UNA CLASE DE GRUPOIDES: TRIBUS. INMERSION EN UNA TRIBU

por

BALTASAR R.-SALINAS

Sea $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ una familia no vacía de grupos disjuntos tales que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un isomorfismo σ_λ de G_λ sobre un grupo G, independiente de λ. Entonces se puede definir en

$$H = \bigcup_\lambda G_\lambda$$

una ley de composición interna poniendo

$$ab = c$$

para todo par (a, b) de elementos de H, $a \in G_\lambda$ y $b \in G_\mu$ $(\{\lambda, \mu\} \subset \Lambda)$, si y sólo si $c \in G_\mu$ y

$$\sigma_\lambda(a)\sigma_\mu(b) = \sigma_\mu(c).$$

Es evidente que con la multiplicación así definida, H es un grupoide asociativo:

$$\text{(A)} \qquad (ab)c = a(bc) \quad (\forall \{a, b, c\} \subset H),$$

y cada G_λ es un subgrupo de H.

DEFINICIÓN. *Un grupoide asociativo H en donde se pueda definir la multiplicación a partir de una familia $\{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \neq \emptyset$ de subgrupos disjuntos e isomorfos de H en la forma precedente se dice una tribu* (1).

TEOREMA 1. *Toda tribu H posee las siguientes propiedades:*

P_0. *Existe al menos un $e \in H$ tal que*

$$\text{(0)} \qquad ea = a$$

para todo $a \in H$.

(1) De acuerdo con esta definición se debe llamar *tribu opuesta* al grupoide opuesto de una tribu.

El conjunto de estos elementos $e \in H$ será designado por E. Entonces se puede expresar abreviadamente P_0 escribiendo: $E \neq \emptyset$.

P_1. *Para cada* $a \in H$ *existe al menos un par* $(a', e) \in H \times E$ *tal que*

$$a'a = e. \tag{1}$$

P_2. *Para cada* $a \in H$ *existe al menos un par* $(a', e) \in H \times E$ *tal que*

$$aa' = e. \tag{2}$$

P_3. *Para todo par* (a, b) *de elementos de* H *existe al menos un* $x \in H$ *que satisface*

$$ax = b. \tag{3}$$

P_4. *Si* a, x, y *son elementos de* H *y* $ax = ay$ *resulta* $x = y$.

Demostración. Por no presentar dificultades la omitimos.

Teorema 2. *En un grupoide asociativo* H *existen las siguientes relaciones entre las propiedades* P_i:

1. P_1 *implica* P_0 *y* P_4.
2. P_2 *implica* P_1.
3. P_3 *y* P_0 *implican* P_2.
4. P_4 *y* P_3 *implican* P_0.
5. *Si* H *es finito,* P_4 *implica* P_3.

Demostración.—Como las relaciones 1 y 3 son evidentes nos limitaremos a probar las restantes.

$P_2 \Longrightarrow P_1$. Como existe un $a \in H$ $(\neq \emptyset)$, por P_2 se pueden encontrar dos elementos a' y c' de H de manera que $aa' \in E$ y $cc' \in E$ para $c = a'a$, de donde se deduce

$$c^2 = a'(aa')a = a'a = c$$

y

$$b = (c^2c')\, b = c\,(cc')b = cb$$

para todo $b \in H$ y, por consiguiente, $a'a = c \in E$.

$(P_3 \wedge P_4) \Longrightarrow P_0$. En efecto, como por P_3 si $c \in H$ $(\neq \emptyset)$ existe una solución $x \in H$ de $cx = c$, resulta

$$c(xa) = ca$$

para todo $a \in H$ y, por tanto,

$$xa = a \quad (\forall\, a \in H)$$

en virtud de P_4, y $x \in E$.

Si H es finito, P_4 implica P_3. Basta tener presente que para cada $a \in H$, $x \to ax$ es una aplicación univalente del conjunto finito H en si.

