SULLE TRASFORMAZIONI FINITE DEI GRUPPI DELLE ROTAZIONI

G. ARCIDIACONO
(a Roma)

1. INTRODUZIONE

Le trasformazioni finite, del gruppo delle rotazioni in un S_n, possono essere construite a partire da una matrice antisimmetrica X, di ordine n, nel seguente modo:

$$\mathbf{x}' = e^X \mathbf{x} \tag{1,1}$$

dove gli $\binom{n}{2}$ elementi distinti della matrice X, sono detti *parametri canonici ortogonali* della trasformazione (1,1) e formano un tensore doppio antisimmetrico x_{ik} nello spazio S_n su cui opera il gruppo [1]. Tali parametri sono chiamati *canonici*, perché la trasformazione inversa della (1) può ottenersi cambiando semplicemente il segno della matrice X, e cioé ai suoi elementi, e risultano *ortogonali*, perché nella equazione caratteristica della matrice $X = [x_{ik}]$:

$$D(\alpha) = |X - \alpha I| = \sum_{s=0}^{n} b_s (-\alpha)^{n-s} = 0 \tag{1,2}$$

il coefficiente b_2 é dato dalla somma dei minori principali del 2.º ordine estratti dalla matrice X, e poiché X é antisimmetrica, risulta una somma di quadrati

$$b_2 = x_{12}^2 + x_{13}^2 + \cdots + x_{n-1,n}^2 \tag{1,3}$$

In un mio precedente lavoro [2], perfezionando un metodo proposto dal FANTAPPIÉ [3] per il calcolo della funzione di matrice

$$g(X) = g_0 I + g_1 X + \cdots + g_{n-1} X^{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} g_s X^s \tag{1,4}$$

ho dimostrato che la funzione $g(X)$ può anche svilupparsi cosí :

$$(1,5) \qquad g(X) = h_0 \Gamma_0 + h_1 \Gamma_1 + \cdots + h_{n-1} \Gamma_{n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} h_s \Gamma_s$$

dove le Γ_s sono delle matrici costruite a partire dalla matrice X. Accade allora che, mentre le successive potenze della matrice X, al crescere dell'esponente (cioé al crescere del numero n delle dimensioni dello spazio) diventano sempre più complicate e quindi poco adatte allo studio della funzione di matrice $g(X)$, le matrici Γ_s ed i relativi coefficienti h_s risultano molto più semplici, e ci consentono uno studio più agevole della funzione $g(X)$.

Nel precedente lavoro, adoperando questo mio metodo semplificato, ho calcolato esplicitamente le matrici Γ_s corrispondenti alle trasformazioni finite ed in parametri canonici ortogonali dei gruppi delle rotazioni degli spazi a tre, quattro, cinque dimensioni.

Lo studio di questi tre gruppi, risulta di utilità fisica, perché il gruppo R_3 delle rotazioni dello spazio a 3 dimensioni (a 3 parametri) é un sottogruppo del *gruppo di* GALILEO della fisica classica, il gruppo R_4 delle rotazioni di S_4 (a 6 parametri), ha dal punto di vista complesso, la stessa struttura del *gruppo di* LORENTZ ristretto della fisica relativistica, mentre il gruppo R_5 delle rotazioni di S_5 (a 10 parametri), ha la stessa struttura complessa del *gruppo di* FANTAPPIÉ [4].

In questa Memoria mi propongo di semplificare ulteriormente il precedente metodo per il calcolo delle matrici Γ_s e di applicarlo allo studio del gruppo delle rotazioni R_6 dello spazio a 6 dimensioni (a 15 parametri), il quale risulta isomorfo al *gruppo conforme,* utilizzato da vari Autori, per costruire una «relatività» di tipo conforme.

Nel gruppo, conforme intervengono anche i *movimenti uniformemente accelerati*, accanto a quelli uniformi che figurano nella relatività ristretta [5].

Tale studio ci consentirà di mettere in luce la struttura delle matrici Γ_s, le quali possono pure essere costruite in modo assai semplice utilizzando vari tensori antisimmetrici dedotti a partire dal tensore doppio antisimmetrico x_{ik}, le cui componenti sono gli $\binom{n}{2}$ parametri canonici ortogonali del gruppo delle rotazioni di S_n.

2. SVILUPPO DELLA $g(X)$ SECONDO LE MATRICI Γ_s

Richiamiamo brevemente, introducendo alcune semplificazioni, il metodo esposto nella precedente memoria [2].

