SOBRE EL CONCEPTO DE EQUIVALENCIA ALGEBRAICA RELATIVA DE DIVISORES

por

José Javier Etayo

1. Introducción.—Esta comunicación, cuyo extracto [2] fue presentado por el autor en el Congreso de Estocolmo, desarrolla la idea de definir una relación de equivalencia, entre los divisores de un cuerpo de funciones algebraicas, inducida por la equivalencia lineal de divisores de un supercuerpo algebraico suyo. Al decir equivalencia relativa hacemos referencia a este supercuerpo puesto que, para distintos supercuerpos, la relación de equivalencia es distinta también; pero, como se deduce de la proposición 5, para cada cadena ascendente de supercuerpos se establece asimismo una ordenación entre las equivalencias correspondientes.

En cuanto a la idea geométrica que ha sugerido el nombre de equivalencia « algebraica », queda expuesta en nuestra nota [4]. Se veía en ella cómo podíamos definir un sistema algebraico de ciclos sobre una variedad como restricción de un sistema lineal perteneciente a otra variedad cuyo cuerpo de funciones fuese algebraico sobre el de la primera. Entonces, dos ciclos linealmente equivalentes, por pertenecer a un mismo sistema lineal, se restringirán en dos ciclos algebraicamente equivalentes, como pertenecientes a un mismo sistema algebraico. Y siendo las clases de equivalencia lineal las clases de restos respecto de la clase principal de divisores, será la restricción de esta clase principal la que nos origina, al tomar módulos respecto de ella, las clases de equivalencia algebraica relativa. Esta es la idea encerrada en nuestro trabajo.

Definida, finalmente, por Weil [7] una noción de equivalencia algebraica más general, demostramos aquí que nuestra equivalencia algebraica relativa está contenida en ella, es decir, dos divisores de un cuerpo algebraicamente equivalentes relativamente a un cierto supercuerpo algebraico suyo, son algebraicamente equivalentes en el sentido de Weil, lo que justifica definitivamente nuestra definición.

Las notaciones y definiciones que empleamos están establecidas en nuestros trabajos [3] y [4]. En particular recordaremos, en forma meramente expositiva, que llamábamos *haz* de divisores de un cuerpo Σ de funciones algebraicas al conjunto

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{a}_{\mathbf{v}} \mid \mathbf{v} \in \mathfrak{d}\}$$

donde $\mathfrak{d}$ es el conjunto de todos los divisores de un cuerpo Δ, de dimensión 1, contenido en una ampliación algebraica finita Σ^* del cuerpo Σ, y $\mathfrak{a}_{\mathbf{v}}$ es la contracción a Σ de la extensión de $\mathbf{v}$ a Σ^*. Como se sabe, Δ define en Σ^* un haz de ZARISKI cuya restricción a Σ es nuestro haz.

Si $\Delta = k(\lambda)$, $\lambda \in \Sigma^*$, es extensión transcendente simple del cuerpo k de constantes, el haz de ZARISKI definido en Σ^* es un haz lineal, cada uno de cuyos elementos $\mathfrak{a}_{\mathbf{v}}$ es el divisor de ceros del divisor principal $(a_0 + a_1 \lambda)$, donde

$$a_0 + a_1 X = 0$$

es la ecuación irreducible sobre k a la que satisface el residuo de λ en $\mathbf{v}$; variar $\mathbf{v}$ en $\mathfrak{d}$ equivale a variar las constantes a_0, $a_1 \in k$, obteniéndose así, como se ve, el *haz lineal* clásico. Entonces, si

$$f(x_1, \ldots, x_m, Y) = 0,$$

siendo $\Sigma = k(x_1, \ldots, x_m)$, es la ecuación irreducible de definición de λ sobre Σ, el anterior haz lineal se restringe sobre este cuerpo en el *haz algebraico* de divisores $(f(x_1, \ldots, x_m, a))$, $a = -\dfrac{a_0}{a_1}$, haciendo tomar a a todos los valores de k. Equivale a decir que el haz lineal de la geometría clásica se contrae sobre Σ en un haz algebraico también clásico.

