4. HISTORIA Y ENSEÑANZA

SMALLPOX AND THE MEMORY OF D. BERNOULLI. AN EARLY EXAMPLE OF APPLIED STATISTICS

José Antonio Camúñez Ruiz*, **Francisco Javier Ortega Irizo**

Departamento de Economía Aplicada I
Universidad de Sevilla

Abstract

An early example of application of the statistics to a real problem of epidemiology can be found in the Memory presented by D. Bernoulli in the Academy of the Sciences of Paris, in 1760, supporting inoculation as a preventive system against the smallpox. From the life table of Halley, and proposing a mathematical model of behavior of the disease, Bernoulli presents another one for a free population of smallpox and does a comparison between them and between their life expectancies.

In this article we analyze and value the content of this memory using, in addition, a more ordinary and nearby language.

Keywords: Smallpox, Inoculation, Life Table, History of the Probability and Statistics, 18th century.

1. La inoculación contra la viruela

La viruela es una enfermedad infecciosa muy contagiosa, de origen viral y que ha sido totalmente erradicada desde 1977. La viruela fue una plaga terrible y temida. Las estimaciones (con poca base científica) situaban su mortalidad en una tasa de un enfermo de cada ocho o incluso mayor, según el momento del análisis. La enfermedad siempre quedó fuera del alcance de un tratamiento eficaz, siendo el único remedio contra ella el de la vacunación.

Previo a la vacunación se usó una técnica conocida como "inoculación" o "variolización". Tenía mayor riesgo que la vacunación, y tuvo su auge en Europa durante el siglo XVIII. Ese riesgo inherente dio lugar a una importante serie de investigaciones y discusiones por parte de médicos, matemáticos, estadísticos y, en general, pensadores, a lo largo de dicho siglo, hasta la aparición de la vacuna, a principios del XIX. La nómina de investigadores sobre el asunto es extensa para ese periodo. Así, podemos citar, además de la Memoria de Daniel Bernoulli, las investigaciones de Charles Marie de La Condamine (1701-1774), Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Jean Trembley (1749-1811), Emmanuel Étienne Duvillard (1755-1832) y Joshua Milne (1776-1851). Un repaso breve de todos estos trabajos lo podemos encontrar en Daw R. H. (1979). Fagot-Largeault (1989) hace una amplia descripción de trabajo de los autores franceses, en particular de La Condamine.

Asociado a la viruela aparece el término "variola", palabra derivada del latín "varus" que significa pústula. El contagio de la enfermedad es directo, de humano a humano, pues no existen reservorios animales. La entrada del virus se produce normalmente a través de las vías respiratorias. El periodo de incubación es de 10 a 14 días. Aparecen escalofríos, fiebres, dolor de cabeza, náuseas... Tras estos síntomas se produce la erupción, caracterizada por la aparición de manchas rojas sobre la piel, que se convierten en vesículas, después en pústulas llenas de pus, dolorosas, densas y redondas, para acabar formando costras. Estas manifestaciones aparecen primero en la mucosa de la boca y faringe, luego en la cara y extremidades, para pasar después al tronco, a las palmas de las manos y pies. Las costras aparecen cerca del octavo o noveno día de evolución y, cuando se desprenden, dejan una cicatriz en la piel. Por tanto, es una enfermedad deformante que deja sus huellas para toda la vida. Las marcas

*Corresponding Author. E-mail: camunez@us.es

de viruela se observan en el 70 % de los supervivientes siendo las lesiones en el rostro las que prevalecen por la tendencia a la infección de las glándulas sebáceas. La enfermedad, si no mata al paciente, es inmunizante: cualquier infección por el mismo virus es imposible durante años.

Como primera práctica para erradicar el mal se usó la "inoculación", que consistía en introducir un hilo de seda impregnado de pus tomada de una pústula de viruela de alguien que sufriese la enfermedad, en una ligera incisión hecha en el brazo de la persona a inocular. El hilo era retirado al cabo de dos días. Se preparaba al paciente con una dieta ligera y se le aislaba durante una semana justo hasta que un breve acceso de fiebre junto con una erupción local marcaba la aparición de la enfermedad "artificial". El procedimiento era arriesgado, pues los inoculados podían acabar falleciendo por la propia enfermedad, contraída en este caso de forma voluntaria. Había estimaciones diversas, nada coincidentes, de la tasa de ese riesgo.

