APROXIMACION DE FUNCIONES HOLOMORFAS EN UNA SEMIFAJA POR SUMAS DE EXPONENCIALES

por

F. Sunyer Balaguer

El objeto de este artículo es el estudio de las propiedades de las funciones holomorfas en una semifaja vertical que pueden representarse con una b-precisión logarítmica por mediación de sumas de exponenciales, a cuya sucesión $\{\lambda_n\}$ de los exponentes se le suponen determinadas propiedades, una de ellas la de estar formada por números reales.

El teorema I demuestra que, bajo ciertas condiciones que detallaremos en el enunciado, si la función puede representarse con una b-precisión logarítmica suficientemente fuerte, esta función será holomorfa no solamente en la semifaja sino en la totalidad de la faja vertical.

El teorema II afirma que, bajo las mismas condiciones que en el teorema I y suponiendo, además, que el índice de condensación de $\{\lambda_n\}$ es suficientemente pequeña, la función no solamente es holomorfa sino que es casi periódica en una determinada faja interior a la de holomorfia. Este resultado generaliza un resultado de Genuys [1] (1), pues el resultado de Genuys llega a la misma conclusión pero con hipótesis mucho más restrictivas.

El teorema III es una generalización del teorema I que hubiésemos podido dar en lugar de este último, pero hemos creido que a fin de facilitar la visión de conjunto, simplificar la demostración y no complicar las notaciones era preferible exponer primeramente la forma menos general.

Yo creo que de estos teoremas, o mejor aún de los métodos utilizados en sus demostraciones, pueden deducirse una gran cantidad de resultados muy interesantes, una parte de ellos he podido ya de-

---

(1) Los números entre paréntesis angulares remiten a la bibliografía.

mostrarlos y otra parte están ya casi resueltos. Todos ellos formarán parte de una extensa Memoria que tengo la intención de publicar ([1]).

1. Sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números tales que $0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}$, $\lim \lambda_n = \infty$ y supongamos que la densidad máxima de esta sucesión es finita. Para las propiedades de la densidad máxima y para la definición del índice de condensación de $\{\lambda_n\}$ véase BERNSTEIN [2], no obstante y para mayor comodidad del lector, señalaremos que representando por $N(\lambda)$ el número de términos de $\{\lambda_n\}$ tales que $\lambda_n < \lambda$ la densidad máxima se define por

$$D = \lim_{x \to 1} \overline{\lim_{\lambda \to \infty}} \frac{N(\lambda) - N(x\lambda)}{\lambda - x\lambda}$$

y que la sucesión se llama medible y de densidad D si $\lim N(\lambda)/\lambda$ existe y es igual a D. Según puede verse en [2], la densidad máxima de una sucesión es igual al extremo inferior de las densidades de las sucesiones medibles que la contienen, y además, siempre existe una sucesión medible que contiene $\{\lambda_n\}$ y cuya densidad es igual a este extremo inferior.

Si bien en una Memoria anterior [3] dimos ya la definición de la b-precisión logarítmica (generalización de la precisión logarítmica de MANDELBROJT) daremos aquí la definición para el caso particular que nos interesa. Sea Δ la semifaja vertical del plano de las $s = \sigma + it$ definida por

$$|\sigma| < g, \quad t > 0$$

y sea E la clase de las combinaciones lineales de $\{e^{\pm\lambda_n s}\}$, es decir, la clase formada por expresiones de la forma

$$\varphi(s) = \sum_1^m (a_n e^{-\lambda_n s} + b_n e^{\lambda_n s})$$

llamadas también polinomios de DIRICHLET correspondientes a la sucesión de los exponentes $\{\pm\lambda_n\}$. Entonces daremos la siguiente:

DEFINICIÓN DE LA b-PRECISIÓN LOGARÍTMICA. Si $F(s)$ es holomorfa en Δ y si

$$\operatorname*{Inf}_{\varphi \in E} \quad \operatorname*{Sup}_{\substack{x \leq t \leq x+b \\ s \in \Delta}} \quad | F(s) - \varphi(s) | \leq e^{-p(x)}$$

([1]) Estas investigaciones son llevadas a cabo bajo contrato con la U.S. Navy.

donde $p(x)$ es una función no decreciente que tiende a $+\infty$ (esta función puede ser igual $a+\infty$ para x suficientemente grande) entonces diremos que los $\varphi(s)\epsilon E$ representan $F(s)$ en Δ con una b-precisión logarítmica $p(x)$.