Il FANTAPPIÉ [3] ha dimostrato la seguente formola che ci permette di calcolare la matrice $g(X)$:

$$g(X) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\Gamma(\alpha)}{D(\alpha)} g(\alpha)\, d\alpha \tag{2,1}$$

dove si é indicata con $\Gamma(\alpha)$ la *trasposta della aggiunta* della matrice $X - \alpha I$ e con $D(\alpha)$ il polinomio caratteristico (1,2).

La curva C di integrazione é poi una curva chiusa *(separatrice)* della sfera complessa, che lascia all'interno tutti i punti dove gli elementi della matrice $\Gamma(\alpha)/D(\alpha)$ sono singolari e lascia all'esterno tutti i punti singolari di $g(\alpha)$.

Se allora sviluppiamo la matrice $\Gamma(\alpha)$ secondo le successive potenze di α

$$\Gamma(\alpha) = \sum_{s=0}^{n-1} (-\alpha)^{n-s-1}\, \Gamma_s \tag{2,2}$$

veniamo ad introdurre n matrici Γ_s *i cui elementi sono polinomi omogenei di grado* s $(s = 0 \cdots n-1)$ *nei parametri canonici ortogonali* x_{sr}.

La (2,1) si può quindi scrivere così:

$$g(X) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=0}^{n-1} \Gamma_s \int_C \frac{(-\alpha)^{n-s-1} g(\alpha)\, d\alpha}{D(\alpha)} = \sum_{s=0}^{n-1} h_s \Gamma_s \tag{2,3}$$

dove si é posto

$$h_s = -\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{(-\alpha)^{n-s-1} g(\alpha)\, d\alpha}{D(\alpha)} \tag{2,4}$$

Ora, se l'equazione caratteristica (1,2) della matrice X ha le radici caratteristiche α_i, ciascuna di multiplicità k, avremo :

$$\frac{1}{D(\alpha)} = \sum_{i,k} \frac{c_{ik}}{(\alpha - \alpha_i)^{k+1}} \tag{2,5}$$

Sostituendo nella (2,4), e ricordando la formola di CAUCHY per il calcolo dei residui, otteniamo per le h_s la seguente espresione :

$$h_s = -\sum_{ik} \frac{c_{ik}}{k!} \left\{ (-\alpha)^{n-s-1} g(\alpha) \right\}^{(k)}_{\alpha = \alpha_i} \tag{2,6}$$

dove l'esponente k posto in parentesi, indica la derivazione *k-ma*.

In particolare se le radici sono tutte semplici, la formola precedente si riduce alla

$$\boxed{h_s = - \sum_i (-\alpha_i)^{n-s-1}\, g(\alpha_i)\, c_i} \tag{2,7}$$

Se vogliamo poi trovare il legame che passa tra le matrici Γ_s e la matrice X, basta osservare che *il prodotto di una matrice per la trasposta della sua aggiunta, dà la matrice* $D(\alpha) I$, cioé:

$$(X - \alpha I) \cdot \Gamma(\alpha) = D(\alpha) I$$

Tenendo conto delle (1,2) e (2,2) avremo

$$(X - \alpha I)\left(\sum_{s=0}^{n-1} (-\alpha)^{n-s-1} \Gamma_s\right) = (-\alpha)^n I + \sum_{s=0}^{n-1} b_{s+1} (-\alpha)^{n-s-1} I$$

Uguagliando i coefficienti della potenza $(-\alpha)^{n-s-1}$ otteniamo la formola ricorrente

$$\boxed{\Gamma_{s+1} = b_{s+1} I - X \Gamma_s} \tag{2,8}$$

mentre uguagliando i coefficienti della $(-\alpha)^n$ si deduce che

$$\Gamma_0 = I \tag{2,9}$$

e queste due ultime formole ci permettono di costruire le matrici Γ_s una volta nota la matrice X.

3. SEMPLIFICAZIONI DEL CALCOLO DELLE MATRICI Γ_s

Sebbene le considerazioni svolte nel precedente paragrafo valgano per una generica funzione di una qualunque matrice X, quì studieremo le matrici Γ_s nel caso più semplice in cui la matrice X risulta antisimmetrica e la funzione di matrice sia del tipo particolare $g(X) = e^X$.

