CARACTERIZACION DE FUNCIONES REPRESENTABLES POR LA TRANSFORMACION GENERALIZADA DE WHITTAKER

por

JUAN JOSÉ GUTIÉRREZ SUÁREZ

RESUMEN

El objeto de este trabajo es dar unas condiciones necesarias y suficientes que debe cumplir una función para que sea representable mediante la Transformación Generalizada de Whittaker.

Elegimos esta transformación por comprender a las de Meijer Generalizada de Laplace, Integro-Exponencial, Transformación de Laplace y transformación de Laplace con exponente complejo, con lo que quedan establecidas dichas condiciones para todas las transformaciones citadas.

INTRODUCCION

En un trabajo anterior (1) hemos introducido la transformación

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-\frac{zt}{2}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1, \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}(zt)\, (zt)^{\frac{\beta}{2}-\gamma-1} \alpha(t)dt \qquad [1]$$

que designamos con el nombre de Transformación Generalizada de Whittaker por tener en su función asociada la función de Whittaker y comprender para ciertos valores de los parámetros α, β y γ a las transformaciones de Meijer, Generalizada de Laplace, Integro-Exponencial y de Laplace. Siendo para $t \to 0$

$$W_{k,m}(t) = O(t^{\pm m + \frac{1}{2}})$$

$$\text{y para } t \to \infty, \; W_{k,m}(t) = e^{-t/2} t^k \left[1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right]$$

la integral converge para $R(\beta - \gamma) > 0$ y $R(1 - \gamma) > 0$.

Es nuestro objeto dar las condiciones necesarias y suficientes para que una función $f(z)$ sea representable por la transformación Generalizada de Whittaker, mediante la definición de un operador, siguiendo la pauta de un trabajo de Saksena (2) que resuelve análogo problema para la transformación generalizada de Laplace.

Definimos el operador

$$V_q \left[f(u) \right] = \frac{u^{-1}\, q^{\alpha+\gamma-\beta+1}}{\Gamma(q+1)} \left[U_q \left[f(z) \right] \right]_{z=q/u} \qquad [2]$$

en donde $q = 1, 2, \ldots$ y

$$U_q [f(z)] = (-1)^q z^{\alpha-\gamma-2-q} D^q [z^{\gamma+2-\alpha} f(z)]$$

$$\text{siendo } D \equiv x^2 \frac{d}{dx} (q = 0, 1, 2, \ldots)$$

y demostramos los dos lemas siguientes:

LEMA I. Si $\alpha(t)$ es una función real o compleja definida sobre el semieje real $(0 \leq t < +\infty)$ y tal que sobre todo él se pueda acotar de la forma

$$|\alpha(t)| < M\, M(t)$$

siendo M independiente de t, y $M(t) \geq 0$ una función no negativa y no decreciente

$$(0 \leq M(t) \leq M(t')) \; ; \; (0 \leq t < t')$$

Si existe además una función uniforme no negativa $\chi = \chi(\varphi)$ finita o infinita $0 \leq \chi \leq +\infty$ tal que esté relacionada con la función e^{-t} por la condición $M(\chi t) \; e^{-e^{\varphi i}t} = o(t^{-p})$ [3] para todo $p > 0$ y uniformemente respecto a φ dentro de cualquier ángulo contorneado $|\varphi| \leq \delta' < \frac{\pi}{2}$

Se verifica entonces que

$$F_q(z) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{zt}{2}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1+q,\, \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}(zt)\, (zt)^{\frac{\beta}{2}-\gamma-1} \alpha(t)\, dt \qquad [4]$$

con $q \geq 0$, define una función holomorfa en $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\varrho \geq a > \frac{1}{\chi}$ siendo

$$U_q [f(z)] = F_q(z)$$

DEMOSTRACIÓN.—Teniendo en cuenta la desigualdad

$$\left| e^{-\frac{t}{2}} W_{k,m}(t) \right| \leq \left| e^{-t} t^{k} \right| \qquad [5]$$

y las hipótesis del lema I, tendremos:

$$\left| e^{-\frac{zt}{2}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1+q,\ \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}(zt)\ (zt)^{\frac{\beta}{2}-\gamma-1} \alpha(t) \right| \leq$$

$$\leq \left| e^{-zt} (zt)^{\beta-\alpha-\gamma+q} \alpha(t) \right| < M \left| e^{-zt} (zt)^{\beta-\alpha-\gamma+q} M(t) \right| \leq$$