COROLARIO 1. a) *P_3 y P_0 implican P_1.*

b) *P_4 y P_3 implican P_1.*

c) *Si H es finito, P_4 implica P_1.*

La primera de estas relaciones se puede mejorar introduciendo la propiedad :

P_0^*. *Para cada $a \in H$ existe al menos un $y \in H$ que satisface*

$$(0)^* \qquad ya = a,$$

en la forma siguiente :

a) *P_3 y P_0^* implican P_1.*

En efecto, cualquiera que sea $a \in H$, si x e y son las soluciones de $cx = a$ e $yc = c$ $(c \in H)$ resulta

$$ya = (yc)\, x = cx = a \quad (\forall\, a \in H)$$

y, por consiguiente, $y \in E$ y $E \neq \emptyset$. Entonces, según las relaciones 3 y 2, se sigue P_1.

PROPOSICIÓN 1. *Si H es un grupoide asociativo y*

$$G = \{a \mid a \in H \wedge ae = a\}$$

donde $e \in E$, se tiene $e \in G$ y para cada par $(a, b) \in H \times G$ resulta $ab \in G$.

DEMOSTRACIÓN. En efecto, $ee = e$ y $(ab)e = a(be) = ab$ si $(a, b) \in H \times G$.

PROPOSICIÓN 2. *Si H es un grupoide asociativo que posee la propiedad P_1, para cada $a \in H$ existe un $e \in E$ tal que $ae = a$.*

DEMOSTRACIÓN. Efectivamente, como en virtud de P_1 existe un par (a', a'') de elementos de H tales que

$$e = a'a \in E \text{ y } a''a' \in E,$$

resulta

$$a = (a''a')\, a = a''(a'a) = a''e$$

y

$$ae = (a''e)e = a''e^2 = a.$$

PROPOSICIÓN 3. *Si H es un grupoide asociativo y si*

$$G' = \{a \mid a \in H \wedge ae' = a\} \quad (e' \in E)$$

y

$$G'' = \{a \mid a \in H \wedge ae'' = a\} \quad (e'' \in E),$$

la aplicación $a' \to a''$ de G' en G'', definida por

$$a'' = a'e'',$$

es un isomorfismo de G' sobre G''.

Además, si H posee la propiedad P_4 (o P_1) y $e' \neq e''$, resulta $G' \cap G'' = \emptyset$.

DEMOSTRACIÓN. Desde luego la aplicación $a' \to a''$ de G' en G'', anteriormente definida, es biunívoca puesto que:

a) Si $a'e'' = a''$ se tiene $a''e' = a'(e''e') = a'e' = a'$.

b) Si $x' = a''e'$ se tiene $x' \in G'$ y $x'e'' = a''(e'e'') = a''e'' = a''$.

Entonces la aplicación $a' \to a'e''$ $(a' \in G')$ es un isomorfismo de G' sobre G'' porque si $a'' = a'e''$ y $b'' = b'e''$ $(\{a', b'\} \subset G')$ resulta

$$a''b'' = a'(e''b')\, e'' = (a'b')\, e'',$$

es decir, $a'b' \to a''b''$.

Además si H posee P_4 y $G' \cap G'' \neq \emptyset$ se deduce $e' = e''$ puesto que, siendo

$$ae' = ae'' \;\; (= a)$$

para todo $a \in G' \cap G''$ $(\neq \emptyset)$, resulta

$$e' = e''$$

en virtud de P_4.

TEOREMA 3. *Un grupoide asociativo H es una tribu si posee la propiedad P_1* (2).

(2) En una reciente comunicación presentada al XXVI Congreso Luso-Español para el Progreso de las Ciencias, PI CALLEJA ha demostrado que un grupoide asociativo con la propiedad P_1 no es necesariamente un grupo. Los teoremas 1 y 3 completan este resultado. Véase [3].