Esto nos permitía tomar en [4] como definición de *sistema algebraico*

$$\mathfrak{S} = \{\mathfrak{s}_a \mid a = (a_0, \ldots, a_p) \neq (0, \ldots, 0)\}$$

al conjunto de divisores $\mathfrak{s}_a$ de Σ que son restricción, cada uno de ellos, de la componente de ceros del divisor principal

$$(a_0 + a_1 \lambda_1 + \ldots + a_p \lambda_p)$$

de Σ^*, $\lambda_i \in \Sigma^*$, $a_i \in k$, es decir, a la contracción sobre Σ de tal *sistema lineal* de divisores enteros de Σ^*.

Entonces, tal como se ha dicho, por ser linealmente equivalentes todos los divisores del sistema lineal, es decir, por pertenecer a la clase adjunta definida, respecto de la clase principal de Σ^*, por el divisor de polos de $(a_0 + \ldots + a_p \lambda_p)$, sus restricciones, que son los elementos de $\mathfrak{S}$, serán suma de un divisor de Σ con la restricción a este cuerpo de un divisor principal de Σ^*. Así que la equivalencia algebraica de divisores de Σ, relativamente a Σ^*, habrá de venir expresada por la condición de pertenecer los divisores equivalentes a una misma clase adjunta respecto de la contracción a Σ de la clase principal de Σ^*.

2. PROYECCIONES.—Sea V una variedad normal con anillo de polinomios $\mathfrak{o} = k[x_1, \ldots, x_m]$, íntegramente cerrado en su cuerpo de fracciones $\Sigma = k(x_1, \ldots, x_m)$, que suponemos pues finito sobre el cuerpo k de constantes; k algebraicamente cerrado y de característica cero. Sea $\Sigma^* = \Sigma(\theta)$ una ampliación algebraica finita y normal de Σ tal que su elemento primitivo θ sea entero sobre $\mathfrak{o}$; y llamemos $\mathfrak{o}^*$ al cierre íntegro de $\mathfrak{o}$ en Σ^* que define, por tanto, una variedad normal V^* cuyo cuerpo de funciones racionales es Σ^*.

Sea n el grado algebraico de Σ^* sobre Σ. Entonces, para cada ideal primo máximo $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{o}$, que representa un punto P de V, existe uno, al menos, y a lo más n ideales primos máximos

$$\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}^*_h, \qquad 1 \leq h \leq n,$$

de $\mathfrak{o}^*$ que yacen sobre él [3], a los cuales corresponden h puntos $P_1^*, \ldots, P_h^*$, que asignaremos al punto P. Recíprocamente, a todo punto P^* de V^* le corresponde un punto P de V dado por la contracción a $\mathfrak{o}$ del ideal $\mathfrak{p}^*$ correspondiente a P^* en $\mathfrak{o}^*$. A la aplicación

$$\pi : P^* \to P$$

de V^* sobre V la llamaremos *proyección* de V^* sobre V (*)

Por ser, según vimos en [3], los ideales $\mathfrak{p}_1^*, \ldots, \mathfrak{p}_h^*$, que yacen sobre $\mathfrak{p}$, Σ-conjugados, la proyección π goza de la propiedad

$$\pi \circ \gamma = \pi$$

para todos los automorfismos γ del grupo de GALOIS de la extensión $\Sigma^*|\Sigma$.

(*) La proyección es, pues, un *morfismo* que, por ser $\pi^{-1}(P)$ finito, $\leq n$, para todo $P \in V$, y Σ^* separablemente algebraico sobre Σ, define a V^* como un *revestimiento normal* de V [1], determinado salvo transformaciones birregulares sobre k [5].

Consideremos los grupos $\mathfrak{D}$ y $\mathfrak{D}^*$ de todos los divisores de Σ y Σ^* respectivamente, que sean de primera especie en las variedades correspondientes V y V^*.