$$\leq M \left| M(\varrho \chi t)\, e^{-zt} (zt)^{\beta-\alpha-\gamma+q} \right| \leq$$

$$\leq M_1 (\varrho t)^{-p+R(\beta-\alpha-\gamma+q)} \leq M_1 (at)^{-p+R(\beta-\alpha-\gamma+q)}$$

si es $\varrho \geq a > \dfrac{1}{\chi}$ y $t\varrho > H(1, p, \delta')$ es decir, desde $t > \dfrac{H}{a}$. Por consiguiente las integrales [4] convergen absoluta y uniformemente en todo ángulo $|\varphi| \leq \delta' < \pi/2$ excluyendo un entorno del origen $|z| < a$ de amplitud $a > \dfrac{1}{\chi}$, es decir, para $\varrho \geq a > \dfrac{1}{\chi}$ Aplicando el operador U_q a la función $f(z)$ definida mediante la transformación generalizada de Whittaker [1], teniendo en cuenta que podemos derivar debajo del signo integral, y usando la relación

$$z^2 \frac{d}{dz}\left[e^{-\frac{z}{2}} W_{k,m}(z) z^{k} \right] = -e^{-\frac{z}{2}} W_{k+1,m}(z)\,(z)^{k+1} \qquad [6]$$

fácilmente encontramos

$$U_q[f(z)] = \int_0^{\infty} e^{-\frac{zt}{2}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1+q,\ \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}(zt)\ (zt)^{\frac{\beta}{2}-\gamma-1} \alpha(t)\,dt \qquad [7]$$

LEMA II.—Para casi todos los valores positivos de u se verifica

$$\lim_{q\to\infty} V_q[f(u)] = \alpha(u)$$

DEMOSTRACIÓN.—En efecto, en virtud del lema I, será

$$V_q[f(u)] = \frac{u^{-1} q^{\alpha+\gamma-\beta+1}}{\Gamma(q+1)} \Big[U_q[f(z)] \Big]_{z=\frac{q}{u}} =$$

$$= \frac{u^{-1} q^{\alpha+\gamma-\beta+1}}{\Gamma(q+1)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{qt}{2u}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1+q,\ \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{qt}{u}\right) \left(\frac{qt}{u}\right)^{\frac{\beta}{2}-1-\gamma} \alpha(t)\,dt$$

Teniendo ahora en cuenta el comportamiento asintónico de la función de Whittaker (3) pág. 343, que establece $W_{k,m}(t) \sim e^{-t/2}\, t^k$ para $t \to \infty$ válida para $|\arg t| < \pi$ y la convergencia uniforme de las integrales [4] y del paso al límite respecto a la variable de integración en cada intervalo finito (O, T) tendremos

$$\lim_{q\to\infty} V_q\,[f(u)] =$$

$$= \lim_{q\to\infty} \frac{u^{-1}\, q^{\alpha+\gamma-\beta+1}}{\Gamma(q+1)} \int_0^\infty e^{-\frac{qt}{2u}}\, W_{k+q,\,m}\left(\frac{qt}{u}\right)\left(\frac{qt}{u}\right)^{\frac{\beta}{2}-1-\gamma} \alpha(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \lim_{q\to\infty} \frac{u^{-1}\, q^{\alpha+\gamma-\beta+1}}{\Gamma(q+1)}\, e^{-\frac{qt}{2u}}\, W_{k+q,\,m}\left(\frac{qt}{u}\right)\left(\frac{qt}{u}\right)^{\frac{\beta}{2}-1-\gamma} \alpha(t)\, dt =$$

$$= \lim_{q\to\infty} \frac{u^{-1}\, q^{\alpha+\gamma-\beta+1}}{\Gamma(q+1)} \int_0^\infty e^{-\frac{qt}{u}} \left(\frac{qt}{u}\right)^{\beta-\alpha-\gamma+q} \alpha(t)\, dt =$$

$$= \lim_{q\to\infty} \frac{q^{q+1}}{\Gamma(q+1)\, u^{q+1}\, u^{\beta-\alpha-\gamma}} \int_0^\infty e^{-\frac{qt}{u}}\, t^q\, \Phi(t)\, dt$$

con $\Phi(t) = t^{\beta-\alpha-\gamma}\,\alpha(t)$; $K = \dfrac{\beta}{2} - \alpha + 1$ y $m = \dfrac{\beta}{2} - \dfrac{1}{2}$.

