3. ESTADÍSTICA OFICIAL

TIME-REVERSION OF VARMA PROCESSES BY POLYNOMIAL METHODS

Félix Aparicio Pérez*

Instituto Nacional de Estadística

Victor Gómez Enríquez

Ministerio de Economía

Abstract

Time-reversion is a well known technique that is used in time series analysis since Box and Jenkins (1970) proposed to compute unconditional least-squares estimations by backcasting. However, in a multivariate setting its application relies on a state space formulation of the time series model and the use of some results about reversion in time of Markov processes. Given a VARMA process, this paper proposes a new polynomial methodology that can be used to provide a model for the time-reversed process. A simple example is provided and some possible applications and extensions are also included.

Keywords: VARMA, time-reversion, echelon form, backcasting

1. Introducción

La inversión en el tiempo de modelos lineales de series temporales se utiliza desde los tiempos de Box y Jenkins (1970). Ellos proponían la aplicación de una técnica, llamada backcasting, para estimar un modelo de series temporales univariante mediante mínimos cuadrados incondicionales, como mejor aproximación a la estimación de máxima verosimilitud que los mínimos cuadrados condicionales. El backcasting consiste en predecir el proceso invertido en el tiempo (hacia el pasado), para despues volver al proceso con el tiempo sin invertir y, recursivamente, estimar los valores suavizados de los errores del modelo. Estos errores suavizados se utilizan en la estimación por mínimos cuadrados incondicionales.

Hoy dia, es posible estimar un modelo de series temporales multivariante VARMA mediante máxima verosimilitud exacta, por ello la utilidad del backcasting es más reducida. Sin embargo, existen otras aplicaciones de interés, que explicamos en la sección 4. En el caso univariante, como es bien conocido, la dinámica que sigue un proceso ARMA estacionario al invertirlo en el tiempo es la misma que la del proceso original. Sin embargo, en el caso multivariante la dinámica de un proceso y del que resulta de invertir el tiempo en él son distintas. Quizás por este motivo, hasta el presente, todas las aplicaciones de que tenemos constancia de procesos VARMA invertidos en el tiempo utilizan la expresión en forma de espacio de estado del modelo. Se basan en que el proceso así expresado se puede considerar generado por un proceso de Markov y utilizan las fórmulas para invertir en el tiempo un proceso markoviano, ver por ejemplo Caines (1988) p. 237 o la sección 5.9 de Aoki (1989).

Sin embargo, es posible obtener la dinámica de un proceso VARMA invertido en el tiempo enteramente mediante técnicas polinomiales, sin recurrir a expresar el modelo con la ayuda de los procesos markovianos. La utilización de uno u otro tipo de técnicas dependerá, por tanto, de las preferencias e intereses del investigador, asi como de la disponibilidad de software para cálculos de espacio de estado o polinomiales.

2. Metodología propuesta

Sea y_t un proceso VARMA(p,q) de dimensión k que sigue el modelo $a(B)y_t = b(B)\epsilon_t$, donde $a(z)$ y $b(z)$ representan matrices polinomiales de gra-

*Corresponding Author. E-mail: fapape@ine.es

dos p y q respectivamente y ϵ_t es un ruido blanco gaussiano multivariante con matriz de covarianzas $Cov(\epsilon_t) = \Sigma$. Suponemos que el modelo cumple las hipótesis de estacionariedad e invertibilidad y que es coprimo por la izquierda. Llamaremos B y F a los operadores unitarios de retardo y adelanto en el tiempo respectivamente ($By_t = y_{t-1}$, $Fy_t = y_{t+1}$). A veces anotaremos $a(z) = A_0 + A_1 \cdot z + \cdots + A_p \cdot z^p$ y análogamente para $b(z)$ y otras matrices polinomiales.