Nella equazione caratteristica della matrice X, data dalla (1,2), i coefficienti b_s sono le somme dei minori principali di ordine s estratti dalla matrice X [6]. E siccome ogni determinante di una matrice antisimmetrica di ordine dispari é nullo, se ne deduce che

$$b_{2s+1} = 0 \tag{3,1}$$

In conseguenza, applicando le (2,8) e (2,9), otteniamo le seguenti espressioni esplicite delle matrici Γ_s:

$$(3,2) \qquad \begin{cases} \Gamma_0 = I \\ -\Gamma_1 = X \\ \Gamma_2 = X^2 + b_2 I \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Gamma_3 = X^3 + b_2 X \\ \Gamma_4 = X^4 + b_2 X^2 + b_4 I \\ \cdots\cdots \\ \Gamma_n = 0 \end{cases}$$

La matrice Γ_n é identicamente nulla per il teorema di CAYLEY-HAMILTON, secondo cui « una matrice X soddisfa alla sua equazione caratteristica ».

Utilizzando questi risultati, ho calcolato esplicitamente le matrici Γ_s ed i coefficienti h_s relativi ai gruppi delle rotazioni negli spazi a tre, quattro e cinque dimensioni. Tuttavia, non appena si voglia estendere lo studio al caso del gruppo delle rotazioni dello spazio a 6 dimensioni ($n = 6$), il calcolo delle matrici Γ_s risulta di nuovo molto complicatto e laborioso. Occorre quindi introdurre delle nuove semplificazioni che permettano di ridurre al massimo i calcoli.

A questo scopo osserviamo che essendo $\Gamma_n = 0$ ed avendosi d'altra parte, in base all (2,8) $\Gamma_n = b_n I - X \Gamma_{n-1}$ risulta:

$$(3,3) \qquad b_n I - X \Gamma_{n-1} = 0$$

Nel caso in cui n é *dispari*, $b_n = 0$ e quindi:

$$(3,4) \qquad X \Gamma_{n-1} = 0$$

Se invece n é *pari*, otteniamo

$$(3,5) \qquad X \Gamma_{n-1} = b_n I$$

Dalla (3,4) non é possibile ricavare Γ_{n-1}, perché la matrice X (antisimmetrica di ordine dispari) é *singolare*, cioé a determinante nullo.

Invece, nel caso in cui n é pari, la (3,5) ci fornisce subito:

$$(3,6) \qquad \Gamma_{n-1} = b_n X^{-1}$$

ed applicando la (2,8) si ricava pure che

$$(3,7) \qquad \Gamma_{n-2} = - X^{-1} \Gamma_{n-1} = - b_n (X^{-1})^2$$

Ora, il calcolo della matrice X^{-1} risulta particolarmente semplice, se applichiamo opportunamente le proprietà dei determinanti antisimmetrici.

Intanto, essendo X di ordine pari, il suo aggiunto sarà pure antisimmetrico; inoltre il det X é il quadrato di una funzione razionale intera dei suoi elementi

$$(3,8) \qquad |X| = |x_{ik}| = (x_{12}\sqrt{X_{22}} + x_{13}\sqrt{X_{33}} + \cdots + x_{1n}\sqrt{X_{nn}})^2$$

dove si sono indicati con X_{ii} i complementi algebrici degli x_{ii}, e la espressione entro parentesi é il cosiddetto «pfaffiano» della matrice antisimmetrica X.

Una ulteriore semplificazione nel calcolo di X^{-1} si ottiene poi tenendo presente che *ogni minore di ordine n-*1 *estratto da una matrice antisimmetrica di ordine pari X, é divisibile per il corrispondente pfaffiano*, il quale quindi non é altro che il massimo comun divisore dei complementi algebrici di X.

In tal modo le ultime due matrici Γ_n e Γ_{n-1} difficili da ottenere tramite le (3,2), possono essere facilmente calcolate tenendo conto delle (3,6) e (3,7).

4. CALCOLO DELLE TRASFORMAZIONI FINITE, IN PARAMETRI CANONICI ORTOGONALI, DEL GRUPPO DELLE ROTAZIONI DI S_6

Il gruppo delle rotazioni dello spazio a 6 dimensioni, ha 15 parametri. Indicheremo con r_1, r_2, r_3 i tre parametri canonici ortogonali della rotazione spaziale, con v_1, v_2, v_3 quelli del trascinamento, con t_1, t_2, t_3 i parametri della traslazione nello spazio e con t_0 quello della traslazione nel tempo. I rimanenti 5 parametri corrispondono, come é noto [5], rispettivamente alla accelerazione spaziale (a_1, a_2, a_3), alla componente temporale della accelerazione (a_0) ed alla dilatazione (d_0).