Pero $\Phi(t)$ cumple con las siguientes condiciones:

a) Es evidente que $\Phi(t) = t^{\beta-\alpha-\gamma}\,\alpha(t)$ es integrable. en $(R^{-1} \le t \le R)$ para cada $R > 1$.

b) $$\int_1^\infty e^{-ct}\, t^{\beta-\alpha-\gamma}\,\alpha(t)\, dt \text{ converge para un } c > 0.$$

En efecto, la función subintegral la podemos acotar como sigue:

$$|\, t^{\beta-\alpha-\gamma}\,\alpha(t)\, e^{-ct}\,| < M\,|\, t^{\beta-\alpha-\gamma}\, M(t)\, e^{-ct}\,| \le$$
$$\le M\,|\, t^{\beta-\alpha-\gamma}\, M(c\,\chi\, t)\, e^{-ct}\,|$$

para $c \ge a > \dfrac{1}{\chi} > 0$ y por último

$$M\,|\, t^{\beta-\alpha-\gamma}\, M(c\,\chi\, t)\, e^{-ct}\,| < M\,|\, t^{\beta-\alpha-\gamma}\,|\,(ct)^{-p}$$

c) Evidentemente la integral $\displaystyle\int_0^1 \Phi(t)\, t^r\, dt$

converge para un r fijo.

Podemos, pues, aplicar el teorema de Widder (4) pág. 283, y concluimos finalmente que:

$$\lim_{q\to\infty} V_q[f(u)] = \lim_{q\to\infty} \frac{q^{q+1}}{\Gamma(q+1)\, u^{q+1}\, u^{\beta-\alpha-\gamma}}\,.$$

$$\cdot \int_0^\infty e^{-\frac{qt}{u}}\, t^q\, \Phi(t)dt = \frac{\Phi(u)}{u^{\beta-\alpha-\gamma}} = \alpha(u)$$

para casi todo valor positivo de u, c.q.d.

TEOREMA.—Las condiciones necesarias y suficientes para que $f(x)$ sea representable mediante [1], con $\beta - \alpha - \gamma > -1$ y $\alpha(t)$ acotada, son:

1) $f(x) \in C^\infty$ en $(0, \infty)$

2) $f(x) = O\left(\dfrac{1}{x}\right)\ (O, \infty)$

3) $|V_q[f(x)]| \leq K \quad (O < x < \infty) \quad q = 1, 2, \ldots$

En efecto, por el lema I sabemos que $F_0(z) = f(z)$ es una función holomorfa en $|\varphi| < \pi/2$ ya que $\alpha(t)$ acotada corresponde al caso de $M(t) \equiv 1$, pudiéndose tomar $\chi = +\infty$, o sea, $1/\chi = O$. En particular será holomorfa sobre todo el eje real y por consiguiente se cumple la condición 1).

La condición 2) resulta de usar la acotación [5], pues para $\beta - \alpha - \gamma > -1$ tendremos

$$f(x) \leq \frac{M}{x}\int_0^\infty e^{-xt}\,(xt)^{\beta-\alpha-\gamma}\, d(xt) = \frac{M\,\Gamma(\beta-\alpha-\gamma+1)}{x}$$

Para demostrar la tercera condición usaremos la desigualdad [5] para acotar $V_q[f(x)]$ como sigue:

$$|V_q[f(x)]| \leq \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta+1}\, x^{-1}}{\Gamma(q+1)}\int_0^\infty e^{-\frac{qt}{x}}\left(\frac{qt}{x}\right)^{\beta-\alpha-\gamma+q} |\alpha(t)|\, dt =$$

$$= \frac{q^{q+1}}{\Gamma(q+1)}\int_0^\infty e^{-qv}\, V^{\beta-\alpha-\gamma+q}\, |\alpha(xv)|\, dV < M\,\frac{\Gamma(\beta-\alpha-\gamma+q+1)}{\Gamma(q+1)\, q^{\beta-\alpha-\gamma}}$$

Para acotar el segundo factor consideremos la función que resulta de sustituir q por z, o sea,

$$\frac{\Gamma(z+\beta-\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(z+1)\, z^{\beta-\alpha-\gamma}}$$