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$E = \{e_\lambda \mid \lambda \varepsilon \Lambda\}$$

con $e_\lambda \neq e_\mu$ para $\lambda \neq \mu$ ($\{\lambda, \mu\} \subset \Lambda$) y

$$G_\lambda = \{a \mid a \epsilon H \wedge ae_\lambda = a\} \quad (\lambda \epsilon \Lambda).$$

Entonces, como por las proposiciones 2 y 3

$$H = \bigcup_\lambda G_\lambda$$

y todo par de grupoides, G_λ y G_μ ($\lambda \neq \mu$), son isomorfos y disjuntos (3), bastará probar que cada G_λ es un grupo. Efectivamente:

I. *Si a y b son elementos de* G_λ, $ab \epsilon G_\lambda$. Se sigue de la proposición 1.

II. *Para todo* $a \epsilon G_\lambda$ *se tiene* $e_\lambda a = a$ *con* $e_\lambda \epsilon G_\lambda$. Evidente.

III. *Para todo* $a \varepsilon G_\lambda$ *existe al menos un* $a^* \epsilon G_\lambda$ *tal que* $a^*a = e_\lambda$. En efecto, como por P_1 existe un par $(a', e) \epsilon H \times E$ que satisface

$$a'a = e,$$

para $a^* = a'e_\lambda \epsilon G_\lambda$ resulta

$$a^*a = a'(e_\lambda a) = a' (ae_\lambda).$$
$$= (a'a)e_\lambda = ee_\lambda = e_\lambda.$$

COROLARIO 2. *En un grupoide asociativo H la propiedad* P_1 *implica las restantes propiedades* P_i $(0 \leq i \leq 4)$.

COROLARIO 3. *Un grupoide asociativo H es una tribu si posee una cualquiera de las propiedades:*

1. P_2.
2. P_3 *y* P_0.
3. P_4 *y* P_3.
4. P_4 *y H es finito* (4).

(3) Obsérvese que si $\sigma_{\mu\lambda}$ es el isomorfismo $a \rightarrow ae_\mu$ de G_λ en G_μ se tiene
$$\sigma_{\nu\mu}(ab) = \sigma_{\nu\lambda}(a)\,\sigma_{\nu\mu}(b)$$
para todo par $(a, b) \epsilon G_\lambda \times G_\mu$ y $\{\lambda, \mu, \nu\} \subset \Lambda$.

(4) En 1959, D. Emilio López Galí demostró directamente, siguiendo nuestras indicaciones, las dos últimas partes de este corolario.

Un grupoide asociativo con la propiedad P_4 no es necesariamente una tribu, es más, según vamos a probar en seguida, ni siquiera se puede sumergir en una tribu si no cumple ciertas condiciones.

PROPOSICIÓN. 4 *Toda tribu H posee la propiedad:*

Z. Si a, b, c, d, x, y, u, v, son elementos de H que verifican

$$ax = by$$

$$cx = dy$$

$$au = bv,$$

se tiene

$$cu = dv.$$

DEMOSTRACIÓN. Como por P_3 existe una solución $z \in H$ de $xz = u$, tendremos

$$bv = au = (ax)z = b(yz),$$

de donde por P_4 resulta $v = yz$ y, por consiguiente,

$$dv = (dy)z = c(xz) = cu.$$

PROPOSICIÓN 5. *Existen semigrupos que no poseen la propiedad Z* (5).

DEMOSTRACIÓN. Véase MALCEV [1] pág. 687.

TEOREMA 4. *Existen semigrupos no inmersibles en ninguna tribu.*

DEMOSTRACIÓN. Se deduce como consecuencia de las proposiciones 4 y 5.

Completamos este teorema así:

TEOREMA 5. *Todo semigrupo S sumergido en una tribu H se puede sumergir en un grupo isomorfo a un subgrupo He con $e \in E$ de H.*

Si además S tiene un elemento neutro (o unidad) u, resulta $u \in E$ y S está contenido en el subgrupo Hu de H (6).

(5) Un semigrupo es un grupoide asociativo tal que cada una de las ecuaciones

$$ax = ay \text{ y } xa = ya$$

implican $x = y$.

(6) Utilizando el teorema 5 se puede dar otra demostración del teorema 4.