LEMA 1. *A cada ideal primo mínimo $\mathfrak{P}^*$ de $\mathfrak{o}^*$ se le puede hacer corresponder un divisor primo de $\mathfrak{D}^*$ y recíprocamente. Y lo mismo para los divisores de $\mathfrak{D}$.*

DEMOSTRACIÓN.—Es una propiedad muy conocida. Dado $\mathfrak{P}^*$, por ser $\mathfrak{o}^*$ íntegramente cerrado, lo es también el anillo local respecto de ese ideal, y el ideal máximo de ese anillo local es un ideal principal. Tales anillo local e ideal máximo son, respectivamente, anillo e ideal de una valoración $\mathbf{v}^*$ de la que diremos que es el divisor primo correspondiente a $\mathfrak{P}^*$. Recíprocamente, dado $\mathbf{v}^*$, con ideal de valoración $\mathfrak{p}_{\mathbf{v}}^*$, le haremos corresponder el ideal $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{p}_{\mathbf{v}}^* \cap \mathfrak{o}^*$, que es su centro en $\mathfrak{o}^*$. Por ser $\mathfrak{o}^*$ íntegramente cerrado, esta correspondencia es biunívoca.

LEMA 2.—*La proyección π asigna a cada divisor primo $\mathbf{v}^* \in \mathfrak{D}^*$ un divisor primo $\mathbf{v} \in \mathfrak{D}$, que es precisamente la restricción de $\mathbf{v}^*$ a Σ.*

DEMOSTRACIÓN.—Sea $\mathfrak{P}^*$ el ideal primo mínimo correspondiente al centro de $\mathbf{v}^*$ en $\mathfrak{o}^*$, según el lema anterior; el ideal $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{o}$ que es también ideal primo mínimo, sabemos [3] que es el centro sobre $\mathfrak{o}$ de la restricción $\mathbf{v}$ de $\mathbf{v}^*$ en Σ. Cada ideal $\mathfrak{p}^* \supset \mathfrak{P}^*$ tiene como contracción en $\mathfrak{o}$ un ideal $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{P}$ y recíprocamente, según es bien sabido, luego el conjunto de puntos de la subvariedad de V^* correspondiente al ideal $\mathfrak{P}^*$ se representa mediante π sobre los puntos de la subvariedad de V definida por $\mathfrak{P}$. Diremos entonces que π hace corresponder a cada divisor primo $\mathbf{v}^*$ de Σ^* el divisor $\mathbf{v}$ de Σ cuando aplica el centro de $\mathbf{v}^*$ en $\mathfrak{o}^*$ sobre el centro de $\mathbf{v}$ en $\mathfrak{o}$.

A la aplicación de $\mathbf{v}^*$ en $\mathbf{v}$ inducida, según indica este lema, mediante π, seguiremos llamándola *proyección* y representándola por π:

$$\pi(\mathbf{v}^*) = \mathbf{v}.$$

De modo análogo al caso de la proyección de puntos, el conjunto de divisores que se proyectan sobre $\mathbf{v}$ forma un sistema completo de divisores Σ-conjugados [3], luego, si $\mathbf{v}^*$ es uno de ellos y $\{\gamma_i\}$ el grupo de GALOIS de $\Sigma^*|\Sigma$, se tendrá :

$$\pi(\mathbf{v}^* \circ \gamma_i) = \pi(\mathbf{v}^*) = \mathbf{v}.$$

Además, todos esos divisores que se proyectan en $\mathbf{v}$ tienen sobre él un mismo índice e de ramificacion ; definiremos entonces la aplicación inversa π^{-1} mediante :

$$\pi^{-1}(\mathbf{v}) = \{e \cdot (\mathbf{v}^* \circ \gamma_i)\}.$$

Sea

$$\mathbf{d}^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, \mathbf{v}_i^*$$

un divisor de $\mathfrak{D}^*$, con $\mathbf{v}_i^*$ divisores primos y α_i números enteros; su proyección será :

$$\mathbf{d} = \pi(\mathbf{d}^*) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \left[\pi(\mathbf{v}_i^*)\right] \epsilon\, \mathfrak{D}$$

PROPOSICIÓN 1. — $\pi(\mathfrak{D}^*) = \mathfrak{D}$.