La técnica era muy antigua en China y se fue difundiendo a lo largo de la ruta de la seda hacia Europa Occidental a principios del siglo XVIII. La técnica prevaleció hasta que E. Jenner (1749-1823) descubrió en 1796 la vacuna (una especie de inoculación con viruela de vaca) como método mucho menos arriesgado (Jenner, 1798).

2. La memoria de Daniel Bernoulli

El 30 de abril de 1760, D. Bernolli (1700-1782) leyó una memoria en la Real Academia de las Ciencias de París titulada *Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*, la cual, sin embargo, no fue publicada hasta 1765. Esto no fue, seguramente, por azar teniendo en cuenta que d'Alembert, que ocupaba en la Academia una posición influyente, consiguió hacer publicar la suya en 1761. Este último criticó la solución del problema de la inoculación dado por "un sabio geómetra", sin nombrar a D. Bernoulli. Hemos de reconocer, sin embargo, que otras memorias leídas en la Academia en ese período también sufrieron retraso en su publicación. Por ejemplo, la de Trembley fue leída en 1796 y publicada en 1799.

D'Alembert (1761) no coge el punto de vista de la colectividad, sino únicamente el del individuo que debe elegir entre el riesgo inmediato de la inoculación, y el riesgo más distante de la enfermedad: se goza mejor de la vida cuando se es joven, dice él, y una ganancia de tres o cuatro años de vida media, perspectiva lejana (¿años de vejez?) no es suficiente para justificar que se exponga a morir en pocos días de una inoculación voluntaria.

D. Bernoulli, añadió una "Introducción Apologética" para la publicación de 1765. En ella declara que no estaba *sorprendido de que al vulgo le llame poco la atención este último aspecto, pero no puedo impedir estarlo cuando veo personas de mérito y de una gran reputación, plantearse seriamente si vale la pena sufrir una operación como la inoculación, con la esperanza de prolongar su vida en dos años: sería de desear que las críticas fuesen más reservadas y más circunspectas, y sobretodo que hiciesen el esfuerzo de ponerse en el hecho de las cosas que se proponen criticar por anticipado.* Como vemos, la nota es bastante mordaz, dada la cortesía de la época. La debilidad del texto de d'Alembert viene del hecho de su resistencia a la teoría de las probabilidades. Trembley (1799) lo dice sin ambages: "ha sustituido el análisis elegante del señor Bernoulli por una teoría matemática tan fuertemente matemática, que ni él ni nadie, que yo sepa, ha hecho aplicación". "El ilustre d'Alembert se precipita en la contienda", dice Duvillard (1806), apuntando algunos errores en la metafísica del cálculo que extrañan en el caso de "un tan grande geómetra", y añade una alabanza al trabajo de Bernoulli: "Este escrito, el mejor sin duda que haya sido publicado a favor de la inoculación, es notable por la finura, la precisión de las ideas, las visiones y las cosas que encierra".

Los argumentos de d'Alembert tienen sin embargo el interés de atraer la atención sobre dos hechos: las estimaciones relativas a la esperanza de vida de una población no son más que un elemento de valoración, entre otros, cuando se razona sobre la chance de sobrevivir de un individuo dotado de una cierta constitución; y la utilidad de una determinada solución debe evaluarse no sólo con la *cantidad* de vida que ofrece, sino también con su *calidad*.

Volviendo al trabajo de Bernoulli, éste dice haber compuesto su memoria sobre la mortalidad de la viruela a petición de Maupertuis (1698-1759, matemático, astrónomo y biólogo francés, con importantes trabajos en genética), que le había confiado su proyecto de exponer *"en una misma Tabla los dos estados de la humanidad, uno tal como es efectiva-*

mente, y otro tal como sería si se pudiese eximir de la viruela todo el género humano". Así, en esta importante memoria, D. Bernoulli presentó la primera doble tabla de vida decreciente de la historia de la ciencia, proponiendo para ello un modelo matemático de comportamiento de la viruela en una población. Y el autor añade: *"Pienso que el paralelismo de esto dos estados explicaría mejor la diferencia y el contraste, que cualquier comentario más amplio, pero he sentido también la dificultad del intento; y la insuficiencia de las listas mortuorias, que no señalan la edad de aquellos que la viruela se lleva, no hace más que poner un mayor obstáculo a estos enfoques."*