In conseguenza, la matrice infinitesima del gruppo delle rotazioni dello spazio a 6 dimensioni, darà data da :

$$(4,1) \qquad X = \left[\begin{array}{ccc|c|c|c} 0 & r_3 & -r_2 & v_1 & -t_1 & a_1 \\ -r_3 & 0 & r_1 & v_2 & -t_2 & a_2 \\ r_2 & -r_1 & 0 & v_3 & -t_3 & a_3 \\ \hline -v_1 & -v_2 & -v_3 & 0 & -t_0 & a_0 \\ \hline t_1 & t_2 & t_3 & t_0 & 0 & d_0 \\ \hline -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_0 & -d_0 & 0 \end{array}\right]$$

cui corrisponde la seguente equazione caratteristica:

$$(4,2) \qquad D(\alpha) = |X - \alpha I| = \alpha^6 + b_2 \alpha^4 + b_4 \alpha^2 + b_6 = 0$$

con:

$$(4,3) \qquad \begin{cases} b_2 = r^2 + v^2 + t^2 + t_0^2 + a^2 + a_0^2 + d_0^2 \\ b_4 = (\mathbf{v} \times \mathbf{r})^2 + (t_0\,\mathbf{r} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{v})^2 + (\mathbf{t} \times \mathbf{r})^2 + (a_0\,\mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{v})^2 + \\ \qquad + (d_0\,\mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{t})^2 + (\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2 + (t_0\,\mathbf{a} + a_0\,\mathbf{t} + d_0\,\mathbf{v})^2 \\ b_6 = [t_0\,(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + a_0\,(\mathbf{r} \times \mathbf{t}) + d_0\,(\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{a} \wedge \mathbf{t})]^2 \end{cases}$$

Le trasformazioni finite, in parametri canonici ortogonali del gruppo delle rotazioni di S_6 sono espresse dalla (1,1), con

$$(4,4) \qquad e^X = h_0\,\Gamma_0 + h_1\,\Gamma_1 + h_2\,\Gamma_2 + h_3\,\Gamma_3 + h_4\,\Gamma_4 + h_5\,\Gamma_5$$

dove i coefficienti h_s sono dati dalle (2,7), mentre le matrici Γ_s possono essere calcolate applicando quanto si é detto al n.° 3, mediante fe seguenti formole:

$$(4,5) \qquad \begin{cases} \Gamma_0 = I;\ \Gamma_1 = -X\,\Gamma_2 = X^2 + b_2 I;\ \Gamma_3 = X\Gamma_2 \\ \Gamma_4 = -\,b_6\,(X^{-1})^2\,;\ \Gamma_5 = b_6\,X^{-1}\,;\ \Gamma_6 = 0 \end{cases}$$

La matrice Γ_2 é simmetrica, ed i suoi elementi risultano, a calcoli atti, i seguenti ($i,\ k = 1,\ 2,\ 3$):

$$(4.6) \qquad \begin{cases} (\Gamma_2)_{ik} = (v^2+t^2+t_0^2+a^2+a_0^2+d_0^2)\delta_{ik}+r_i r_k - v_i v_k - t_i t_k - a_i a_k \\ -\,(\Gamma_2)_{i4} = \mathbf{r} \wedge \mathbf{v} + t_0\,\mathbf{t} + a_0\,\mathbf{a}\,;\ (\Gamma_2)_{44} = r^2 + t^2 + a^2 + d_0^2 \\ -\,(\Gamma_2)_{i5} = \mathbf{t} \wedge \mathbf{r} + t_0\,\mathbf{v} + d_0\,\mathbf{a}\,;\ (\Gamma_2)_{55} = r^2 + v^2 + a^2 + a_0^2 \\ -\,(\Gamma_2)_{i6} = d_0\,\mathbf{t} - a_0\,\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{a}\,;\ (\Gamma_2)_{66} = r^2 + v^2 + t^2 + t_0^2 \\ (\Gamma_2)_{45} = \mathbf{v} \times \mathbf{t} - a_0\,d_0\,;\ (\Gamma_2)_{46} = -\,\mathbf{a} \times \mathbf{v} - t_0\,d_0 \\ (\Gamma_2)_{56} = \mathbf{t} \times \mathbf{a} + t_0\,a_0 \end{cases}$$