DEMOSTRACIÓN.—Acabamos de ver que, cualquiera que sea $\mathbf{d}^* \epsilon \mathfrak{D}^*$, se verifica $\pi(\mathbf{d}^*) \epsilon \mathfrak{D}$, luego $\pi(\mathfrak{D}^*) \subset \mathfrak{D}$. Recíprocamente, como a cada divisor primo $\mathbf{v} \epsilon \mathfrak{D}$ corresponde un número finito, $\leq n$, de divisores primos ampliados a Σ^*, que son de primera especie en V^*[3], extendiendo esta propiedad al grupo aditivo $\mathfrak{D}$ de divisores, queda demostrada la igualdad.

COROLARIO. *La aplicación π entre divisores, inducida por la proyección, es un homomorfismo de $\mathfrak{D}^*$ sobre $\mathfrak{D}$.*

3. PROYECCIÓN DE LA CLASE PRINCIPAL.—La clase principal del grupo $\mathfrak{D}^*$ de divisores de Σ^* que son de primera especie en V^* está formada, como se sabe, por los divisores correspondientes a los elementos de Σ^*.

Sea F^* una función de Σ^* que, por ser cuerpo de cocientes del anillo $\mathfrak{o}^*$, podrá escribirse en la forma

$$F^* = \frac{f^*}{f'^*}, \text{ con } f^*, f'^* \epsilon\, \mathfrak{o}^*.$$

Si las descomposiciones primarias de los ideales principales engendrados por estos polinomios son :

$$\mathfrak{o}^* f^* = \mathfrak{Q}_1^* \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}^*_s, \qquad \mathfrak{o}^* f'^* = \mathfrak{Q}'_1{}^* \cap \ldots \cap \mathfrak{Q}'_t{}^*$$

y son $\mathfrak{P}_i^*$, $\mathfrak{P}'_j{}^*$, respectivamente, los ideales primos (mínimos) correspondientes a los primarios $\mathfrak{Q}_i^*$, $\mathfrak{Q}'_j{}^*$, se tendrá, por el lema 1, que a cada uno de estos ideales primos corresponden divisores primos $\mathbf{v}^*_i$, $\mathbf{v}_j'^*$ de $\mathfrak{D}^*$.

Llamando $\mu_i = \mathbf{v}_i^* \, (f^*)$, $\mu'_j = \mathbf{v}'_j{}^* \, (f'^*)$, escribiremos :

$$(F^*) = \sum_{i=1}^{s} \mu_i \, \mathbf{v}_i^* + \sum_{j=1}^{t} \mu'_j \, \mathbf{v}'_j{}^*,$$

o bien, efectuando la reducción de los $\mathbf{v}_i^* \equiv \mathbf{v}'_j{}^*$, correspondientes a un mismo ideal $\mathfrak{P}_i^* \equiv \mathfrak{P}'_j{}^*$, y viendo que entonces

$$\mu_i - \mu_j' = \mathbf{v}_i^* \, (f^*) - \mathbf{v}'_j{}^* \, (f'^*) = \mathbf{v}_i^*(f^*) - \mathbf{v}_i^*(f'^*) = \mathbf{v}_i^*(F^*),$$

quedará, en definitiva :

$$(F^*) = \sum_i \left[\mathbf{v}_i^* \, (F^*) \right] \cdot \mathbf{v}_i^*,$$

al cual llamaremos *divisor principal* correspondiente al elemento $F^* \epsilon \Sigma^*$, respecto de $\mathfrak{o}^*$.

La correspondencia $F^* \to (F^*)$ cumple la propiedad

$$F^* G^* \to (F^* G^*) = (F^*) + (G^*),$$

lo que nos establece un homomorfismo del grupo multiplicativo de Σ^* en el grupo aditivo $\mathfrak{D}^*$ de divisores del mismo cuerpo. La imagen de este homomorfismo será, por tanto, un subgrupo $\mathfrak{C}^*$ de $\mathfrak{D}^*$, al que llamaremos *clase principal* de divisores de Σ^* respecto de $\mathfrak{o}^*$.