A continuación vamos a dar la definición de una hipótesis fundamental en nuestros resultados. Podríamos darle una forma algo más general, pero creemos que lo que ganaríamos en generalidad no compensaría la complicación introducida en la difinición y en las demostraciones correspondientes.

Definición de la hipótesis B. Si para $h > 0$ suficientemente pequeña se cumple

$$\int^{\infty} p(t) \exp\left(-\frac{\pi}{2}\frac{t}{g-h}\right) dt = \infty$$

diremos que la cantidad g y la función $p(t)$ verifican la hipótesis $B(g, p(t))$.

Una vez dadas estas definiciones podemos enunciar ya el resultado del que hemos hablado en primer lugar en la introducción.

Teorema I. *Si*

1.º $\{\lambda_n\}$ *es tal que* $0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}$, $\lim \lambda_n = \infty$ y $D < \infty$, *donde* D *es la densidad máxima de* $\{\lambda_n\}$

2.º *En la semifaja* $\Delta = \{|\sigma| < g,\ t > 0\}$, $F(s)$ *es holomorfa y los* $\varphi(s)\epsilon E$ *la representan en la* Δ *con una b-precisión logarítmica* $p(t)$ *con* $b > 2\pi D$

3.º *Se cumple la hipótesis* B $(g, p(t))$
entonces $F(s)$ *es holomorfa en la totalidad de la faja* $|\sigma| < g$.

2. La demostración de este teorema se apoya sobre dos lemas. A saber:

Lema 1. *Sea* $\{\lambda_n\}$ *una sucesión de números positivos que cumplen las condiciones* $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ *y* $\lim (n/\lambda_n) = D < \infty$, *y pongamos*

$$\Lambda(z) = \prod_{1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n{}^2}\right) \qquad \Lambda_m(z) = \prod_{m}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n{}^2}\right)$$

representando por

$$\Phi(s) = \int_0^\infty \Lambda(z)\, e^{-sz}\, dz$$

y

$$\Phi_m(s) = \int_0^\infty \Lambda_m(z) e^{-sz}\, dz$$

las respectivas transformadas de LAPLACE ($\Phi(s)$ *y* $\Phi_m(s)$ *representarán también sus prolongaciones analíticas*) *entonces al exterior del dominio definido por*

$$(2,1) \qquad |t| < \pi D + \varepsilon, \quad |\sigma| < \varepsilon$$

tendremos uniformemente

$$\lim_{m \to \infty} \Phi_m(s) = 1/s.$$

Este lema se demuestra del siguiente modo: En primer lugar es fácil demostrar que escribiendo

$$P_m(z) = \prod^{m} \left(1 - \frac{D^2 z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

y poniendo $z = re^{i\alpha}$, para $r > r_\alpha$ y $\alpha \neq 0$ se cumple

$$|P_m(z)| > \min\left(1, \left|\frac{\operatorname{sen} \pi D z}{\pi D z}\right|\right)$$

para cualquier entero positivo m.

Por lo tanto, aplicando un resultado de BERNSTEIN [2, note II n.º 3, pág. 276] se sigue, para $r > r_\alpha$ y $\alpha \neq 0$,

$$(2,2) \qquad |\Lambda_m(z)| < |\Lambda(z)|\, e^{\varepsilon|z|} / \min\left(1, \left|\frac{\operatorname{sen} \pi D z}{\pi D z}\right|\right)$$

cualquier que sea el entero positivo m.