La matrice Γ_3 é invece antisimmetrica ed i suoi elementi sono:

$$(4,7) \qquad \begin{cases} (\Gamma_3)^*_{ik} = t_0(t_0\,\mathbf{r} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{v}) + a_0\,(a_0\,\mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{v}) + d_0\,(d_0\,\mathbf{r} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{a}) \\ \qquad + \mathbf{t} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \\ (\Gamma_3)_{i4} = t_0(d_0\,\mathbf{a} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{t}) + a_0\,(d_0\,\mathbf{t} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) + \mathbf{v} \cdot (t^2 + a^2 + a_0^2) \\ \qquad + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) - \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{t}) - \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \\ (\Gamma_3)_{i5} = t_0\,(a_0\,\mathbf{a} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) + d_0(a_0\,\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) - \mathbf{t}\,(v^2 + a^2 + a_0^2) \\ \qquad + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{t}) + \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{t}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{t}) \\ (\Gamma_3)_{i6} = a_0\,(t_0\,\mathbf{t} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{v}) + d_0\,(t_0\,\mathbf{v} + \mathbf{r} \wedge \mathbf{t}) + \mathbf{a}\,(v^2 + t^2 + t_0^2) \\ \qquad + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) + \mathbf{t}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{t}) \\ (\Gamma_3)_{45} = d_0\,(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) + a_0\,(\mathbf{a} \times \mathbf{t}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \wedge \mathbf{t}) - t_0\,(a^2 + r^2) \\ (\Gamma_3)_{46} = d_0\,(\mathbf{v} \times \mathbf{t}) - t_0\,(\mathbf{a} \times \mathbf{t}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{r} \wedge \mathbf{a}) + a_0\,(r^2 + t^2) \\ (\Gamma_3)_{56} = t_0\,(\mathbf{a} \times \mathbf{v}) + a_0\,(\mathbf{r} \times \mathbf{t}) + \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \wedge \mathbf{t}) - d_0\,(r^2 + v^2) \end{cases}$$

Per il calcolo di Γ_4 e di Γ_5 occorre valutare la matrice X^{-1}, cosa che si fa calcolando la matrice « aggiunta » di X (formata cioé dai complementi algebrici di x_{ik}) e poi prendendo la trasposta di tale matrice divisa per il determinante di X.

Ora, in base alla (3,8), si ha

$$\text{(4,8)} \qquad det\, X = (x_{12} \sqrt{X_{22}} + x_{13} \sqrt{X_{33}} + \ldots + x_{16} \sqrt{X_{66}})^2 = b_6$$

e la $\sqrt{b_6}$ é il «pfaffiano » della matrice X.

Possiamo quindi scrivere

$$\text{(4,9)} \qquad \Gamma_5 = b_6\, X^{-1} = b_6 \cdot \frac{\sqrt{b_6}}{b_6}\, \bar{\Gamma}_2 = \sqrt{b_6}\, \bar{\Gamma}_2$$

dove si é indicata con $\bar{\Gamma}_2$ la matrice (i cui elementi sono polinomi dil 2.° grado) ottenuta dividendo l'aggiunta della trasposta di X per il relativo pfaffiano $\sqrt{b_6}$.

La matrice $\bar{\Gamma}_2$ risulta antisimmetrica, ed i suoi elementi si calcolano facilmente. Essi sono:

$$\text{(4,10)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_2)_{ik} = a_0\, \mathbf{t} + d_0\, \mathbf{v} - t_0\, \mathbf{a} = \vec{\varrho} \\ (\bar{\Gamma}_2)_{i4} = d_0\, \mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{t} = \vec{\nu} \\ (\bar{\Gamma}_2)_{i5} = a_0\, \mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{v} = \vec{\tau} \\ (\bar{\Gamma}_2)_{i6} = t_0\, \mathbf{r} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{t} = \vec{\alpha} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} (\bar{\Gamma}_2)_{45} = \mathbf{a} \times \mathbf{r} = \tau_0 \\ (\bar{\Gamma}_2)_{46} = \mathbf{t} \times \mathbf{r} = \alpha_0 \\ (\bar{\Gamma}_2)_{56} = \mathbf{v} \times \mathbf{r} = \delta_0 \end{array} \right.$$

dopo di che, la matrice Γ_4 si calcola subito. Si ha infatti

$$\text{(4,11)} \qquad \Gamma_4 = -\, b_6\, (X^{-1})^2 = -\, b_6 \left(\frac{\sqrt{b_6}}{b_6}\, \bar{\Gamma}_2 \right)^2 = -\, \bar{\Gamma}_2{}^2$$