Así pues, la gran debilidad de este trabajo viene de la falta de datos empíricos. El único dato contrastado con el que D. Bernoulli contaba (según las listas de Süssmich, 1741, entre otros) es el de la proporción de mortalidad de viruela sobre el total de muertes, considerando todas las edades: *"Está constatado por una larga serie de observaciones que la viruela se lleva la treceava o catorceava parte de cada generación".* O sea, parte del supuesto contrastado que la suma de todas las muertes de viruela hace alrededor de 1/13 del total de las muertes, o sea, 100 sobre su generación de 1300 (de hecho, su tabla suma 101). En cuanto a lo que se llamará más tarde la letalidad de la enfermedad, este autor no tiene más que estimaciones muy fragmentarias: *"Se sabe... que esta enfermedad se lleva alrededor de la octava o la séptima parte de aquellos a los que le ataca, con tal que se tome la proporción sobre un gran número de epidemias;..."* Esto le servirá de soporte sobre el que apoyar las proporciones que introducirá después.

D. Bernoulli toma como base de cálculo la tabla de mortalidad establecida por el astrónomo inglés Halley (1693) que preparó con datos de la ciudad de Breslaw, y que nuestro autor conoció a través del autor alemán Süssmilch. Esta tabla no indica el número de niños recién nacidos. Su punto de partida es el número de supervivientes a la edad de un año, que considera igual a mil. Süssmilch (1741) supone que Halley había partido de una generación de 1238 niños, estimación del número de nacimientos en Breslaw para el período considerado, y para que sobrevivan 1000 a la edad de un año. D. Bernoulli tiene presente las tablas de Buffon, publicadas en 1749, que daban una mortalidad infantil mucho más elevada. Entonces, toma como punto de partida a la edad de cero años una cifra arbitraria de 1300 niños, intermedia entre las estimaciones de Buffon y de Süssmilch.

Falto de datos, D. Bernoulli se limita a efectuar conjeturas. Apela a los párrocos de las ciudades para que anoten las edades de los fallecidos (pag. 22 de la Memoria), a los médicos para que valoren la importancia de la inoculación (pag. 29), y afirma que el día en que se tenga listas mortuorias bien hechas, él será incluso su "más severo crítico" (pag. 4). Su método de cálculo no es, desgraciadamente, aplicable bajo hipótesis distintas a las suyas, como lo señala Trembley (1799). Pero ve claramente lo que está en juego en el problema; un conocimiento exacto de los riesgos permitiría no sólo a los particulares, sino también a los Estados, tomar decisiones racionales: *Si se conociesen con exactitud todas las proporciones medias que se hubiesen podido determinar sobre un número muy grande de observaciones, pero bien consideradas y reflexionadas, se podría dar una teoría completa sobre los azares de la viruela: una teoría así dictaría las máximas que todo hombre razonable debe seguir* (p. 8).

3. El modelo propuesto por D. Bernoulli

El problema planteado es encontrar una fórmula que permita obtener, a partir de la tabla de mortalidad en "el estado natural y con viruela" (una tabla donde la viruela es una de la enfermedades mortales de la humanidad), una tabla de mortalidad del "estado sin viruela" (una tabla de mortalidad en la que se ha erradicado la viruela).

Para llevar a cabo su propósito, el autor echa en falta dos conocimientos: *"Veía mejor, en primer lugar, que la realización de una idea así exige dos conocimientos elementales: ¿cuál es el riesgo anual a diferentes edades de ser sorprendido por la viruela?, ¿y cuál es el de morir para aquellos que son atacados?"*

Entonces, D. Bernoulli plantea dos principios: el primero es que "en tanto no se haya tenido la viruela, se corre continuamente el mismo riesgo de tenerla", el segundo es "que el riesgo de morir de viruela cuando se es atacado, (es)... el mismo en toda edad" (1760, Introducción, pag. 4).