Esta función la podemos acotar teniendo en cuenta que para

$$R\xi > -1 \text{ es } \frac{\Gamma(z+\xi+1)}{\Gamma(z+1)} = z^{\xi}\, h(z)$$

en donde $h(z)$ es una función holomorfa de $z = \varrho\, e^{\varphi i}$ en el plano cortado por el semieje real negativo que se conserva acotada en la región definida por

$$\{|\varphi| \leq \delta < \pi\} \cap \{|z| \geq \xi_1 < |\xi|\}$$

según (5) pág. 422. Tendremos entonces

$$\left| \frac{\Gamma(z+\beta-\alpha-\gamma+1)}{\Gamma(z+1)\, z^{\beta-\alpha-\gamma}} \right| = |h(z)|$$

con $|h(z)|$ que se conserva acotado en particular en el segmento definido por

$$\{I(z) = 0\} \cap \{R(z) \geq \xi_1 > |\beta-\alpha-\gamma|\}$$

y también en el segmento $\{I(z) = 0\} \cap \{0 < R(z) < \xi_1\}$ por la holomorfía de $h(z)$, y por consiguiente en todo el semieje real positivo, con lo que concluimos finalmente que también se verifica la condición 3). Es pues

$$|V_q[f(x)]| < K \quad (0 < x < \infty) \quad q = 1, 2, \ldots$$

y por lo tanto queda demostrado que son necesarias las tres condiciones.

Consideremos ahora la integral:

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{xt}{2}}\, W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1,\, \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}(xt)\, (xt)^{\frac{\beta}{2}-\gamma-1}\, V_q[f(t)]dt$$

que converge en virtud de 3) y que mediante un cambio de variable y teniendo en cuenta que

$$V_q\left[f\left(\frac{q}{v}\right)\right] = \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)} VU_q\, [f(v)]\,;\ q = 1, 2, \ldots$$

nos quedará expresada en la siguiente forma:

$$I = \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)} \int_0^\infty h(v, x)\; U_q\, [f(v)]\, dv$$

con

$$h(v,\ x) = \frac{1}{v} e^{-\frac{1}{2}\frac{xq}{v}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1,\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{xq}{v}\right)\left(\frac{xq}{v}\right)^{\frac{\beta}{2}-\gamma-1}$$

Por otra parte tenemos:

$$U_q\,[f(v)] = (-1)^q\ v^{\alpha-\gamma-2-q}\left(v^2\frac{d}{dv}\right)^q\ [v^{\gamma+2-\alpha} f(v)] =$$

$$= (-1)^q \sum_{s=1}^{q} b_s\ v^s\ v^{\alpha-\gamma-2}\frac{d^s}{dv^s}[v^{\gamma+2-\alpha} f(v)] =$$

$$= (-1)^q \sum_{s=1}^{q} b_s \sum_{k=}^{s} \binom{s}{k} \prod_{j=0}^{s-k-1} (\alpha - j).\ f^{(k)}\ (v)\ v^k =$$

$$= \sum_{r=0}^{q} C_r\ v^r\ f^{(r)}\ (v) \qquad [8]$$

de donde obtenemos

$$I = \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)}\int_0^\infty h(v,\ x) \sum_{r=0}^{q} C_r\ f^{(r)}\ (v)\ v^r\ dv =$$

$$= \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)} \sum_{r=0}^{q} C_r\, I_r$$

con

$$I_r = \int_0^\infty h(v,\ x)\ f^{(r)}\ (v\ \ v^r\ dv$$

Integrando por partes reiteradamente tendremos:

$$I_r = (-1)^r \int_0^\infty f(v) \frac{\partial^r}{\partial v^r}[h(v,\ x).\ v^r]\, dv$$

si

$$f^{(r-1-p)}\,(v)\frac{\partial^p}{\partial v^p}[h\ (v,\ x).\ v^r] \to 0 \qquad [9]$$

con p $= 0,\ 1, \ldots,\ r-1$, tanto para $v \to 0$ como para $v \to \infty$ Para demostrarlo hallaremos primeramente la derivada de orden p, observando que es

$$h(v,\ x)\ v^r = \Psi\left(\frac{xq}{v}\right) v^{r-1}$$

Siendo

$$\Psi\left(\frac{xq}{v}\right) = e^{-\frac{1}{2}\frac{xq}{v}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1,\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{xq}{v}\right)\left(\frac{xq}{v}\right)^{\frac{\beta}{2}-\gamma-1}$$