Tale matrice risulta simmetrica, coi seguenti elementi:

$$(\Gamma_4)_{ik}^{*} = \varrho^2\, \delta_{ik} - \varrho_i\, \varrho_k - \nu_i\, \nu_k - \tau_i\, \tau_k - \alpha_i\, \alpha_k$$

$$\text{(4,11)} \quad \left\{ \begin{array}{r} (\Gamma_4)_{i4} = -\, \alpha_0\, \vec{\alpha} - \tau_0\, \vec{\tau} + \vec{\varrho} \wedge \vec{\nu} \\ -\, (\Gamma_4)_{i5} = \tau_0\, \vec{\nu} + \delta_0\, \vec{\alpha} + \vec{\varrho} \wedge \vec{\tau} \\ -\, (\Gamma_4)_{i6} = \delta_0\, \vec{\tau} - \alpha_0\, \vec{\nu} + \vec{\varrho} \wedge \vec{\alpha} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} -\, (\Gamma_4)_{44} = \nu^2 + \tau_0{}^2 + \alpha_0{}^2 \\ -\, (\Gamma_4)_{55} = \tau^2 + \tau_0{}^2 + \delta_0{}^2 \\ -\, (\Gamma_4)_{66} = \alpha^2 + \alpha_0{}^2 + \delta_0{}^2 \end{array} \right.$$

$$(\Gamma_4)_{45} = \vec{\nu} \times \vec{\tau} - \alpha_0\, \delta_0\, ; \quad (\Gamma_4)_{46} = -\, \vec{\alpha} \times \vec{\nu} - \delta_0\, \tau_0 .$$

$$(\Gamma_4)_{56} = \vec{\alpha} \times \vec{\tau} + \alpha_0\, \tau_0$$

La matrice Γ_4 ha quindi una struttura simile a quella della matrice Γ_2.

Abbiamo così scritto esplicitamente le 6 matrici che intervengono nello sviluppo della funzione di matrice e^X, la quale ci dà tramite la (4,4) le trasformazioni finite, in parametri canonici ortogonali, del gruppo delle rotazioni dello spazio a 6 dimensioni.

Se nelle matrici ottenute poniamo $\mathbf{a} = 0$, $a_0 = 0$, $d_0 = 0$ otteniamo le matrici relative al gruppo delle rotazioni di S_5; ponendo ancora $\mathbf{t} = 0$, $t_0 = 0$, otteniamo le matrici del gruppo delle rotazioni di S_4, ed infine, per $\mathbf{v} = 0$ ricadiamo nelle matrici del gruppo delle rotazioni di S_3 che ho calcolato nella memoria [2].

5. TENSORI ANTISIMMETRICI E GRUPPI DELLE ROTAZIONI

Abbiamo visto che i parametri canonici del gruppo delle rotazioni dello spazio ad n dimensioni, in numero di $\binom{n}{2}$, formano un tensore doppio antisimmetrico x_{ik} dello spazio S_n su cui opera il gruppo. A partire da tale tensore x_{ik} si possono costruire dei tensori antisimmetricimedi vario tipo. Accade allora il fatto interessante che le matrici Γ_s da noi introdotte, si lasciano esprimere in modo assai semplice tramite tali tensori.

Distingueremo il caso in cui n é pari da quello in cui é dispari.

I CASO. *n dispari, cioé $n = 2\nu + 1$*

Posto

$$(5,1) \qquad N_s = \frac{(s+1)\ldots 2s}{2^s} = \frac{(2s)!}{s!\,.\,2^s} \quad (s = 1, 2 \ldots \nu)$$

é possibile costruire i seguenti tensori antisimmetrici di rango pari, a partire dal tensore x_{ik} (il numero entro parentesi indica il grado dei polinomi con cui vengono espresse le componenti del tensore):

$$(5,2) \qquad \begin{cases} y^{(1)}_{ik} = x_{ik}\,; \; y^{(2)}_{i_1 k_1 i_2 k_2} = N_2 \; x_{[i_1 k_1} \; x_{i_2 k_2]} \\ y^{(3)}_{i_1 k_1 i_2 k_2 i_3 k_3} = N_3 \; x_{[i_1 k_1} \; x_{i_2 k_2} \; x_{i_3 k_3]} \end{cases}$$

ed in generale:

$$(5,3) \qquad y^{(s)}_{i_1 k_1 i_2 k_2 \ldots i_s k_s} = N_s \; x_{[i_1 k_1} \; x_{i_2 k_2} \ldots x_{i_s k_s]}$$

da questi tensori antisimmetrici di rango pari si possono ricavare altri tensori di rango dispari, nel seguente modo

$$(5,4) \qquad \bar{y}^{(s)}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-2s}} = \eta^{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-2s}\, i_1 k_1 i_2 k_2 \dots i_s k_s}\, y^{(s)}_{i_1 k_1 \dots i_s k_s}$$

dove si é indicato con $\eta^{i_1 i_2 \dots i_n}$ il tensore di RICCI.