DEMOSTRACIÓN. Como es obvio que para cada $e \in E$, $a \to ae$ $(a \in S)$ es un homomorfismo de S en el subgrupo He de H, será suficiente probar que dicho homomorfismo es un isomorfismo. En efecto, si

$$ae = be$$

y $\{a, b\} \subset S$, tendremos

$$ax = (ae)\,x = (be)\,x = bx$$

para todo $x \in H$ y, por tanto,

$$a = b$$

si tomamos $x \in S$.

Si además S tiene un elemento neutro u, como existe al menos un $e \in E$ que satisface $ue = u$, resulta

$$a = au = (au)\,c = ae \in He$$

para todo $a \in S$ y, por consiguiente, $u = e$ y $S \subset Hu$.

TEOREMA 6. *Un grupoide asociativo H se puede sumergir en una tribu $\overline{H}$ si posee las propiedades P_4, P_5 y P_6, siendo:*

P_5. *Si a, b, x son elementos de H que satisfacen*

$$ax = bx,$$

se tiene

$$ay = by \tag{5}$$

para todo $y \in H$ ([7]).

P_6. *Para cada terna de elementos a, b, c de H existe un par $(x, y) \in H \times H$ que satisface*

$$xac = ybc \quad ([8]). \tag{6}$$

DEMOSTRACIÓN. Pongamos $a \sim b$ en H si y sólo si existe un par $(x, y) \in H \times H$ que verifica $xa = yb$. Entonces esta relación « $\sim$ » es de equivalencia puesto que:

1. $a \sim a$. Evidente.
2. Si $a \sim b$ se sigue $b \sim a$. Evidente.
3. Si $a \sim b$ y $b \sim c$ se tiene $a \sim c$. En efecto, si

---

([7]) Se ve fácilmente que Z implica P_5.

([8]) La semejanza de P_6 con la condición de inmersión de ORE es evidente. Véase [2].

$$xa = yb \quad (\{x, y\} \subset H)$$

y

$$ub = vc \quad (\{u, v\} \subset H),$$

como según P_6 existe un par $(z, w) \in H \times H$ que satisface

$$zyb = wub,$$

tendremos

$$(zx)a = z(yb) = w(ub) = (wv)c,$$

es decir, $a \sim c$.

De esto se deduce que H es una reunión $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$ de clases de equivalencia del tipo :

$$K = \{x \mid a \sim x\} \quad (a \in H).$$

Entonces $xa \in K$ si $a \in K$ y para todo par (a, b) de elementos de K existe otro $(x, y) \in K \times K$ que verifica $xa = yb$, porque $u(xa) = (ux)a$ para $u \in H$ y si $(x', y') \in K \times K$ existe un par $(x'', y'') \in H \times H$ tal que

$$x''(x'a) = y''(y'b)$$

y

$$xa = yb$$

con $x = x''x' \in K$ e $y = y''y' \in K$.

Para cada una de las clases $K = K_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ escribiremos

$$(a, a') \sim (b, b')$$

en $K \times K$ si y sólo si existe un par $(x, y) \in K \times K$ que satisface

$$xa = yb \text{ y } xa' = yb'.$$

De manera análoga que antes se ve :

1. $(a, a') \sim (a, a')$.
2. Si $(a, a') \sim (b, b')$ se sigue $(b, b') \sim (a, a')$.
3. Si $(a, a') \sim (b, b')$ y $(b, b') \sim (c, c')$ se tiene $(a, a') \sim (c, c')$.

Por tanto, para todo par $(a, a') \in K \times K$,

$$[a, a'] = \{(x, x') \mid (a, a') \sim (x, x')\}$$

es una clase de equivalencia.

Sea G el conjunto de todas las clases $\bar{a} = [a, a']$ con $(a, a') \in K \times K$ dotado de la ley de composición interna siguiente :

Definimos la multiplicación de los elementos $\bar{a} = [a, a']$ y $\bar{b} = [b, b']$ de G poniendo

$$\bar{a}\bar{b} = [xa, yb']$$

si $xa' = yb$ y $\{x, y\} \subset K$.