una función homogénea de grado cero tendremos por el teorema de Euler

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{v^{r-1}}{x^r}\,\Psi\left(\frac{qx}{v}\right)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{v^{r-2}}{x^{r-1}}\Psi\left(\frac{xq}{v}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left[\frac{v^{r-1}}{x^r}\,\Psi\left(\frac{xq}{v}\right)\right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{v^{r-3}}{x^{r-2}}\,\Psi\left(\frac{xq}{v}\right)\right]$$

y en general

$$\frac{\partial^p}{\partial v^p}\left[\frac{v^{r-1}}{x^r}\,\Psi\left(\frac{xq}{v}\right)\right] = -(1)^p\,\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left[\frac{v^{r-p-1}}{x^{r-p}}\,\Psi\left(\frac{xq}{v}\right)\right]$$

o sea

$$\frac{\partial^p}{\partial v^p}\left[v^{r-1}\,\Psi\left(\frac{xq}{v}\right)\right] = (-1)^p\, v^{r-p-1}\, x^r\,\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left[x^{p-r}\,\Psi\left(\frac{xq}{v}\right)\right] \quad [10]$$

Y teniendo en cuenta

$$\frac{d}{dx}\left[x^{m-1/2}\, W_{k,m}(x)\, e^{-\frac{x}{2}}\right] = -\, x^{m-1}\, W_{k+\frac{1}{2},\,m-\frac{1}{2}}(x)\, e^{-x/2} \quad [11]$$

obtenemos finalmente

$$\frac{\partial^p}{\partial v^p}\left[h(x,v).\,v^r\right] = (-1)^p\, v^{r-p-1+\gamma}\frac{x^r}{q^r}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k} e^{-\frac{xq}{2v}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1+\frac{k}{2},\,\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}\cdot\left(\frac{xq}{v}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{xq}{v}\right)^{\frac{\beta}{2}-1-\frac{k}{2}}\frac{q^k}{v^k}\prod_{j=0}^{p-k-1}(p-r-\gamma-j).\, x^{k-r-\gamma} \quad [12]$$

y también por [5]

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial v^p}\left[h(x,v)\, v^r\right]\right| \leq$$

$$\leq v^{r-p-1+\gamma}\frac{x^r}{q^r}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} e^{-\frac{xq}{v}}\left(\frac{xq}{v}\right)^{\beta-\alpha}\frac{q^k}{v^k}\left|\prod_{j=0}^{p-k-1}(p-r-\gamma-j).\, x^{k-r-\gamma}\right| \quad [12^*]$$

Por último tendremos que hallar el comportamiento de las funciones $f^{(r)}(v)$ para $v \to 0$ y $v \to \infty$.

De la condición 3) deducimos que

$$\int_0^x V_q\,[f(u)]\,dx = O(x) \qquad x \to \infty$$

Por medio de [8] y un cambio de variable, la anterior integral se convierte en

$$\frac{q^{\alpha+\gamma-\beta+1}}{\Gamma(q+1)} \int_0^\infty \sum_{r=0}^{q} C_r\, q^r\, v^{r-1}\, f^{(r)}\,(qv)\,dv$$

con $q = 1, 2, \ldots$ Para $q = 1$ será

$$\int_{1/x}^\infty [C_0 \frac{f(v)}{v} + C_1\, f^1(v)]\,dv$$

Existiendo por 2) la integral del primer sumando, también existirá $\int_{1/x}^\infty f^1(v)\,dv$ y tomando sucesivamente $q = 2, 3, \ldots$ vemos que convergen todas las integrales

$$\int_{1/x}^\infty v^{r-1}\, f^{(r)}\,(v)\,dv \qquad r = 0, 1, \ldots$$

Integrando ahora por partes resulta

$$\int_{1/x}^\infty v^{r-1}\, f^{(r)}\,(v)dv = v^{r-1}\, f^{(r-1)}\,(v)\Big|_{1/x}^{\infty} -$$

$$- (r-1)\int_{1/x}^\infty v^{r-2}\, f^{(r-1)}\,(v)\,dv \qquad [13]$$

que nos dice que existe

$$\lim_{r\to\infty} v^{r-1}\, f^{(r-1)}\,(v), \text{ es decir, } f^{(r-1)}\,(v) = 0\,(v^{-r+1});\ v \to \infty\,; \qquad [14]$$