En la Introducción que, como se ha dicho fue, redactada en el momento de la publicación, en 1765, da algunos argumentos que intentan mostrar que las hipótesis elegidas son, al menos, verosímiles. El texto primitivo de la memoria insiste en el hecho de que se puede adaptar el cálculo a las condiciones locales: así, en el "pequeño país" de Bernoulli (Bâle), los médicos estimarían $1/20$ la probabilidad de morir cuando se contrae la viruela. Pero las observaciones recogidas en las "grandes ciudades" dan una probabilidad mucho mayor.

Ante la falta de datos empíricos, el autor se ve en la obligación de introducir supuestos o hipótesis con los que poder construir sus cálculos. Asume que nadie puede padecer viruela más de una vez en la vida, e introduce dos proporciones que van en consonancia con los supuestos comentados y, por tanto, considera constantes para las diferentes edades: la proporción anual de los que cogen viruela entre aquellos que nunca la han tenido es $1/n$, o sea, de cada n individuos que no hayan tenido viruela uno la coge en el plazo de un año, y que la proporción anual de muerte entre aquellos que enferman de viruela es $1/m$, o sea, de cada m individuos que enferman de viruela en el mismo año, uno de ellos fallece de esa enfermedad. Por tanto, según esto, la probabilidad de que un individuo que hasta ahora no ha padecido de viruela, muera de esa enfermedad en el plazo de un año será el producto de las dos anteriores, esto es $\frac{1}{nm}$. Escribe argumentos para mantener su hipótesis de proporcionalidad constante para aquellos que cogen la viruela en todos los tramos de edad. Concluye diciendo: *En tanto no se haya tenido la viruela se corre continuamente el mismo riesgo de tenerla. Las leyes de la Naturaleza más simples son las más verosímiles.*

Con este planteamiento, el problema es qué valores hay que dar a los dos parámetros n y m, ante lo ya comentado de ausencia de datos de enfermos y fallecidos de viruela por edades. Este asunto será motivo de discusión y de análisis entre los investigadores posteriores a Bernoulli en el siglo XVIII. Cada uno de ellos proporcionará valores distintos para n y m según los tramos de edad y en base a algunas estadísticas de las que ya se disponían.

Bernoulli propone como valores de ambos parámetros $n = m = 8$. O sea, la probabilidad de contraer la enfermedad, en el plazo de un año, para un individuo que no la ha tenido es $1/8$, para cualquiera que sea su edad, y la probabilidad de fallecer de viruela en dicho plazo es $1/64$. El autor elige porque no contradecía al dato más sustentado que disponía de una muerte de cada 13 era debida a la viruela.

Con estas premisas se propone construir una fórmula que, bajo supuestos razonables, proporcione el número "s" de personas que no han tenido la viruela, de una edad "x", en función de dicha edad y del número "y" de supervivientes. Para ello, argumenta como sigue. Los supervivientes, s, que no han tenido viruela decrecen por

(i) aquellos que cogen viruela (muriendo o no de ello) y,

(ii) aquellos que mueren de otras causas sin haber tenido viruela alguna vez.

En un elemento de tiempo dx el decrecimiento de s es $-ds$ (ds y dy, usado abajo, son intrínsecamente negativos y el signo menos es entonces necesario para convertirlos en números positivos). El número de atacados por viruela es $\frac{sdx}{n}$, y el número de aquellos que mueren de viruela es $\frac{sdx}{nm}$. El número total de muertes por todas las causas en un tiempo dx es $-dy$. Por tanto, el número de muertes por otras causas distintas a la viruela es $-dy - \frac{sdx}{nm}$. Pero este número relaciona a y personas, mientras que al formar una ecuación para s hemos referido el número de muertes de otras causas entre s, esto es, con $\frac{(-dy-\frac{sdx}{nm})s}{y}$ muertes.