Esta operación está bien definida, es decir, $\bar{a}\bar{b}$ es independiente del par (x, y) y de los representantes (a, a') y (b, b') de $\bar{a}$ y $\bar{b}$, puesto que :

a) Si los pares (x, y) y (u, v) de elementos de K satisfacen

$$xa' = yb \text{ y } ua' = vb$$

se tiene

$$[xa, yb'] = [ua, vb'].$$

En efecto, como se puede encontrar un par $(t, s) \in K \times K$ de forma que

$$tx = su,$$

tendremos

$$(ty)b = (tx)a' = (su)a' = (sv)b$$

y, por consiguiente,

$$t(xa) = s(ua)$$

y

$$t(yb') = s(vb')$$

en virtud de P_5. Luego

$$[xa, yb'] = [ua, vb'].$$

b) Si $\bar{b} = \bar{c}$ resulta $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{c}$. En efecto, si $xa' = yb$ y $(x, y) \in K \times K$ es

$$\bar{a}\bar{b} = [xa, yb'].$$

Por otra parte, como $\bar{b} = \bar{c}$ y $(x, y) \in K \times K$, existen dos pares (u, v) y (z, w) de elementos de K que satisfacen

$$ub = vc \text{ y } ub' = vc'$$

y

$$zy = wu.$$

De donde se deduce

$$(zx)a' = (zy)b = (wu)b = (wv)c$$

y, por tanto,

$$\bar{a}\bar{c} = [zxa, wvc'].$$

Finalmente, $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{a}\,\overline{c}$ puesto que

$$z(xa) = zxa,$$

$$z(yb') = wub' = wvc',$$

y

$$[xa,\ xa'] = [a,\ a']$$

para todo par $(a,\ a')$ de elementos de K y $x \in H$.

c) Si $\overline{b} = \overline{c}$ resulta $\overline{b}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}$. Basta proceder de manera análoga que en b).

Vamos a probar ahora que G es un grupo que contiene un subconjunto isomorfo a K y que, por tanto, podemos identificar con K. Para ello basta tener presente que en G se tiene :

Ley asociativa : $(\overline{a}\,\overline{b})\overline{c} = \overline{a}(\overline{b}\,\overline{c})$. Efectivamente, como evidentemente se pueden elegir los representantes de $\overline{a}$, $\overline{b}$ y $\overline{c}$ de modo que $a' = b$ y $b' = c$, resulta

$$(\overline{a}\,\overline{b})\overline{c} = [a,\ c'] = \overline{a}(\overline{b}\,\overline{c}).$$

Existencia de elemento neutro : $\overline{e}\,\overline{a} = \overline{a}\,\overline{e} = \overline{a}$ para todo $\overline{a} \in G$. Basta tomar $\overline{e} = [a,\ a]$ $(= [a',\ a'])$.

Existencia de elemento inverso : Para cada $\overline{a} \in G$ existe un $\overline{b} \in G$ tal que $\overline{a}\,\overline{b} = \overline{b}\,\overline{a} = \overline{e}$. Basta tomar $\overline{b} = [a',\ a]$.

La aplicación $\sigma : a \to [x,\ xa]$ $(x \in K)$ *de* K *en* G *es un isomorfismo.* En efecto,

$$[x,\ xa] = [y,\ ya]$$

para todo $y \in K$,

$$\sigma(ab) = [x,\ xab] = [x,\ xa]\,[xa,\ xab]$$
$$= \sigma\,(a)\,\sigma\,(b)$$

y si $\sigma\,(a) = \sigma\,(b)$ se tiene $a = b$ puesto que de

$$[x,\ xa] = [y,\ yb]$$

se deduce que existe un par $(u,\ v) \in K \times K$ que verifica

$$ux = vy \text{ y } uxa = vyb$$

y, por tanto, $a = b$ en virtud de P_4.