2.° CASO. *n pari, cioé* $n = 2\nu$

In questo caso, i tensori (5,3) sono tutti di rango pari, mentre col tensore di RICCI si ricaveranno altri tensori antisimmetrici, ancora di rango pari, ed uno scalare

$$(5,5) \qquad \bar{y}^{(\nu)}_0 = \eta^{i_1 k_1 i_2 k_2 \dots i_\nu k_\nu}\, y^{(\nu)}_{i_1 k_1 i_2 k_2 \dots i_\nu k_\nu}$$

Fatta questa premessa vediamo in che modo le matrici Γ_s possono essere espresse tramite i tensori (5,3) e (5,4) costruiti a partire dal tensore doppio antisimmetrico x_{ik}.

1.° *Gruppo delle rotazioni dello spazio a* 3 *dimensioni* ($n = 3$)

In questo caso, con riferimento a quanto detto nella memoria [2], la matrice X é la seguente:

$$(5,6) \qquad X = \begin{bmatrix} 0 & r_3 & -r_2 \\ -r_3 & 0 & r_1 \\ r_2 & -r_1 & 0 \end{bmatrix} = [x_{ik}]$$

cui corrisponde la equazione caratteristica

$$(5,7) \qquad D(\alpha) = -\alpha^3 - b_2\, \alpha = 0$$

con

$$(5,8) \qquad b_2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 + r_3{}^2 = r^2$$

e si verifica che le tre matrici Γ_s sono date da:

$$(5,9) \qquad \boxed{\Gamma_0 = [\delta_{ik}]\,;\ \Gamma_1 = -[y^{(1)}_{ik}]\,;\ \Gamma_2 = [\bar{y}^{(1)}_i\, \bar{y}^{(1)}_k]}$$

con $\qquad y^{(1)}_{ik} = x_{ik}\,;\ \bar{y}^{(1)}_i = r_i$

2.° *Gruppo delle rotazioni nello spazio a* 4 *dimensioni* ($n = 4$)

Alla matrice X

$$(5,10) \qquad X = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & r_3 & -r_2 & v_1 \\ -r_3 & 0 & r_1 & v_2 \\ r_2 & -r_1 & 0 & v_3 \\ \hline -v_1 & -v_2 & -v_3 & 0 \end{array}\right]$$

corrisponde la equazione caratteristica

$$D(\alpha) = \alpha^4 + b_2 \alpha^2 + b_4 \tag{5,11}$$

nella quale

$$b_2 = r^2 + v^2 ; \; b_4 = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2 \tag{5,12}$$

Le matrici Γ_s risultano avere la seguente struttura

$$\boxed{\begin{array}{c} \Gamma_0 = [\delta_{ik}] ; \; \Gamma_1 = - [y_{ik}^{(1)}] \\ \Gamma_2 = [\overline{y}_{ir}^{(1)} \; y_{kr}^{(1)}] ; \; \Gamma_3 = y_0^{(2)} \; [\overline{y}_{ik}^{(1)}] \end{array}} \tag{5,13}$$

e lo scalare $y_0^{(2)} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ non é altro che lo pfaffiano della matrice X.

3.º *Gruppo delle rotazioni nello spazio a 5 dimensioni* ($n = 5$)

La matrice X

$$X = \left[\begin{array}{ccc|c|c} 0 & r_3 & -r_2 & v_1 & -t_1 \\ -r_3 & 0 & r_1 & v_2 & -t_2 \\ r_2 & -r_1 & 0 & v_3 & -t_3 \\ \hline -v_1 & -v_2 & -v_3 & 0 & -t_0 \\ \hline t_1 & t_2 & t_3 & t_0 & 0 \end{array}\right] \tag{5,14}$$

ha per equazione caratteristica

$$D(\alpha) = -\alpha^5 - b_2 \alpha^3 - b_4 \alpha = 0 \tag{5,15}$$

con

$$\begin{cases} b_2 = r^2 + v^2 + t^2 + t_0^2 \\ b_4 = (\mathbf{r} \times \mathbf{v})^2 + (\mathbf{r} \times \mathbf{t})^2 + (t_0 \, \mathbf{r} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{v})^2 \end{cases} \tag{5,16}$$

e le cinque matrici Γ_s si possono scrivere nel seguente modo

$$\boxed{\begin{array}{c} \Gamma_0 = [\delta_{ik}] ; \; \Gamma_1 = - [y_{ik}^{(1)}] \\ \Gamma_2 = [\overline{y}_{irs}^{(1)} \, \overline{y}_{krs}^{(1)}] ; \; \Gamma_3 = [\overline{y}_r^{(2)} \; \overline{y}_{rik}^{(1)}] \\ \Gamma_4 = [\overline{y}_i^{(2)} \; \overline{y}_k^{(2)}] \end{array}} \tag{5,17}$$

dove il vettore $y_i^{(2)}$ ha per componenti ($\alpha = 1, 2, 3$)

$$\overline{y}_\alpha^{(2)} = t_0 \, \mathbf{r} + \mathbf{t} \wedge \mathbf{v} ; \; \overline{y}_4^{(2)} = \mathbf{r} \times \mathbf{t} ; \; \overline{y}_5^{(2)} = \mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{5,18}$$