Entonces el decremento en un tiempo dx del número de individuos que no han padecido la viruela es igual a la suma de los afectados por la misma en ese tiempo, mas los que han fallecido por otras causas distintas a la viruela:

$$-ds = \frac{sdx}{n} + \frac{(-dy - \frac{sdx}{nm})s}{y}.$$

Por tanto $\frac{sdy-yds}{s^2} = \frac{ydx}{sn} - \frac{dx}{nm}$. Poniendo $\frac{y}{s} = r$, por lo que $dr = \frac{sdy-yds}{s^2}$. Entonces, $nm \cdot dr = mr \cdot dx - dx$, o $dx = \frac{nm \cdot dr}{mr-1}$. Integrando da $n \ln(mr-1) = x + c$, donde c es una constante a determinar, o $n \ln(\frac{my}{s} - 1) = x + c$. Ahora, cuando $x = 0$, $y = s$, lo que da

$$c = n \ln(m-1)$$

Y de aquí

$$n \ln\left(\frac{\frac{my}{s} - 1}{m-1}\right) = x.$$

Entonces

$$\frac{my}{s} - 1 = (m-1)e^{\frac{x}{n}}$$

Por tanto

$$s = \frac{m}{1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}}y \tag{3.1}$$

Para los valores que Bernoulli estableció para m y n, la fórmula queda

$$s = \frac{8}{7e^{\frac{x}{8}}+1}y$$

Con esto, el autor construye la Tabla 1 de su memoria, donde en la primera columna aparece la edad (lo que hemos llamado x); en la segunda, el número de supervivientes a esa edad según la tabla de Halley (lo que hemos llamado y); en la tercera, número de personas que han llegado a esa edad sin haber padecido aún la viruela (lo que hemos llamado s), habiendo sido calculado ese número mediante la fórmula última; en la cuarta, el número de individuos que, a esa edad, ya han padecido viruela y se han recuperado (supervivientes de la enfermedad), o sea $y-s$; en la quinta, el número de enfermos de viruela de ese año, por tanto, $\frac{1}{8}s$, pero para mayor exactitud toma para s la media entre los valores de esa cantidad para ese año y el anterior, o sea, construye la 5^a columna calculando $\frac{1}{8}\times\frac{s_{x-1}+s_x}{2}$; en la sexta, el número de fallecidos de viruela ese año: un octavo de los valores de la quinta columna; en la séptima, las muertes acumuladas de viruela desde 0 años hasta ese año y, por último, en la octava, las muertes por otras causas distintas a la viruela, o sea, $y_{x-1}-y_x-columna$ 6. La Tabla se construye hasta la edad de 24 años porque, como se ha dicho, para esa edad, pocos de los que sobreviven no han padecido la enfermedad.

Tabla 1.

Edad por años	Supervivientes según Halley	No habiendo tenido la viruela	Habiendo tenido la viruela	Cogiendo la viruela durante cada año	Muertes de viruela cada año	Suma de muertes de viruela	Muertes de otras enfermedades cada año
0	1300	1300	0				
1	1000	896	104	137	17’1	17’1	283
2	855	685	170	99	12’4	29’5	133
3	798	571	227	78	9’7	39’2	47
4	760	485	275	66	8’3	47’5	30
5	732	416	316	56	7’0	54’5	21
6	710	359	351	48	6’0	60’5	16
7	692	311	381	42	5’2	65’7	12’8
8	680	272	408	36	4’5	70’2	7’5
9	670	237	433	32	4’0	74’2	6
10	661	208	453	28	3’5	77’7	5’5
11	653	182	471	24’4	3’0	80’7	5
12	646	160	486	21’4	2’7	83’4	4’3
13	640	140	500	18’7	2’3	85’7	3’7
14	634	123	511	16’6	2’1	87’8	3’9
15	628	108	520	14’4	1’8	89’6	4’2
16	622	94	528	12’6	1’6	91’2	4’4
17	616	83	533	11’0	1’4	92’6	4’6
18	610	72	538	9’7	1’2	93’8	4’8
19	604	63	541	8’4	1’0	94’8	5
20	598	56	542	7’4	0’9	95’7	5’1
21	592	48’5	543	6’5	0’8	96’5	5’2
22	586	42’5	543	5’6	0’7	97’2	5’3
23	579	37	542	5’0	0’6	97’8	6’4
24	572	32’4	540	4’4	0’5	98’3	6’5

Resulta de las tablas calculadas por D. Bernoulli que en el estado natural, para una generación de 1300 recién nacidos, 500 morirán sin haber contraído la viruela, 700 la cogerán y morirán de otra cosa y 100 cogerán la viruela y morirán por culpa de ella (o sea, 1/13 del total de fallecidos, dato con el cual contaba el autor). La mitad de estos últimos, mueren antes de los cinco años.