Por el lema 2, la proyección de un divisor principal será :

$$\pi\Big((F^*)\Big) = \sum_i \left[\mathbf{v}_i^* \, (F^*) \right] \cdot \pi(\mathbf{v}_i^*).$$

Por el homomorfismo establecido entre $\mathfrak{D}^*$ y $\mathfrak{D}$ en el corolario de la proposición 1 se verifica, por ser $\mathfrak{C}^*$ subgrupo de $\mathfrak{D}^*$:

PROPOSICIÓN 2.— *$\pi(\mathfrak{C}^*)$ es un subgrupo de $\mathfrak{D}$.*

PROPOSICIÓN 3.—*Si $F \epsilon \Sigma \subset \Sigma^*$, y llamamos $(F)^*$ y (F) a los divisores correspondientes a F en Σ^* y Σ, respectivamente, se verifica : $\pi((F)^*) = (F)$.*

DEMOSTRACIÓN.—Podemos siempre elegir

$$F = f/f'; \; f, \, f' \, \epsilon \, \mathfrak{o} \subset \mathfrak{o}^*.$$

Sean $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_l$ los ideales primos mínimos de rad$(\mathfrak{o}f)$ y $\mathfrak{P}_1^*, \ldots, \mathfrak{P}_r^*$ los de rad$(\mathfrak{o}^*f)$; y lo mismo operaríamos con f'. Vamos a ver, en primer lugar, que los $\mathfrak{P}^*$ son todos los ideales primos que yacen sobre los $\mathfrak{P}$ y sólo ellos.

Desde luego, a cada ideal primo mínimo $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{o}f$ corresponde uno, o un número finito, de ideales mínimos de $\mathfrak{o}^*$ que se proyectan sobre él ; si $\mathfrak{P}^*$ es ése, o uno de ésos, al ser $\mathfrak{o}^*(\mathfrak{o}f) = \mathfrak{o}^*f$, forzosamente será $\mathfrak{P}^* \supset \mathfrak{o}^*f$, ya que, por estar

$$\mathfrak{o}\, f \subset \mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_l$$

será

$$\mathfrak{o}^* f \subset \mathfrak{o}^*(\mathfrak{P}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{P}_l) \subset (\mathfrak{o}^*\mathfrak{P}_1) \cap \ldots \cap (\mathfrak{o}^*\mathfrak{P}_l),$$

luego $\mathfrak{o}^*f$ está contenido en los ideales ampliados de todos los $\mathfrak{P}_i$ y, por tanto, en $\mathfrak{P}^*$. Este será, pues, uno de los ideales $\mathfrak{P}_1{}^*, \ldots, \mathfrak{P}_r{}^*$ de $\mathrm{rad}(\mathfrak{o}^*f)$.

Recíprocamente, si $\mathfrak{P}^*$ es uno de los ideales de $\mathrm{rad}(\mathfrak{o}^*f)$, yacerá sobre un ideal mínimo primo $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{o}$, y como $\mathfrak{P}^* \supset \mathfrak{o}^*f$, también

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^* \cap \mathfrak{o} \supset \mathfrak{o}^*\, f \cap \mathfrak{o} \supset \mathfrak{o}\, f,$$

luego todos los ideales $\mathfrak{P}_1{}^*, \ldots, \mathfrak{P}_r{}^*$ se contraen en los $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_l$. Del lema 1 resulta, entonces, que todos los divisores primos de $(f)^*$ yacen sobre los divisores primos de (f).

Finalmente, si $\mathbf{v}^*$ es un divisor primo de $(f)^*$ y $\mathbf{v}$ su contracción a Σ, que será un divisor primo de (f), y es e el índice de ramificación de $\mathbf{v}^*$ sobre $\mathbf{v}$, será, evidentemente, $\mathbf{v}^*(f) = e.\ \mathbf{v}(f)$, luego $\pi((f)^*) = (f)$. Aplicando el razonamiento, como decíamos, también a f', queda totalmente demostrado el teorema.