y por aplicación del teorema de HARDY y LITTLEWOOD, (4) pág. 193, tenemos

$$f^{(r-1)}\,(v) = o\,(v^{-r+1})\ \ v \to \infty \qquad [15]$$

en virtud del cual [13] se convierte en

$$\int_{1/x}^{\infty} v^{r-1} f^{(r)}(v)\, dv = -\frac{f^{(r-1)}(1/x)}{x^{r-1}} - (r-1)\int_{1/x}^{\infty} v^{r-2} f^{(r-1)}(v)\, dv$$

y siendo ambas integrales $0(x)$ también será

$$f^{(r-1)}\left(\frac{1}{x}\right) = 0\ (x^r) \quad x \to \infty \qquad [16]$$

y

$$f^{(r-1)}(x) = 0\ (x^{-r}) \quad x \to 0 \qquad [17]$$

Teniendo en cuenta [12], [12*], [14], [15], [16], [17] y por ser

$$W_{k,m}(x) = 0\ (x^{\pm m+1/2}) \quad x \to 0$$

se demuestra fácilmente que [9] tiende a cero para $v \to 0$ y $v \to \infty$

La integral I_r mediante [10], para $p = r$ se transforma en

$$I_r = \int_0^{\infty} f(v)\, x^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} h\ (x, v)\, dv$$

y por tanto

$$I = \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)} \int_0^{\infty} f(v) \sum_{r=0}^{q} C_r\ x^r \frac{\partial^r}{\partial x^r} h\,(x, v)dv =$$

$$= \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)} \int_0^{\infty} f(v)\ U_{q,x}\,[h(v, x)]\, dv$$

en virtud de [8]. Si calculamos ahora $U_{q,x}\,[h(v, x)]$ teniendo en cuenta [5] obtenemos

$$I = \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)} \int_0^{\infty} \frac{1}{v} e^{-\frac{xq}{2v}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1+q,\, \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{xq}{v}\right) \left(\frac{xq}{v}\right)^{\beta/2-\gamma-1} f(v)\, dv =$$

$$= \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)} \int_0^{\infty} e^{-\frac{xqt}{2}} W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1+q,\, \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}(xqt)\, (xqt)^{\frac{\beta}{2}-\gamma-1} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t} \sim$$

$$\sim \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)} \int_0^{\infty} e^{-xqt}\, (xqt)^{\beta-\alpha-\gamma+q} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t}$$

para $q \to \infty$, y

$$\lim_{q\to\infty} \frac{q^{\alpha+\gamma-\beta}}{\Gamma(q+1)} \int_0^\infty e^{-xqt} (x\,qt)^{\beta-\alpha-\gamma+q} f\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t} =$$

$$= \lim_{q\to\infty} \frac{(xq)^{q+1}}{\Gamma(q+1)} x^{\beta-\alpha-\gamma-1} \int_0^\infty e^{-xqt}\, t^q\, \Phi(t)\, dt$$

con

$$\Phi(t) = \frac{1}{t^{\alpha+\gamma-\beta+1}} f\left(\frac{1}{t}\right)$$

Siendo

$$\Phi(t) = 0\ (t^{\beta-\alpha-\gamma})\quad (0 < t < \infty)$$

la función $\Phi(t)$ cumple con las condiciones:

a) $\Phi(t) \in L\ (R^{-1} \leq v \leq R)$ para cada $R > 1$.

b) $\int_1^\infty \Phi(t)\, e^{-ct}\, dt$ converge para $c > 0$.

c) $\int_0^1 \Phi(t)\, t^r\, dt$ converge para $r > 1$.

y podemos aplicar el teorema de WIDDER, (4) pág. 263 resultando:

$$\lim_{q\to\infty} \frac{(xq)^{q+1}}{\Gamma(q+1)} x^{\beta-\alpha-\gamma-1} \int_0^\infty e^{-qxt}\, t^q\, \Phi(t)\, dt = \Phi\left(\frac{1}{x}\right) x^{\beta-\alpha-\gamma-1} = f(x)$$

para casi todo valor positivo de x.

Siendo

$$F(xt) = e^{-\frac{1}{2}xt}\, W_{\frac{\beta}{2}-\alpha+1,\, \frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}}(xt)\ (xt)^{\beta/2-\gamma-1} \in L\ (0 \leq x \leq \infty)$$

y $V_q\,[f(t)]$ uniformemente acotada, se puede aplicar el teorema llamado de compacticidad débil, (4) pág. 33, que demuestra la existencia de un subconjunto $\{q_i\}$ y una función acotada tal que

$$\lim_{i\to\infty} \int_0^\infty F(xt)\, V_{q_i}\,[f(t)]\, dt = \int_0^\infty F(xt)\, \alpha(t)\, dt$$

Habiendo ya demostrado que el primer miembro tiene por límite $f(x)$, nos queda por último que

$$f(x) = \int_0^\infty F(xt)\ \alpha\ (t)\ dt$$

como queríamos demostrar.