Por otra parte, según las propiedades conocidas de la transformada de LAPLACE de una función entera (véase, por ejemplo, BERNSTEIN [2, note III], es posible elegir cuatro valores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 tales que los

$$(2,3) \qquad \Phi_{m,j}(s) = \int_0^\infty e^{-i\alpha_j} \Lambda_m(xe^{-i\alpha_j})\, e^{-sxe^{-i\alpha_j}}\, dx \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

son convergentes, respectivamente, en cuatro semiplanos cuya unión recubre la totalidad de los puntos exteriores al dominio (2, 1). Además, en estos semiplanos los integrales representan la transformada de LAPLACE de $\Lambda_m(z)$ o su prolongación analítica.

De (2,2) se sigue fácilmente que eligiendo convenientemente los cuatro valores de $\alpha \neq 0$ las $\Phi_{m,j}(s)$ de (2,3) son uniformemente convergentes para m entero positivo y para s interior a un ángulo A_j, además resulta también que la reunión de estos cuatro ángulos cubre la totalidad de los puntos exteriores a (2,1). De la convergencia uniforme de los (2,3) respecto a m y del hecho evidente que para cualquier valor finito de z

$$\lim_{m\to\infty} \Lambda_m(z) = 1$$

se sigue

$$\lim_{m\to\infty} \Phi_{m,j}(s) = 1/s$$

uniformemente para $s \epsilon A_j$. Y puesto que $\Phi_{m,j}(s)$ es la prolongación analítica de $\Phi_m(s)$ resulta, teniendo en cuenta que la reunión de los A_j cubre la totalidad del plano exterior a (2, 1), que

$$\lim_{m\to\infty} \Phi_m(s) = 1/s$$

uniformemente al exterior de (2, 1), o sea la afirmación del lema.

3. Antes de enunciar y demostrar el lema 2, debemos explicar algunas notaciones que emplearemos. Sean k_1 y k_2 dos números finitos cualesquiera y G_1 y G_2 dos conjuntos del plano de las s; entonces representaremos por $k_1G_1 + k_2G_2$ al conjunto

$$\{s \mid s = k_1s_1 + k_2s_2,\ s_1 \epsilon G_1,\ s_2 \epsilon G_2\};$$

además, representaremos por U al círculo $|s| \leq 1$ y por J al segmento vertical $(-i\pi, +i\pi)$. Ahora podemos enunciar y demostrar el

LEMA 2. *Si*

1.º $\{\lambda_n\}$ *es tal que* $0 \leq \lambda_n < \lambda_{n+1}$ *y tiene como densidad máxima* $D < \infty$

2.º *Existe un número* $\eta > 0$ *y un conjunto abierto* G_1, *un dominio conexo* G_2 *tal que* $F(s)$ *es holomorfa en* $G_1 + G_2$ y que $DJ + \eta U \subset G_1$

3.º *Para una sucesión* $\{\mu_n\}$ *de densidad* D *que contiene la* $\{\lambda_n\}$ *existe una sucesión de números naturales* $\{n_k\}$, *con* $\lim n_k = \infty$ *y tal que escribiendo*

$$C_k(z) \begin{cases} = z \prod\limits_{0<\lambda_n<\mu_{n_k}} \left(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \prod\limits_{n_k}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z^2}{\mu_n^2}\right) & \text{si } 0 \in \{\lambda_n\} \\ = \prod\limits_{\lambda_n<\mu_{n_k}} \left(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \prod\limits_{n_k}^{\infty} \left(1 - \dfrac{z^2}{\mu_n^2}\right) & \text{si } 0 \notin \{\lambda_n\} \end{cases}$$

y representando por $Q_k(s)$ *su transformado de* LAPLACE, *la identidad*

$$\oint_{\Gamma} F(s + v) Q_k(v) dv \equiv 0$$

es válida si $s \in G_2$, *donde* Γ *es la frontera de* $DJ + \eta U$ *entonces* $F(s)$ *es límite uniforme en el interior de* G_2 *de los polinomios de* DIRICHLET *correspondiente a la sucesión* $\{\pm \lambda_n\}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $W(z)$ una función entera de orden 1 y tipo medio, con diagrama indicador contenido en $DJ + \eta U$, si