Sea G_λ el grupo construido a partir de la clase de equivalencia K_λ $(\lambda \epsilon \Lambda)$. Entonces, vamos a demostrar que para cada par $(y, y') \epsilon$ $\epsilon K_\mu \times K_\mu$ $(\mu \epsilon \Lambda)$ la correspondencia $[a, a'] \to [b, b']$ de G_λ en G_μ definida por

$$\begin{aligned}[b, b'] &= [v, vy] [ay, a'y'] [vy', v] \quad (v \epsilon K_\mu) \\ &= y(ay)^{-1} (a'y') (y')^{-1}\end{aligned}$$

es un isomorfismo $\sigma_{\mu\lambda}$ de G_λ sobre G_μ, independiente de (y, y'), tal que

$$\sigma_{\lambda\lambda} (\overline{a}) = \overline{a} \text{ y } \sigma_{\nu\mu} (\sigma_{\mu\lambda} (\overline{a})) = \sigma_{\nu\lambda} (\overline{a})$$

para todo $a \epsilon G_\lambda$. Haremos esto en cuatro pasos :

1. Si $[a_1, a'_1] = [a_2, a'_2]$ (ϵG_λ) se tiene $[a_1 y, a'_1 y'] = [a_2 y, a'_2 y']$. En efecto, como

$$x_1 a_1 = x_2 a_2 \text{ y } x_1 a'_1 = x_2 a'_2$$

para un cierto par $(x_1, x_2) \epsilon K_\lambda \times K_\lambda$, resulta

$$x_1 (a_1 y) = x_2 (a_2 y) \text{ y } x_1 (a'_1 y') = x_2 (a'_2 y')$$

y, por tanto,

$$[a_1 y, a'_1 y'] = [a_2 y, a'_2 y'].$$

2. $(ay_1) y_1^{-1} = (ay_2) y_2^{-1}$ para todo par (y_1, y_2) de elementos de K_μ. Efectivamente, si $[v, v'] = (ay_1) y_1^{-1}$, tendremos

$$vay_1 = v'y_1,$$

de donde por P_5 resulta

$$vay_2 = v'y_2$$

y, por consiguiente, $[v, v'] = (ay_2) y_2^{-1}$.

3. $\sigma_{\mu\lambda} (\overline{a}_1 \overline{a}_2) = \sigma_{\mu\lambda} (\overline{a}_1) \sigma_{\mu\lambda} (\overline{a}_2)$. En efecto, si tomamos $a'_1 = a_2$ resulta

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\lambda} (\overline{a}_1 \overline{a}_2) &= y (a_1 y)^{-1} (a'_2 y) y^{-1} \quad (y \varepsilon K_\mu) \\ &= y(a_1 y)^{-1} (a'_1 y) y^{-1} . y (a_2 y)^{-1} (a'_2 y) y^{-1} \\ &= \sigma_{\mu\lambda} (\overline{a}_1) \sigma_{\mu\lambda} (\overline{a}_2).\end{aligned}$$

4. $\sigma_{\lambda\lambda}(\bar{a}) = \bar{a}$ y $\sigma_{\nu\mu}(\sigma_{\mu\lambda}(\bar{a})) = \sigma_{\nu\lambda}(\bar{a})$ para todo $\bar{a} \in G_\lambda$. Lo primero es inmediato y para probar lo segundo basta tener presente que si

$$\bar{b} = [b, b'] = \sigma_{\mu\lambda}(\bar{a}) \quad (\bar{a} \in G_\lambda)$$

y

$$\bar{c} = [c, c'] = \sigma_{\nu\mu}(\bar{b}) \quad (\bar{b} \in G_\mu)$$

resulta

$$(ay)^{-1}(a'y) = (by)^{-1}(b'y)$$

para todo $y \in K_\mu$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \bar{c} &= z(bz)^{-1}(b'z)z^{-1} \\ &= z(az)^{-1}(a'z)z^{-1} \\ &= \sigma_{\nu\lambda}(\bar{a}) \end{aligned}$$

si tomamos $z = yw$ con $w \in K_\nu$.