La transformación Generalizada de Whittaker para valores particulares de sus parámetros, (1), se convierte en las siguientes:

Transformación de Meijer:

$$\alpha = 1 - K + m\ ;\ \beta = 2\,m + 1\ ;\ \gamma = m + K$$

Transformación Generalizada de Laplace:

$$\alpha = m - K + \frac{3}{2};\ \beta = 2\,m + 1\ ;\ \gamma = 0$$

Transformación Integro-Exponencial:

$$\alpha = 2\ ;\ \beta = 2 - \nu\ ;\ \gamma = 1 - \nu - \sigma$$

Transformación de Laplace:

$$\alpha = 1 + m \mp m;\ \beta = 2\,m + 1\ ;\ \gamma = m \pm m$$

Transformación de Laplace con exponente complejo:

$$\alpha = 1 + m \pm m\ ;\ \beta = 2m + 1\ ;\ \gamma = m \pm m - \lambda$$

Por consiguiente, calculando el operador diferencial V_q para cada transformación tendremos los correspondientes teoremas de caracterización, que aparecen ahora como corolarios del teorema anterior, y que por brevedad en la exposición lo daremos en uno solo de la siguiente forma:

COROLARIO.—Las condiciones necesarias y suficientes para que $f(x)$ sea representable mediante una transformación de las citadas anteriormente con $\alpha(t)$ acotada, son:

1) $f(x) \in C^\infty$ $(0 < x < \infty)$

2) $f(x) = 0\,(1/x)$ $(0 < x < \infty)$

3) *Transformación de Meijer:*

$$\frac{q}{\Gamma(q+1)}\, x^{2k+q} \left| \frac{d^q}{dx^q}\, x^{-2k-1}\, f\left(\frac{q}{x}\right) \right| \leq K$$

Transformación Generalizada de Laplace:

$$\frac{q^{-2m-K+3/2}}{\Gamma(q+1)} x^{K-m-\frac{1}{2}+q}.$$

$$\cdot \left| \frac{d^q}{dx^q} \left[x^{m-K-\frac{1}{2}} f\left(\frac{q}{x}\right) \right] \right| \leq K \left(m - K > -\frac{1}{2} \right)$$

Transformación Integro-Exponencial:

$$\frac{q^{2-\sigma}}{\Gamma(q+1)} x^{\nu+\sigma+q} . \left| \frac{d^q}{dx^q} \left[x^{\sigma+\nu-1} f\left(\frac{q}{x}\right) \right] \right| \leq K \ (\sigma > 0)$$

Transformación de Laplace:

$$\frac{q}{\Gamma(q+1)} x^q \left| \frac{d^q}{dx^q} \left[x^{-1} f\left(\frac{q}{x}\right) \right] \right| \leq K$$

Transformación de Laplace con exponente complejo:

$$\frac{q^{1-\lambda}}{\Gamma(q+1)} x^{-\lambda+q} \left| \frac{d^q}{dx^q} \left[x^{\lambda-1} f\left(\frac{q}{x}\right) \right] \right| \leq K \ (\lambda \text{ real} > -1)$$

En los dos últimos se ha hecho $m = 0$ para obtener operadores más sencillos.

BIBLIOGRAFIA

[1] GUTIÉRREZ SUÁREZ, J. J.—*Caracterización de transformaciones integrales con núcleo de Whittaker.*—Trabajo realizado como becario de la Fundación Juan March. Rev. Mat. Hispanoamericana XXIII (1963), pág. 93 a 129, 139 a 175.

[2] SAKSENA, R. M.—*On a Generalized Laplace Integral.*—Math. Zeitschr. B. D. 68 S. 267-274 (1957).

[3] WHITTAKER AND WATSON. — *Modern Analysis.*

[4] WIDDER, P. V. — *The Laplace Transform.*

[5] SAN JUAN LLOSA, R.—*Los fundamentos de una teoría general de series divergentes.*—Rev. de la Real Acad. de Ciencias. Tomo XLVI, cuad. 4.º pp. 383-439 (1952).