$$W(z) = \Sigma a_n z^n$$

es su desarrollo TAYLOR, la teoría de la transformación de LAPLACE permite deducir que la transformada $V(s)$ de $W(z)$ puede representarse al exterior de un determinado círculo por

$$V(s) = \sum a_n \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{3,1}$$

Del mismo modo la transformada de LAPLACE

$$W_1(z) = \left(1 - \frac{z^2}{\lambda_0^2}\right) W(z) = \sum \left(a_n - \frac{a_{n-2}}{\lambda_0^2}\right) z^n$$

podrá representarse por

$$V_1(s) = \sum \left(a_n - \frac{a_{n-2}}{\lambda_0^2}\right) \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{3,2}$$

Además, es conocido que lo mismo $V(s)$ que $V_1(s)$ son holomorfas al exterior del diagrama indicador conjugado de $W(z)$, o de $W_1(z)$, que evidentemente son el mismo.

Por otra parte, según las hipótesis del lema, la función $F(s + \beta u)$ es holomorfa en cada una de las tres variables mientras se cumplan $s \in G_2$, $u \in DJ + \eta U$ y $0 \leq \beta \leq 1$. Por lo tanto, las funciones

$$f(\beta, s) = \oint_{\Gamma} F(s + \beta u) V(u)\, du \tag{3,3}$$

$$f_1(\beta, s) = \oint_{\Gamma} F(s + \beta u) V_1(u)\, du$$

son holomorfas en los mismos conjuntos (cuando decimos que una función de β es holomorfa para $0 \leq \beta \leq 1$ evidentemente queremos indicar que la función es holomorfa en un dominio abierto que contiene el segmento $(0,1)$).

Ahora bien, si $|\beta|$ es muy pequeño la función

$$F(s + \beta u)$$

será holomorfa en un círculo $|u| \leq R$ de radio R suficientemente grande para que en la circunferencia sean válidos los desarrollos (3,1) y (3,2) y en ellos la convergencia sea uniforme. Por consiguiente, la teoría de los residuos permite escribir en este caso

$$f(\beta, s) = \Sigma\, a_n F^{(n)}(s) \beta^{n} \tag{3,4}$$

$$f_1(\beta, s) = \Sigma \left(a_n - \frac{a_{n-2}}{\lambda_0^2} \right) F^{(n)}(s) \beta^n. \tag{3,5}$$

De (3,4) y (3,5) se sigue

$$f_1(\beta, s) = f(\beta, s) - \frac{\beta^2}{\lambda_0^2} \frac{d^2 f(\beta, s)}{ds^2}$$

lo que simbólicamente puede escribirse

$$f_1(\beta, s) = \left(1 - \frac{\beta^2}{\lambda_0^2} \frac{d^2}{ds^2} \right) f(\beta, s).$$

por lo tanto, mediante prolongación analítica a lo largo del segmento $(0,1)$ la identidad anterior se convierte en

$$f_1(1, s) = \left(1 - \frac{1}{\lambda_0^2} \frac{d^2}{ds^2} \right) f(1, s). \tag{3,6}$$

Si hubiésemos escrito $W_1(z) = zW(z)$ entonces se puede demostrar que $f_1(1, s) = \dfrac{d}{ds} f(1, s)$.

Representante ahora por $M_k(s)$ la transformada de LAPLACE de

$$\prod_{n_k}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\mu_n^2}\right)$$

y escribiendo

$$h_k(s)=\oint_{\Gamma} F(s+u)\,Q_k(u)\,du$$

$$H_k(s)=\oint_{\Gamma} F(s+u)\,M_k(u)\,du$$

entonces aplicando repetidamente (3,6) para $s\epsilon G_2$ tendremos

$$h_k(s)=\begin{cases}\dfrac{d}{ds}\displaystyle\prod_{0<\lambda_n<\mu_{n_k}}\left(1-\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{d^2}{ds^2}\right)\mathrm{H}_k(s) & \text{si } 0\in\{\lambda_n\}\\[2ex] \displaystyle\prod_{\lambda_n<\mu_{n_k}}\left(1-\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{d^2}{ds^2}\right)H_k(s) & \text{si } 0\notin\{\lambda_n\}\end{cases}$$

y puesto que, según la condición 3.ª del lema suponemos que $h_k(s)=0$, para $s\epsilon G_2$; resulta, finalmente, que $H_k(s)$ es un polinomio de DIRICHLET correspondiente a los $|\pm\lambda_n|<\mu_{n_k}$.