Finalmente, si en

$$\bar{H} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

definimos la multiplicación de $\bar{a} \in G_\lambda$ y $\bar{b} \in G_\mu$ $(\{\lambda, \mu\} \subset \Lambda)$ poniendo

$$\overrightarrow{\bar{a}\bar{b}} = \bar{c}$$

si y sólo si $\bar{c} \in G_\mu$ y

$$\sigma_{\nu\lambda}(\bar{a})\,\sigma_{\nu\mu}(\bar{b}) = \sigma_{\nu\mu}(\bar{c})$$

para todo $\nu \in \Lambda$ (9), se deduce que $\bar{H}$ es una tribu que, como demostramos a continuación, contiene un conjunto isomorfo al grupoide dado H que podemos identificar con éste. Efectivamente, si $\bar{a} = [x, xa] \in G_\lambda$ y $\bar{b} = [y, yb] \in G_\mu$, como existe un par $(u, v) \in K_\mu \times K_\mu$ que satisface

$$uxb = vb \quad (xb \in K_\mu)$$

resulta

$$\begin{aligned} \sigma_{\mu\lambda}(\bar{a})\,\sigma_{\mu\mu}(\bar{b}) &= b(uxb)^{-1}(uxab) \\ &= b(vb)^{-1}(uxab) \\ &= v^{-1}(uxab) = [v, vab] \\ &= \sigma_{\mu\mu}(\overrightarrow{ab}) \end{aligned}$$

puesto que por P_5 se tiene

$$uxab = vab.$$

(9) Por 4 es suficiente para esto que se verifique para algún $\nu \in \Lambda$.

OBSERVACIÓN. *En general, un grupoide asociativo con las propiedades* P_4, P_5 *y* P_6 *no se puede sumergir en un grupo, pues, cualquier tribu posee dichas propiedades.*

TEOREMA 7. *Sea* H *un grupoide asociativo con las propiedades* P_4, P_5 *y* P_6 *y* $\overline{H}$ *la tribu anteriormente construida:* $\overline{H} \supset H$. *Entonces, todo isomorfismo* σ *de* H *en una tribu* H^* *se puede prolongar de una sola forma en un isomorfismo* $\overline{\sigma}$ *de* $\overline{H}$ *en* H^*.

DEMOSTRACIÓN. Comenzaremos probando que $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ ($\{a, b\} \subset H$) pertenecen a un mismo grupo G_λ^* ($\lambda \in \Lambda^*$) de la familia que define H^* si y sólo si $a \sim b$. En efecto, si $a \sim b$ existe un par $(x, y) \in H \times H$ tal que $xa = yb$ de donde se deduce

$$\sigma(x)\sigma(a) = \sigma(y)\sigma(b)$$

y, por tanto, que $\sigma(a)$ y $\sigma(b)$ pertenecen a un mismo grupo G^*_λ, constituyente de H^*. Recíprocamente, si $\{\sigma(a), \sigma(b)\} \subset G_\lambda^*$, como por P_6 existe un par $(x, y) \in H \times H$ que satisface

$$xac = ybc \quad (c \in H),$$

tendremos

$$\sigma(xa)\sigma(c) = \sigma(yb)\sigma(c)$$

y

$$\sigma(xa) = \sigma(yb) \text{ y } xa = yb\colon\ a \sim b,$$

puesto que $\sigma(xa) = \sigma(x)\sigma(a)$ y $\sigma(yb) = \sigma(y)\sigma(b)$ pertenecen a G_λ^*.

A continuación vamos a ver que

$$\overline{a} = [a, a'] \to \sigma(a)^{-1}\sigma(a') \quad (a \sim a'),$$

donde $\sigma(a)^{-1}$ es el elemento inverso de $\sigma(a)$: $\sigma(a)\sigma(a)^{-1} = \sigma(a)^{-1}\sigma(a) \in E^*$, es un isomorfismo $\overline{\sigma}$ de $\overline{H}$ en H^* que prolonga a σ. Demostraremos esto en cuatro partes :