A continuación, nuestro autor considera lo que ocurriría si todos fuesen inoculados al nacer y, entonces, la viruela fuese erradicada como causa de muerte. Eso le permite preparar una tabla de vida para el caso en que no hubiese muerte por viruela. Ilustramos el método de construcción de esta segunda tabla usando los números de la Tabla 1:

En el primer año de vida hay 17’1 muertes de viruela, así que, sin viruela, el número de los que sobreviven un año crecerá de 1000 a 1017'1.

Si 133 (columna 8) mueren durante el segundo año de otras causas distintas a la viruela entre los 1000 vivos al comienzo de este año, sería, por proporción, 135'3 muertes entre los 1017'1 vivos al comienzo de ese año en una situación libre de viruela, quedando 881'8 vivos al final del segundo año; y así para el resto de edades.

Los resultados son recogidos en la Tabla 2, donde se comparan las columnas de supervivientes en el estado natural (esto es, con muertos de viruela) y en el estado no varioloso.

Tabla 2.

Edad por Años	Estado natural y varioloso	Estado no varioloso	Diferencia o ganancia	Edad por Años	Estado natural y varioloso	Estado no varioloso	Diferencia o ganancia
0	1300	1300	0	13	640	741'1	74'1
1	1000	1017'1	17'1	14	634	709'7	75'7
2	855	881'8	26'8	15	628	705'0	77'0
3	798	833'3	35'3	16	622	700'1	78'1
4	760	802'0	42'0	17	616	695'0	79'0
5	732	779'8	47'8	18	610	689'6	79'6
6	710	762'8	52'8	19	604	684'0	80'0
7	692	749'1	57'2	20	598	678'2	80'2
8	680	740'9	60'9	21	592	672'3	80'3
9	670	734'4	64'4	22	586	666'3	80'3
10	661	728'4	67'4	23	579	659'0	80'0
11	653	722'9	69'9	24	572	651'7	79'7
12	646	718'2	72'2	25	565	644'3	79'3

Esta Tabla hace ver de un vistazo, cuántos de 1300 niños, supuestos nacidos al mismo tiempo, quedarían vivos de año en año hasta la edad de veinticinco años, suponiéndoles todos sujetos a la viruela; y cuántos quedarían si estuviesen todos exentos de esta enfermedad, con la comparación y diferencia de los dos estados (Traducción del texto en francés que el autor escribió al pie de esta tabla).

Al construir esta segunda tabla, Bernoulli descuida el hecho de que algunos de estos supervivientes podrían sucumbir en ese año de otras enfermedades, algo que Duvillard (1806) rectificará.

Sin emplear la expresión "esperanza de vida", el autor calcula que la vida media para un recién nacido, en el estado no varioloso, sería de 29 años y 9 meses (contra 26 años y 7 meses en el estado varioloso), o sea, una ganancia de 3 años y 1 mes.

A continuación, Bernoulli plantea el riesgo de la inoculación. Inicialmente, plantea dicho riesgo como de 1 sobre N (1 fallecido debido a la inoculación por cada N inoculados). Por lo tanto, la generación inicial ha de ser disminuida en la proporción de N a $N-1$. Comenta que no hay acuerdo en cuánto debe ser N. Opina que en el peor de los casos $N = 200$ y, entonces, bajo ese supuesto calcula que el riesgo de la inoculación supone una disminución inferior a dos meses de la vida media calculada para el estado no varioloso. Por tanto, la inoculación, con el riesgo añadido, supone una ganancia en la vida media de 3 años, sobre una media inicial de 26 años y 7 meses en el estado natural o varioloso, o sea, $\frac{1}{9}$ de esa media.

En este contexto, Bernoulli se plantea cuál debería ser N para que la inoculación no alterase la vida media del estado natural. El cálculo le lleva a $N = 9'43$. Entonces, añade que si la inoculación se lleva menos de 100 sobre 943 hará más bien que mal a la humanidad, sobre todo si es practicada en los más jóvenes, pues entonces "la pérdida sólo caería en los niños inútiles para la sociedad, y... toda la ganancia recaería sobre esta edad que es la más preciosa" (edad adulta). D. Bernoulli se anticipa aquí a los estudios de Quételet, tendientes a medir el coste, para la sociedad, de la mortalidad de los jóvenes clasificados por edad.