Por otra parte del lema 1 se deduce fácilmente que $\lim H_k(s)=F(s)$ uniformemente en el interior de G_2. Lo cual termina la demostración del lema 2.

4. Pasemos ahora a la demostración del teorema I. En primer lugar, según la condición segunda para todo valor $t_0>0$ podremos determinar un $\varphi_{t_0}(s)\,\epsilon\,E$ tal que, para $|\sigma|<g$ y $t_0<t<t_0+b$ con $b>2\pi D$

$$|F(s)-\varphi_{t_0}(s)|<2e^{-p(t_0)} \tag{4,1}$$

por lo tanto, puede determinarse η suficientemente pequeña de modo que si $|\sigma_0|<g-\eta$, entonces si $s\,\epsilon\,s_0+i\pi D+DJ+\eta U$ se cumple la desigualdad (4,1).

De lo anterior resulta que

$$\left|\oint_{\Gamma}\Big(F(s_0+i\pi D+u)-\varphi_{t_0}(s_0+i\pi D+u)\Big)Q_k(u)\,du\right|<Ke^{-p(t_0)}$$

pero por otra parte es conocido el hecho que según la teoría de la transformación de LAPLACE

$$\oint_{\Gamma}\varphi(s_0+i\pi D+u)\,Q_k(u)\,du=0$$

para todo $\varphi(s) \in E$. Lo cual, unido a la desigualdad anterior, nos da

$$\left| \oint_{\Gamma} F(s_0 + i\pi D + u)\, Q_k(u)\, du \right| < K e^{-p(t_0)}.$$

Eligiendo η inferior a la h que interviene en la definición de la condición $B(g, p(t))$ resulta, teniendo en cuenta el teorema 2.2.VI de MANDELBROJT [4], que

$$\oint_{\Gamma} F(s + u)\, Q_k(u)\, du = 0$$

para $|\sigma| < g - h,\ t > \pi D$. Y aplicando el lema 2 resulta que en el interior de esta semifaja $F(s)$ es el límite de una sucesión de polinomios de DIRICHLET correspondientes a $\{\pm \lambda_{\cdot}\}$, y este límite es uniforme en todo dominio acotado interior a la semifaja citada.

Aplicando un resultado de SCHWARTZ [5| Propiete P VIII, página: 135-136| válido para cualquier rectángulo de lados paralelos a los ejes y de altura superior a $2\pi D$, y teniendo en cuenta que h puede ser tan pequeña como se quiere, resulta que $F(s)$ es igual a la suma de dos funciones $F_1(s)$ y $F_2(s)$ tal que $F_1(s)$ es holomorfa para $\sigma > -g$ y en cualquier dominio finito de este semiplano es el límite de polinomios de DIRICHLET de la forma

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s}$$

mientras que $F_2(s)$ es holomorfa en el semiplano $\sigma < + g$ y en cualquier dominio finito de éste es el límite de polinomios de DIRICHLET de la forma

$$\sum b_n e^{+\lambda_n s}$$

Y puesto que $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$, esto demuestra el teorema.

5. TEOREMA II. *Si con las mismas hipótesis que el teorema I suponemos, además, que el índice de condensación δ de $\{\lambda_{\cdot}\}$ verifica $\delta < g$, entonces $F(s)$ será casi periódica en la totalidad de la faja $|\sigma| < g - \delta$.*

DEMOSTRACIÓN. Con las mismas notaciones que en el número anterior resulta en realidad que la afirmación del resultado de SCHWARTZ es que $F_1(s)$ puede representarse en el plano $\sigma > -g$ por

$$F_1(s) = \lim S_{n_k}(s)$$

donde $\{n_k\}$ es una sucesión creciente de números naturales y donde $S_n(s)$ son las sumas parciales de la serie de DIRICHLET de la forma

$$\sum a_n e^{-\lambda_n s} \tag{5,1}$$

Por otra parte, según un resultado de POLYA-BERNSTEIN no se restringe la generalidad suponiendo que la sucesión $\{\lambda_n\}$ es medible, pues en caso contrario podrá formarse una sucesión medible que contenga $\{\lambda_n\}$ de densidad igual a la densidad máxima de esta última y del mismo índice de condensación δ.

Del hecho que $F_1(s)$ es holomorfa en $\sigma > -g$ razonando como hace GALLIE [6] obtendremos una acotación para los a_n de (5,1) de la forma

$$|a_n| < Ke^{\lambda_n(-g+\delta+\varepsilon)}$$

donde $\varepsilon > 0$ es arbitraria. De esta acotación se sigue inmediatamente, puesto que suponemos $\{\lambda_n\}$ de densidad máxima finita, que la serie (5,1) es absolutamente convergente en $\sigma > -g + \delta$.

Como puede demostrarse del mismo modo que $F_2(s)$ es la suma de una serie

$$\sum b_n e^{\lambda_n s}$$

absolutamente convergente para $\sigma < g - \delta$. Y puesto que, según indicamos, $F(s) = F_1(s) + F_2(s)$, de un resultado clásico de la teoría de las funciones casi periódicas resulta el teorema.

6. Definiendo ahora, siguiendo a MANDELBROJT la densidad media superior de $\{\lambda_n\}$ escribiremos

$$\overline{D}^{\cdot} = \overline{\lim} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{N(x)}{x} \, dx$$

entonces puede demostrarse que existen sucesiones para las cuales $\overline{D}^{\cdot} < D$, donde como anteriormente D es la densidad máxima.

Por otra parte, sea

$$\Lambda(z) \begin{cases} = z\,\Pi\left(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right) & \text{si } 0 \in \{\lambda_n\} \\ = \Pi\left(1 - \dfrac{z^2}{\lambda_n^2}\right) & \text{si } 0 \notin \{\lambda_n\} \end{cases}$$

y escribamos

$$L(s) = \int_0^\infty A(z)\, e^{-sz}\, dz$$

entonces daremos la siguiente definición:

Definición de la condición A. Si existe una función no creciente $h(t)$ tal que $\lim h(t) = h$ y

$$h < g, \qquad \log L(h(t)) < p(t) + M \qquad (M < \infty)$$

$$\int^{\infty} (p(t) - \log L(h(t)))\, \exp\left(-\frac{\pi}{2}\int^{x} \frac{dx}{g - h(x)}\right) dt = \infty$$

diremos que g, $p(t)$ y $\{\lambda_n\}$ verifican la condición $A(g, p(t), \{\lambda_n\})$.

Con estas definiciones es suficiente suponer que en la condición 2.º del teorema I se cumple $b > 2\pi \overline{D}^{\cdot}$ en lugar de $b > 2\pi D$, y que en la condición 3.ª se cumple la hipótesis $A(g, p(t), \{\lambda\})$ en lugar de la hipótesis $B(g, p(t))$ para que la conclusión del teorema continúe siendo válida.

7. Hasta ahora hemos supuesto en realidad que la clase de los polinomios de Dirichlet $\varphi(s)$ que hemos utilizado para representar $F(s)$ con una determinada b-precisión logarítmica eran correspondientes a una sucesión de exponentes simétricas respecto al cero Actualmente procederemos de un modo diferente:

Sea $\{\lambda_n\}$ $(-\infty < +\infty)$ una sucesión tal que $\lambda_n < 0$ para $n < 0$, $\lambda_0 = 0$ y $\lambda_n > 0$ cuando $n > 0$, y $\lambda_n < \lambda_{n+1}$. Entonces definiremos la densidad $\underset{(n>0)}{\text{máxima}}$ D_1, media superior $\overline{D}^{\cdot}_1$ y el índice de condensación δ_1 para $\{\lambda_n\}$ $(n > 0)$, igual que lo hemos hecho anteriormente y la densidad máxima D_2, media superior $\overline{D}^{\cdot}_2$ y el índice de condensación δ_2 para $\{\lambda_n\}$ $(n < 0)$ como las mismas cantidades definidas igual que anteriormente correspondientes a $\{-\lambda_n\}$ $(n < 0)$.

Si ahora representamos por D y por $\overline{D}^{\cdot}$ la densidad máxima y la densidad media superior de la sucesión formada por la reunión de la $\{\lambda_n\}(n > 0)$ y $\{-\lambda_n\}(n < 0)$ los elementos comunes, siendo contados una sola vez es fácil demostrar que

$$D \leq D_1 + D_2 \tag{7,1}$$

$$\overline{D}^{\cdot} \leq \overline{D}^{\cdot}_1 + \overline{D}^{\cdot}_2 \tag{7,2}$$

Ahora podemos enunciar y nos sería fácil demostrar, variando la demostración del teorema I, el

TEOREMA III. *Si*

1.º $\{\lambda_n\}$ *es tal que* $\lambda_n < \lambda_{n+1}$, $\lambda_0 = 0$, $\lim\limits_{n\to-\infty} \lambda_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$ y $D_1 < \infty$, $D_2 < \infty$

2.º *En la semifaja* $\Delta = \{|\sigma| < g,\ t > 0\}$, $F(s)$ *es holomorfa y los* $\varphi(s) \in E^{\cdot}$(1) *la representan en* Δ *con una b-precisión logarítmica* $p(t)$, *con* $b > 2\pi(D_1 + D_2)$

3.º *Se cumple la hipótesis* B $(g,\ p(t))$ *entonces* $F(s)$ *es holomorfa en la totalidad de la faja* $|\sigma| < g$.

OBSERVACIÓN. En realidad, para la validez de este teorema es suficiente suponer $b > 2\pi D$, donde D es la cantidad definida en este número y que interviene en la (7,1).

8. Igual que en el teorema II si suponemos las mismas hipótesis que en el teorema III y que además se cumple $\delta_1 + \delta_2 < 2g$ la conclusión adicional será: $F(s)$ es casi periódica en

$$-g + \delta_1 < \sigma < g - \delta_2.$$

Por otra parte, si en lugar de la densidad máxima se toma la densidad media superior, puede obtenerse un resultado semejante la teorema II y otro semejante al teorema III; para ello basta suponer que la cantidad $\overline{D}^{\cdot}$ definida en el número 7 y que interviene en la desigualdad (7,2) cumple

$$\pi \overline{D}^{\cdot} < g, \qquad 2\pi \overline{D}^{\cdot} < b,$$

y que en lugar de la hipótesis B $(g,\ p(t))$ se cumple una hipótesis semejante a la A $(g,\ p(t),\ \{\lambda_n\})$.

(1) $E^{\cdot}$ representa la clase de los polinomios de DIRICHLET correspondientes a la reunión de $\{\lambda_n\}$ y de $\{-\lambda_n\}$.

BIBLIOGRAFIA

1. GENUYS, F. — *Sur les fonctions presque périodiques dans une bande* (Comptes Rendus Acad. Paris t. 234, pag. 1939-1941, 1952).

2. BERNSTEIN, V. — *Leçons sur les progres récents de la theorie des series de* DIRICHLET (Paris 1933).

3. SUNYER BALAGUER, F. — *Aproximación de funciones por sumas de exponenciales* (Collectanea Math. vol. V, pag. 241-267, 1952).

4. MANDELBROJT, S. — *Series adhérentes, Régularisation des suites*. Applications (Paris 1952).

5. SCHWARTZ, L. — *Étude des sommes d'exponentielles*. (Actualités Scientifiques et Industrielles 959, Deucième édition).

6. GALLIE, T. M. — *Mandelbrojt's inequality and Dirichlet series with complex exponents* (Trans. Am. Math. Soc. vol. 90, pag. 57-72, 1959).

Vilajoan, septiembre 1962