4.° *Gruppo delle rotazioni dello spazio a 6 dimensioni* ($n = 6$)

Per quanto si é detto al n.° 4 e tenendo conto dei risultati precedenti, si verifica che le 6 matrici Γ_s possono scriversi così

$$\boxed{\begin{gathered} \Gamma_0 = [\delta_{ik}] \,;\; \Gamma_1 = -\,[y^{(1)}_{ik}] \\ \Gamma_2 = [\overline{y}^{(1)}_{irst}\ \overline{y}^{(1)}_{krst}] \,;\; \Gamma_3 = [\overline{y}^{(2)}_{rs}\ \overline{y}^{(1)}_{rsik}] \\ \Gamma_4 = [\overline{y}^{(2)}_{is}\ \overline{y}^{(2)}_{ks}] \,;\; \Gamma_5 = \overline{y}^{(3)}_{0}\ [\overline{y}^{(2)}_{ik}] \end{gathered}} \tag{5,19}$$

e da tali espressioni si vede subito che esse risultano alternativamente simmetriche ed antisimmetriche. Lo scalare $\overline{y}^{(3)}_0$ non é altro che lo pfaffiano della matrice X.

Se esaminiamo allora la struttura delle matrici Γ_s, espresse in funzione dei tensori antisimmetrici che si possono estrarre dal tensore x_{ik}, é facile scrivere le seguenti formole generali, che abbiamo controllato per $n = 1, 2 \ldots 6$, ma che riteniamo possano valere anche per n qualunque :

$$\boxed{\begin{gathered} \Gamma_0 = [\delta_{i\lambda}] \,;\; \Gamma_1 = -\,[\overline{y}^{(1)}_{ik}] \\ \Gamma_{2s} = [\overline{y}^{(s)}_{i\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-2s-1}}\ \overline{y}^{(s)}_{k\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-2s-1}}] \\ \Gamma_{2s-1} = [\overline{y}^{(s+1)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-2s-2}}\ \overline{y}^{(s)}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-2s-2}ik}] \\ \Gamma_n = 0 \quad (s = 1,\, 2 \ldots \nu) \end{gathered}} \tag{5,20}$$

Otteniamo in tal modo una semplice espressione esplicita delle matrici Γ_s con le quali é possibile sviluppare una generica funzione di matrice

$$g(X) = \sum_{s=0}^{n-1} g_s\, \Gamma_s \tag{5,21}$$

nel caso in cui la matrice X risulta antisimmetrica.

NOTE E BIBLIOGRAFIA

(1) E. CARTAN, *Leçons sur la théorie des spineurs*, vol. I, Actualité Scientifiques, n.º 643, París, Hermann, 1938.

(2) G. ARCIDIACONO, *Sui gruppi ortogonali negli spazi a tre, quattro, cinque dimensioni*. Portugaliae Mathematica, vol. 14, fasc. 2, 1955.

(3) L. FANTAPPIE, *Sulle funzioni di una matrice*, Anais da Academia Brasileira de ciências, n.º 1, *26* (1954).

(4) L. FANTAPPIE, *Su una nuova teoria di relatività finale*, Rend. Acc. Lincei, ser 8º, vol. 17, fasc. 5 (1954) ; G. ARCIDIACONO, *La relatività di Fantappié*, Collectanea Mathematica, vol. X, fasc. 2 (1958).

(5) E. PAGE, *A new Relativity*, Phys. Rev. *49*, 254 (1936) ; H. HILL- *On accelerate systems in classical and relativistic Mechanics*, Phys. Rev. *67*, 358, (1945) ; YASUHISA MURAI, *On the group transformations in six dimensional space*. Progr. Theor. Physics, vol. II genn-giugno 1954; R. L. INGRAHAM- *Conformal relativity*, Nuovo Cimento, *9*, 886 (1952); R. L. INGRAHAM-*Conformal geometry and Elementary Particles*, Nuovo Cimento, *12*, 825, (1954) ; VACHASPATI BALI, L. M., *Definition of uniform acceleration and its conformal invariance, Nuovo Cimento* (10), *21*, pagg. 442-458 (1961).

(6) FRANZ E. HOHN, *Elementary matrix algebra*, New York, McMillan Company, 1952, pag. 215.