Sólo después de haber preparado su Tabla 2, Bernoulli se da cuenta que era posible obtener una fórmula que relacionase los supervivientes de las dos tablas. Como había expuesto antes, el número las muertes en el período de tiempo dx por causas distintas a la viruela es $-dy - \frac{sdx}{nm}$ con respecto a una población de y individuos (supervivientes en el estado natural). Por tanto, para una población de z (supervivientes en el estado no varioloso) podemos escribir

$$-dz = -\frac{z}{y}\left(dy + \frac{sdx}{nm}\right)$$

O bien,

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = \frac{sdx}{nmy}.$$

Sustituyendo (3.1) para un s dado

$$\frac{dz}{z} - \frac{dy}{y} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{(m-1)e^{\frac{x}{n}}}{1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}}\right)dx.$$

Integrando obtenemos

$$\ln\frac{z}{y} = \frac{x}{n} - \ln\left(1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}\right)dx + c$$

Dado que $y = z$ cuando $x = 0$, entonces $c = \ln m$, de donde se deduce

$$z = \frac{me^{\frac{x}{n}}}{1+(m-1)e^{\frac{x}{n}}}y \tag{3.2}$$

Bernoulli da sólo dos comparaciones numéricas de z por su método aproximado para construir la Tabla 2 y por la fórmula exacta (3.2); estos son:

Tabla 3.

	Valores de z Número de supervivientes en estado no varioloso para cada edad	
	Aproximado	Exacto
Edad (x)	(Tabla 2)	(Fórmula exacta)
16	700'1	697'4
24	651'7	649'2

Tras considerar los dos ejemplos comenta el acuerdo razonable entre su método aproximado y su fórmula exacta. En cada caso el valor exacto es menor que el aproximado, lo cual es de esperar ya que, como se ha dicho, el principal defecto del método aproximado de Bernoulli es que no tiene en cuenta las muertes por otras causas que tendrían lugar entre los muertos de viruela salvados en cada año en particular. Desde un punto de vista más matemático podemos entender la Tabla 2 como una forma discreta de mostrar la supervivencia, mientras que la Fórmula 2 nos da una aproximación continua del mismo asunto, y la corrección que introduce la continuidad hace disminuir un poco el número propuesto como aproximado.

4. Una decisión útil

Aunque no disimula que él cree personalmente que la inoculación es "muy útil", el autor declara que su intención es únicamente arrojar sobre la cuestión "alguna luz", con el fin de que se juzgue "con todo el conocimiento de causa posible".

Concibe que el problema se plantea de forma diferente a los particulares y a los Estados. En cualquier caso, la decisión está por tomar: ¿Inoculación o no inoculación? El fundamento de esta decisión es enunciado por D. Bernoulli de manera perfectamente clara: "en tanto que se quiera adoptar *el principio de la mayor utilidad* de toda la humanidad…"

Además del cálculo de la esperanza de vida de un recién nacido en los dos estados, Bernoulli se encarga de introducir una serie de conclusiones basadas en los cálculos que realiza usando como soporte la dos tablas construidas, de manera que la toma de la decisión adecuada no deje lugar a dudas. Así, introduce el concepto de "ganancia relativa" para cada edad, cociente entre la ganancia absoluta expresada por la cuarta columna de la 2^a tabla y el número de supervivientes en el estado varioloso a esa edad. Demuestra que si todos los recién nacidos son protegidos de la viruela desde el nacimiento, la "ganancia relativa" en vidas humanas que resultaría de la erradicación de esta causa de mortalidad, crecería de año en año, llegando a $1/7$ de la generación en el momento en que ésta alcance su 17^o año, que Daniel Bernoulli llama su "nacimiento civil", y concluye que la proporción asintótica de "ganancia sobre los vivos" es, en general, igual a $\frac{1}{m-1}$. También, que la proporción de "vivos en estado natural/vivos en estado no varioloso" se estabiliza con la edad, quedando en $\frac{m-1}{m}$.

Un segundo dato que destacamos de entre la gran cantidad de cálculos que aporta el autor es el que sigue. En el estado natural toda una generación queda reducida a la mitad cuando han cumplido 11 años y 5 meses, mientras que en el estado no varioloso esto ocurre a la edad de 24 años y 3 meses.