1. *Si* $[a, a'] = [b, b']$ *se tiene*

$$\sigma(a)^{-1}\sigma(a') = \sigma(b)^{-1}\sigma(b').$$

En efecto, si

$$xa = yb \text{ y } xa' = yb'$$

para un par $(x, y) \in H \times H$, resulta

$$\sigma(x)\sigma(a) = \sigma(y)\sigma(b) \text{ y } \sigma(x)\sigma(a') = \sigma(y)\sigma(b')$$

y, por consiguiente,

$$\sigma(a)^{-1}\,\sigma(a') = \sigma(b)^{-1}\,\sigma(b').$$

2. *Si* $\bar{\sigma}(\bar{a}) = \bar{\sigma}(\bar{b})$ *se tiene* $\bar{a} = \bar{b}$. Efectivamente, si

$$\sigma(a)^{-1}\,\sigma(a') = \sigma(b)^{-1}\,\sigma(b') \qquad (a \sim a' \wedge b \sim b'),$$

$\sigma(a')$ y $\sigma(b')$ pertenecen a un mismo grupo $G_\lambda{}^*$ constituyente de H^*, de donde se deduce $a \sim a' \sim b' \sim b$ y

$$xa = yb$$

para un par (x, y) de elementos pertenecientes a la misma clase de equivalencia K que a y b. Por tanto,

$$\sigma(xa)^{-1}\,\sigma(xa') = \sigma(yb)^{-1}\,\sigma(yb'),$$

$$\sigma(xa') = \sigma(yb'),$$

$$xa' = yb'$$

y

$$[a, a'] = [b, b'].$$

3. $\bar{\sigma}(a) = \sigma(a)$ *para todo* $a \in H$. Basta tener presente que

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(a) &= \sigma(x)^{-1}\,\sigma(xa) \qquad (a \sim x)\\ &= \sigma(a).\end{aligned}$$

4. $\bar{\sigma}(\bar{a}\bar{b}) = \bar{\sigma}(\bar{a})\,\bar{\sigma}(\bar{b})$. Sea

$$\bar{a} = [a, a'] \in G_\lambda \text{ y } \bar{b} = [b, b'] \in G_\mu \quad (\{\lambda, \mu\} \subset \Lambda).$$

Entonces, si $\lambda = \mu$, se sigue inmediatamente la afirmación tomando $a' = b$. Si $\lambda \neq \mu$, teniendo en cuenta esto y 3, resulta:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(\bar{a}\bar{b}) &= \bar{\sigma}(y\,(ay)^{-1}\,(a'y)\,y^{-1}\,b^{-1}\,b') \qquad (y \sim b)\\ &= \bar{\sigma}(y)\,\bar{\sigma}(ay)^{-1}\,\bar{\sigma}(a'y)\,\bar{\sigma}(y)^{-1}\,\bar{\sigma}(b)^{-1}\,\bar{\sigma}(b')\\ &= \sigma(y)\,(\sigma(a)\,\sigma(y))^{-1}\,(\sigma(a')\,\sigma(y))\,\sigma(y)^{-1}\,\sigma(b)^{-1}\,\sigma(b')\\ &= \sigma(a)^{-1}\,\sigma(a')\,\sigma(b)^{-1}\,\sigma(b')\\ &= \bar{\sigma}(\bar{a})\,\bar{\sigma}(\bar{b}).\end{aligned}$$

Finalmente, si $\bar{\sigma}$ es un isomorfismo de $\overline{H}$ en H^* que prolonga a σ, se deduce

$$\bar{\sigma}(a)\,\bar{\sigma}(\bar{a}) = \bar{\sigma}(\bar{a}')$$

y, por consiguiente,

$$\bar{\sigma}(\bar{a}) = \sigma(a)^{-1}\,\sigma(a').$$

BIBLIOGRAFIA

[1] MALCEV, A.—*On the Inmersion of an Algebraic Ring into a Field.*—Math. Ann., vol. 113 (1937), págs. 686-691.

[2] ORE, O.—*Linear Equations in non-conmutative Fields.*—Ann. of Math., vol. 32 (1931), págs. 463-477.

[3] PI CALLEJA, P.—*Sobre las condiciones mínimas que definen un grupo.* XXVI Congreso Luso-Español para el Progreso de las Ciencias (1962).

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA