaditiva y positivamente homogénea sobre X que satisface $f_0(x) \leq p^*(x)$ para cada $x \in X$, y p_* la función definida por (2).*

3. *ϱ una relación definida en X, Y el subconjunto de X definido por*

$$Y = \left\{ \sum_1^n \alpha_i (x_i - x'_i) \mid \alpha_i \in R^+, x_i \varrho x_i' \right\} \tag{10}$$

y h una función real, no negativa, definida en el conjunto de los pares $(x, x') \in X^2$ que están en la relación $x \varrho x'$.

4. *p la función definida sobre Y por*

$$(11)\quad p(y) = \inf\left\{ \sum_1^n \alpha_i h(x_i, x_i') \,\middle|\, y = \sum_1^n \alpha_i (x_i - x_i'), \alpha_i \in R^+, x_i \varrho x_i' \right\},$$

y

$$(7)\qquad \omega = \sup\left\{ \frac{p_*(y)}{p(y)} \,\middle|\, y \in Y \right\}.$$

5. *$\mathfrak{F}$ la clase de las funciones lineales f sobre X que son prolongación de f_0 y satisfacen $f \leq p^*$, y*

$$(12)\qquad \omega_f' = \sup\left\{ \frac{f(x - x')}{h(x, x')} \,\middle|\, x \varrho x' \right\}^+$$

para $f \in \mathfrak{F}$.

Entonces,

$$(13)\qquad \omega = \min\{\omega_f' \mid f \in \mathfrak{F}\}.$$

Demostración. — Como es obvio que $Y + Y \subset Y$ y $R^+ Y \subset Y$ y que p es una función subaditiva, positivamente homogénea y no negativa sobre Y, por el teorema 2 será suficiente probar que $\omega_f = \omega'_f$ para cada f $\in \mathfrak{F}$. En efecto, si $y = \sum_1^n a_i (x_i - x_i')$ $(\in Y)$ con $a_i \in R^+$ y $x_i' \varrho x_i$ para $1 \leq i \leq n$ y $f \in \mathfrak{F}$, se verifica

$$f(y) = \sum_1^n a_i f(x_i - x_i') \leq \omega'_i \sum_1^n a_i h(x_i, x_i')$$

y, por tanto,

$$f(y) \leq \omega_f' p(y)$$

para todo $y \in Y$, y $\omega_f \leq \omega_f'$. Finalmente, de esta desigualdad se deduce $\omega_f = \omega_f'$ teniendo presente que

$$\begin{aligned}\omega_f &\geq \sup\left\{ \frac{f(x - x')}{p(x - x')} \,\middle|\, x \varrho x' \right\}^+ \\ &\geq \sup\left\{ \frac{f(x - x')}{h(x, x')} \,\middle|\, x \varrho x' \right\}^+ \\ &= \omega'_f\end{aligned}$$

para $f \in \mathfrak{F}$ por ser $p(x - x') \leq h(x, x')$ y $\omega_f' \geq 0$.

OBSERVACIÓN 3. — *Si p es una función subaditiva, positivamente homogénea y no negativa sobre Y se puede tomar $h(x, x') = p(x-x')$ cuando $x \varrho x'$.*

OBSERVACIÓN 4. — *Si $x\varrho x'$ para algún $x' \epsilon X$ implica $p^*(x) \geq 0$ se puede tomar $h(x, x') = p^*(x)$. Si además $x \varrho x'$ para algún $x \epsilon X$ implica $p^*(-x') \leq 0$, resulta $\omega_f' \leq 1$ para cada $f \epsilon \mathfrak{F}$.*

OBSERVACIÓN 5. — *Si Y_0 es el subconjunto de X definido por*

$$(10)_0 \qquad Y_0 = \left\{ \sum_1^n (x_i - x_i') \mid x_i \varrho x_i' \right\} \ (n \geq 0)$$

y p_0 es la función definida sobre Y_0 por

$$(11)_0 \qquad p_0(y) = \inf \left\{ \sum_1^n h(x_i, x_i') \,\middle|\, y = \sum_1^n (x_i - x_i'),\ x_i \varrho x_i' \right\},$$

resulta

$$(14) \qquad \omega = \sup \left\{ \frac{p_*(y)}{p_0(y)} \,\middle|\, y \epsilon Y_0 \right\}.$$

En efecto, si Y_1 y p_1 son el conjunto y función que se obtienen exigiendo, respectivamente, en (10) y (11) que α_i sea racional, se deduce que el conjunto

$$\left\{ \frac{p_*(y)}{p_1(y)} \,\middle|\, y \epsilon Y_1 \right\}$$

es denso en

$$\left\{ \frac{p_*(y)}{p(y)} \,\middle|\, y \epsilon Y \right\},$$

de donde resulta (14) teniendo en cuenta que

$$\frac{p_*(y)}{p_1(y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{p_*(n!\, y)}{p_0(n!\, y)}$$

para $y \epsilon Y_1$.

TEOREMA 4. — Sean:

1. *$\mathfrak{S}_0$ un anillo de Boole de partes de un conjunto no vacío E y $\mathfrak{S}$ la clase de las partes de los conjuntos $S_0 \epsilon \mathfrak{S}_0$.*

2. μ_0 *una extensión sobre* $\mathfrak{S}_0$ *y* μ_e *la extensión exterior asociada:*

$$(15) \qquad \mu_e(S) = \inf\ \{\mu_0(S_0) \mid S_0 \in \mathfrak{S}_0,\ S_0 \supset S\} \quad (S \in \mathfrak{S}).$$

3. ϱ *una relación en* $\mathfrak{S}$ *e* Y_0 *el conjunto de las funciones que se pueden expresar en la forma*

$$y = \sum_1^n (x_{S_i} - x_{S_i'}) \quad (n \geq 0)$$

con $S_i \varrho S'_i$ $(1 \leq i \leq n)$, *siendo* x_S *la función característica de* $S \subset E$.

4. μ_0 *la función definida sobre* Y_0 *por*

$$(16) \qquad p_0(y) = \inf\left\{ \sum_1^n \mu_e(S_i) \;\middle|\; y = \sum_1^n (x_{S_i} - x_{S_i'}),\ S_i \varrho S'_i \right\}$$

y

$$(17) \qquad \omega = \sup\left\{ \frac{\int y\, d\mu_0}{p_0(y)} \;\middle|\; y \in Y_0 \right\}.$$

5. M *el conjunto de las prolongaciones ultracompletas de* μ_0 *y*

$$(18) \quad \omega(\mu_0;\, \mu,\, \varrho) = \sup\left\{ \frac{\mu(S) - \mu(S')}{\mu_e(S)} \;\middle|\; S \varrho S' \right\}^+ \quad (\{S,\ S'\} \subset \mathfrak{S})$$

para $\mu \in M$.

Entonces,

$$(19) \qquad \omega = \min\ \{\omega(\mu_0;\, \mu,\, \varrho) \mid \mu \in M\} \equiv \omega(\mu_0;\, \varrho)$$

Demostración. — Se obtiene inmediatamente del teorema 3 y de la observación 5 tomando:

1. X el espacio lineal engendrado por las funciones características x_S de los conjuntos $S \in \mathfrak{S}$, X_0 el mínimo subespacio lineal de X que contiene a las funciones características x_S de los conjuntos $S \in \mathfrak{S}_0$, y $f_0(x) = \int x\, d\mu_0$ para $x \in X_0$,

2. $x_S \varrho x_{S'}$ cuando y sólo cuando $S \varrho S'$, y $h(x_S,\ x_{S'}) = \mu_e(S)$ si $S \varrho S'$.

3. $p^*(x) = \overline{\int} x\, d\mu_0$ para $x \in X$.

OBSERVACIÓN 6. — *Si* $\mu_e(S) = \mu_e(S')$ *cuando* $S \varrho S'$, *se tiene*

$$(20) \qquad \omega(\mu_0; \mu, \varrho) = \sup \left\{ \frac{\mu(S)}{\mu_e(S)} - \frac{\mu(S')}{\mu_e(S')} \middle| S \varrho S' \right\}^+ \quad (\mu_e(S) > 0).$$

OBSERVACIÓN 7. — *En el caso que* $\mathfrak{S}_0 = \{\phi, E\}$ *y*

$$\mu_0 : \mu_0(\phi) = 0 \text{ y } \mu_0(E) = 1,$$

se escribirá, de acuerdo con [5] *pág.* 159, $\omega(\mu, \varrho)$ *y* $\omega(\varrho)$ *en lugar de* $\omega(\mu_0; \mu, \varrho)$ *y* $\omega(\mu_0; \varrho)$.

Aunque implícitamente contenido en el teorema 1 y observación 1 conviene enunciar el siguiente:

TEOREMA 5. — Sean:

1. X_0 *un subespacio lineal de un espacio lineal real* X *y* f_0 *una función lineal sobre* X_0.

2. ϱ *una relación en* X.

3. p^* *una función subaditiva y positivamente homogénea sobre* X, *y* p_* *la función definida por* (2).

Entonces, para que exista una función lineal f *sobre* X *que verifique:*

a) $f(x) = f_0(x)$ *para cada* $x \in X_0$,

b) $f(x) \leq f(x')$ *cuando* $x \varrho x'$,

c) $p_*(x) \leq f(x) \leq p^*(x)$ *para cada* $x \in X$,

es necesario y suficiente que para todo conjunto finito de ternas $(\alpha_i, x_i, x'_i) \in R^+ \times X \times X$ *que estén en la relación* $x_i \varrho x_i'$ $(1 \leq i \leq n)$ *y todo* $x \in X_0$ *se tenga*

$$(21.1) \qquad f_0(x) \leq p^*(x + \sum_1^n \alpha_i (x_i' - x_i))$$

o

$$(21.2) \qquad f_0(x) \leq p^*(x + \sum_1^n (x_i' - x_i)).$$

COROLARIO 1. — *Con las notaciones del teorema* 5, *para que exista una función lineal* f *sobre* X *que verifique a), b) y c) es necesario y suficiente que cualesquiera que sean los pares* $(x_i, x'_i) \in X^2$ *en la relación*

$x_i \varrho x_i'$ $(1 \leq i \leq n)$ *se pueda encontrar una función lineal* f^* *que sea prolongación de* f_0 *y cumpla*

$$f^*(x) \leq p^*(x)$$

para cada x *perteneciente al dominio* $D(f^*)$ *de* f^* *y*

$$f^*\left(\sum_1^n x_i\right) \leq f^*\left(\sum_1^n x_i'\right) \quad \left(\sum_1^n x_i \text{ y } \sum_1^n x_i' \in D(f^*)\right). \tag{22}$$

Observación 8. — *En el caso que* X *sea un espacio lineal de funciones reales acotadas sobre un conjunto no vacío* E, *creemos que tendría interés examinar cuando basta para la existencia de* f *que se cumpla* (22) *bajo las condiciones* $x_i x_j = 0$ *y* $x_i' x_j' = 0$ *para* $i \neq j$. *En particular, se obtendrían así consecuencias importantes sobre el problema de la extensión y sobre la descomposición de conjuntos en partes respectivamente equivalentes.*

Corolario 2. — Sean :

1. X *un subespacio lineal del espacio lineal real formado por las funciones reales acotadas sobre un conjunto no vacío* E.

2. ϱ *una relación en* X.

Una condición necesaria y suficiente para que exista un funcional lineal no decreciente M *sobre* X *que verifique :*

a) $M(x) \leq M(x')$ *cuando* $x \varrho x'$

y

b) $\inf \{x(t) \mid t \in E\} \leq M(x) \leq \sup \{x(t) \mid t \in E\}$ (10).,

es que para todo conjunto finito de ternas $(\alpha_i, x_i, x'_i) \in R^+ \times X \times X$ *con* $x_i \varrho x'_i$ $(1 \leq i \leq n)$ *se tenga*

$$\sup \left\{ \sum_1^n \alpha_i (x_i' - x_i)(t) \mid t \in E \right\} \geq 0 \tag{23.1}$$

o

$$\sup \left\{ \sum_1^n (x_i' - x_i)(t) \mid t \in E \right\} \geq 0. \tag{23.2}$$

---

(10) Este funcional lineal M es una *media* sobre X por satisfacer *b)*. Por consiguiente, este corolario se refiere a la existencia de medias sobre X con la propiedad *a)*.

OBSERVACIÓN 9. — *De este corolario se obtienen de manera inmediata los teoremas ya citados de* DIXMIER [1] *y* ROBISON [3] *cuando* ϱ *viene definida por un conjunto de transformaciones lineales de* X *en* X (11).

BIBLIOGRAFIA

[1] DIXMIER, J.: *Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications*. Acta Sci. Math. Szeged 12. Leopoldo Fejér et Frederico Riesz LXX annos natis dedicatis, Pars A (1950), 213-227.

[2] HEWITT, E. and K. A. ROSS : *Abstract Harmonic Analysis*. Berlin, Springer, 1963.

[3] ROBISON, G. B. : *Invariant integrals over a class of Banach spaces*. Pacific J. Math., 4 (1954) 123-150.

[4] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. : *Generalización sobre módulos del teorema de Hahn-Banach y sus aplicaciones*. Collect. Math., 14 (1962) 105-151.

[5] RODRÍGUEZ-SALINAS, B. : *El problema de la extensión*. Annali di Mat. pura ed appl., 64 (1964) 133-190.

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

(11) Véase, HEWITT y ROSS [2] págs. 231 y 237.