Un tercer argumento es el cálculo de las esperanzas de vida de un niño de 5 años si no es inoculado y si lo es y obtiene para las mismas la proporción de 17 a 19.

La conclusión no da lugar a equívoco: aunque la inoculación sea costosa en vidas humanas, "el interés público" es practicarla, y hacerla lo más pronto posible, en cualquier caso, antes de cumplir los 5 años, pues a esa edad la viruela ya se ha llevado la mitad de aquellos que haría morir. "Será siempre geométricamente cierto que el interés de los Príncipes es favorecer y proteger la inoculación..." El mejor partido es el que da mayor vida media, porque la colectividad tiene la ventaja de que los individuos acceden a una edad donde acaban siendo productivos.

Para las circunstancias particulares de un individuo, Bernoulli indica que habría que hacer cálculos particulares para conocer el partido más ventajoso. Imaginemos una persona que llega a los veinte años sin haber tenido la viruela. La sociedad no tiene casi ningún interés en hacerla inocular a una edad donde la viruela ya se ha llevado el 95 % de su tributo. La persona, por el contrario, "llegada a la edad de la razón", está en situación de sopesar la ganancia esperada de la inoculación, respecto al riesgo que debería pagarle, y ver dónde está su ventaja. Se trata, una vez más, de elegir una solución que maximiza una esperanza matemática.

Este párrafo es bastante esclarecedor para la resolución del problema de decisión: *"Todo hombre que no ha tenido la viruela se encuentra en la agobiante necesidad de jugar durante cada año de su vida con otros 63 a cuál debe morir de esta enfermedad, y con otros 7, a cuál debe cogerla, y lleva con él esta triste suerte hasta que coge la enfermedad. ¿No es mejor, suponiendo que la inoculación quita 1 de 473, jugar contra 472 en lugar de con 63, y no tener que sufrir la suerte más que una sola vez, en lugar de que le vuelva cada año de su vida? ¿Un hombre avisado puede titubear sobre la elección? Sin embargo, esta alternativa es exactamente la de esperar la viruela natural o hacerse inocular."*

Referencias

[1] BERNOULLI, D. (1760). Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité cause par la petite vérole, et des aventages de l'inoculation pour la prévenir,. *Memoires de mathématiques et de physiques tires des registres de l'Academie Royale des Sciences, de l'année 1760; Hist. de l'Academie,* Paris, 1766 , 1-45.

[2] DAW, R. H. (1979). Smallpox and the Double Decrement Table. A piece of Actuarial Pre-History. *JIA*, **106**, 299-318.

[3] D'ALEMBERT, J. DE R. (1761). Sur l'application du calcul des probabilités à l'inoculation de la petite vérole. *Opuscules Mathétmatiques*, **2**, 26-95.

[4] DUVILLARD, E. E. (1806). Nombre del artículo. *Analyse et Tableaux de l'influence de la petite vérole à chaque age, et de celle qu'un preservative tel que la vaccine peur avoir sur population et la longèvite*, (París) (A. S.)

[5] FAGOT-LARGEAULT, A., (1989). *Las causes de la mort. Histoire naturelle et facteurs de risque*, Institut Interdisciplinaire d'Etudes Epistémologiques. París.

[6] HALLEY, E. (1693). An estimate of the degrees of the Mortality of mankind, drawn from curious Tables of the births and funerals at the City of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of Annuities upon lives. *Philosophical Transactions*, **XVII**, 596-610, 654-656.

[7] JENNER, E. (1798). *An Inquiry into the Causes and Effects of the Variolae Vaccine, a Disease discovered in some of the Western Counties of England, particularly Gloucestershire, and know by the Name of the Cow Pox*, Sampson Low, London.

[8] SÜSSMILCH, J. P. ,(1741). *Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts aus der Geburt, dem Tode und der Fortpflanzung desselben erwiesen*, Berlin. Existe una versión en francés de 1998, traducida y anotada por J. M. Rohrbasser, y publicada por l'Institut National d'Études Démographiques.

[9] TREMBLEY, J. (1799). Recherches sur la mortalité de la petite vérole. *Mém. De l'Acad. Roy. Des Sciences pour 1796*, 17-38. Berlin.