COROLARIO 1.—$\mathfrak{C} \subset \pi(\mathfrak{C}^*)$, *donde* $\mathfrak{C}$ *es la clase principal de* Σ *respecto de* V.

DEMOSTRACIÓN.—Basta ver que, según la proposición anterior, todo elemento $(F) \in \mathfrak{C}$, con $F \in \Sigma$, por tanto, verifica:

$$(F) = \pi\, ((F)^*) \in \pi\, (\mathfrak{C}^*)$$

COROLARIO 2.—*En el grupo de divisores de* Σ *se puede establecer la ordenación* $\mathfrak{C} \subset \pi(\mathfrak{C}^*) \subset \pi(\mathfrak{D}^*) = \mathfrak{D}$.

Sea ahora Σ^{**} un cuerpo, extensión normal de Σ^*, y V^{**} la normalización de V en Σ^{**} ; será también V^{**} la normalización de V^* en Σ^{**} [3]. Si llamamos σ a la proyección de V^{**} en V^* y a la consiguiente aplicación inducida sobre los divisores de Σ^{**} que sean de primera especie en V^{**}, resulta [5] que V^{**} es un revestimiento normal de V^* y de V y que la proyección de V^{**} sobre V es : $\tau = \pi \circ \sigma$.

PROPOSICIÓN 4. *Con las anteriores notaciones, y llamando* $\mathfrak{C}^{**}$ *a la clase principal de* Σ^{**} *respecto de* V^{**}, *se verifica :* $\pi(\mathfrak{C}^*) \subset \tau(\mathfrak{C}^{**})$

DEMOSTRACIÓN.—Por el corolario 1 de la proposición anterior, $\mathfrak{C}^* \subset \sigma(\mathfrak{C}^{**})$. Aplicando π :

$$\pi(\mathfrak{C}^*) \subset \pi(\sigma(\mathfrak{C}^{**})) = (\pi \circ \sigma)\ (\mathfrak{C}^{**}) = \tau\ (\mathfrak{C}^{**}).$$

4. EQUIVALENCIA ALGEBRAICA RELATIVA.—Por ser $\pi(\mathfrak{C}^*)$, según la proposición 2, un subgrupo de $\mathfrak{D}$, se puede establecer la siguiente

DEFINICIÓN.—Llamaremos *clases de equivalencia algebraica* de los divisores de $\mathfrak{D}$ *relativamente* a la normalización V^* de V, o al supercuerpo Σ^* de Σ unívocamente determinado por ella, a las clases de restos $\mathfrak{D}/\pi(\mathfrak{C}^*)$. Dos divisores $\mathbf{d}$ y $\mathbf{d}'$ de $\mathfrak{D}$ diremos que son *algebraicamente equivalentes relativamente a* Σ^*, cuando $\mathbf{d} - \mathbf{d}' \in \pi(\mathfrak{C}^*)$

De la proposición 3, corolario 1, y de la proposición 4 se deduce :

PROPOSICIÓN 5. *Dos divisores de* $\mathfrak{D}$ *linealmente equivalentes son algebraicamente equivalentes relativamente a cualquier supercuerpo de* Σ. *Si* Σ^* *es un supercuerpo algebraico de* Σ *y* Σ^{**} *lo es de* Σ^*, *dos divisores algebraicamente equivalentes respecto de* Σ^* *lo son también relativamente a* Σ^{**}.

Definiremos como WEIL [7] la *equivalencia algebraica* de divisores de $\mathfrak{D}$ en la siguiente forma : Elegida arbitrariamente una variedad W, sea Z un ciclo, también arbitrario, de la variedad producto $V \times W$. A cada punto P de W haremos corresponder, entonces, un ciclo Z_P de V, formado por todos los puntos M de V tales que $(M, P) \in Z$. Entonces, para cada par de puntos simples P y P' de W para los cuales estén definidos Z_P y $Z_{P'}$, queda determinado el ciclo $X = Z_P - Z_{P'}$, de V al que, por el lema 1, corresponderá un divisor $\mathbf{x}$ de $\mathfrak{D}$. El conjunto de todos los divisores $\mathbf{x}$ así construidos, para todas las posibles elecciones de W, Z, P y P', constituye un subgrupo $\mathfrak{W}$ del grupo $\mathfrak{D}$ de divisores. Las clases de restos $\mathfrak{D}/\mathfrak{W}$, respecto de $\mathfrak{W}$, son las *clases de equivalencia algebraica*, según WEIL.

TEOREMA. *Dos divisores de* $\mathfrak{D}$, *algebraicamente equivalentes relativamente a cualquier supercuerpo de* Σ, *son también algebraicamente equivalentes en el sentido de* WEIL.

DEMOSTRACIÓN.—Si Σ^* es una extensión de Σ, con las condiciones impuestas hasta aquí, bastará con demostrar que $\pi(\mathfrak{C}^*) \subset \mathfrak{W}$.

Sea $F^*(x_1, \ldots, x_m, \theta)$ una función racional perteneciente al cuerpo Σ^*. A cada punto $P(p_1, \ldots, p_m)$ de V, que tenía a $\mathfrak{o} = k[x_1, \ldots, x_m]$ por anillo de polinomios, la función F^* hace corresponder un elemento

$$F^*(P) = F^*(p_1, \ldots, p_m, \theta) = F_p{}^*(\theta)$$

del cuerpo $k(\theta)$. No es difícil comprobar que los puntos P que anulan idénticamente a $F_p{}^*(\theta)$ constituyen la variedad de ceros de $\pi((F^*))$; y de modo análogo se definiría el divisor de polos. Según esto, F^* representa cada punto de V en un elemento, incluso el infinito, del cuerpo $k(\theta)$, es decir, es una función definida sobre V con valores en la recta proyectiva D^* [6] sobre $k(\theta)$. Sea Γ la gráfica (*graph*) de F^*, esto es, [1], el conjunto de puntos $(P, F^*(P))$ de $V \times D^*$. A los puntos 0 e ∞ de D^* corresponderán en V, de acuerdo con las notaciones que hemos utilizado, los ciclos Γ_0 y Γ_∞, respectivamente, que constituyen, por tanto, las variedades de ceros y polos de la proyección de (F^*) sobre V. De aquí, pues, que $\pi(F^*)$ sea el divisor correspondiente al ciclo $\Gamma_0 - \Gamma_\infty$. Resulta, por consiguiente, esta construcción particularizando toda la arbitrariedad que permitía la definición del grupo $\mathfrak{W}$ de WEIL al caso de tomar D^* como variedad W, Γ como ciclo Z y los puntos cero e infinito por el par arbitrario P, P', Luego $\pi(F^*) \in \mathfrak{W}$. Como esto es cierto para cualquier $F^* \in \Sigma^*$, queda demostrado que $\pi(\mathfrak{C}^*) \subset \mathfrak{W}$ y con ello el teorema.

BIBLIOGRAFIA

[1] C. CHEVALLEY.—*Fondements de la géometrie algébrique.*—(mimeograph.) Facult. Sci., París, 1957/58.

[2] J. J. ETAYO.—*The concept of algebraic equivalence of divisors of a field.* Intern. Congr. Math., Stockholm, 1962.

[3] — — — *Clasificación de puntos de una variedad respecto de un haz.*—Coll. Mat., XIV, 1962.

[4] — — — *Definición de sistema algebraico de subvariedades máximas de una variedad.*—XXVI Congr. Luso-Espanh. Progr. Ciêuc., Porto, 1962.

[5] Y. NAKAI.—*Ramifications, differentials and differente on algebraic varieties of higher dimensions.*—Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, Ser. A, 32, 1960.

[6] A. WEIL.—*Foundations of algebraic geometry.*—Am. Math. Soc. Coll. Publ. 29, 1946.

[7] — — — *Sur les critères d'équivalence en géometrie algébrique.* Math. Ann., 128, 1954.

SEMINARIO MATEMÁTICO
Zaragoza, octubre de 1962.