El método propuesto se basa en el resultado bien conocido de que la función de autocovarianza de un proceso VARMA estacionario cumple la propiedad $\Gamma_k \triangleq Cov(y_{t+k}, y_t) = Cov(y_t, y_{t+k})' \triangleq \Gamma_k', \forall k \in \mathbb{Z}$. De aquí podemos deducir inmediatamente que el proceso invertido en el tiempo será también estacionario con autocovarianzas iguales a las traspuestas de las del proceso original. En cuanto a la notación, en este trabajo llamaremos $\tilde{y}_t$ al proceso invertido en el tiempo, teniendo en cuenta que, en realidad, no estamos haciendo ningún cambio de variable en t y que, por tanto, $\tilde{y}_t \equiv y_t$. La diferencia es que, en los modelos en que aparezca $\tilde{y}_t$, utilizamos el operador F y siempre que usemos la notación $\tilde{y}_t$ está implícito el que el tiempo corre hacia atrás.

Se trata, por tanto, de encontrar el modelo de un proceso que tenga autocovarianzas iguales a las traspuestas de las del proceso original. Por ejemplo, en Reinsel (1993) apéndice A2.2, se explica cómo obtener los parámetros de un proceso VARMA a partir de sus autocovarianzas. Podría parecer que esto resuelve el problema, sin embargo, utilizando ese método no está garantizado el que lleguemos a una solución única y bien definida en todos los casos, esto solo será así si se cumplen ciertas condiciones de rangos. Nosotros daremos un método general para obtener la parte autorregresiva que funcione sin que se tengan que cumplir condiciones adicionales.

La idea no es complicada: se trata de obtener la parte autorregresiva en forma canónica echelon. Para ello utilizamos la matriz de Hankel formada por las autocovarianzas de $\tilde{y}_t$, es decir por las traspuestas de las autocovarianzas de y_t. Este método funcionará para cualesquiera que sean los índices de kronecker del modelo que siga $\tilde{y}_t$, sin condiciones adicionales. Una vez tengamos la parte autorregresiva ya podemos seguir el procedimiento clásico de obtener la parte de medias móviles mediante factorización espectral de las autocovarianzas que resultan de aplicar el filtro finito dado por la parte autorregresiva a $\tilde{y}_t$.

Para comprender este proceso es necesario estar familiarizado con la forma canónica echelon de un proceso VARMA; por ejemplo en la sección 2.5 de Hannan y Deistler (1988), o en Tsay (1991) se explica esta forma canónica en detalle.

Brévemente, si formamos la matriz de Hankel finita con $r = max(p, q) + 1$ bloques de filas y columnas que contengan las autocovarianzas de $\tilde{y}_t$, es decir

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} \Gamma(1)' & \Gamma(2)' & \cdots & \Gamma(r)' \\ \Gamma(2)' & \Gamma(3)' & \cdots & \Gamma(r+1)' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Gamma(r)' & \Gamma(r+1)' & \cdots & \Gamma(2r-1)' \end{bmatrix}.$$

y buscamos, en orden natural, $(1, 2..., kr)$, las filas de $\bar{H}$ que son linealmente independientes (l.i.) de las anteriores, los índices de kronecker son un vector de longitud k que tiene por componente i el número total de filas i-ésimas de los distintos bloques que han resultado ser l.i. en esta búsqueda.

Existe otra definición de esta misma matriz de Hankel a partir de los $K_i, i \in 1, \cdots, r$, que son los r primeros pesos en la representación de Wold del proceso. No es complicado demostrar que las relaciones lineales entre las filas de ambas matrices de Hankel son las mismas, por lo que se obtiene el mismo resultado utilizando cualquiera de ellas.

Se llama grado de McMillan a la suma de estos índices de kronecker y su interpretación puede ser tanto la dimensión del espacio vectorial de las predicciones del proceso (Tsay (1991)) como la dimensión del estado en una representación de dimensión mínima del proceso en forma de espacio de estado (Hannan y Deistler (1988), Teorema 2.4.1).

Una vez conocidos los índices de kronecker existen fórmulas para obtener la parte autorregresiva (AR) de la forma canónica del proceso, p. ej. en Hannan y Deistler (1988) sec. 2.5 se explica un procedimiento. Sea $a^*(z)$ la parte AR de la forma echelon obtenida. Para calcular la parte de medias móviles (MA) de $\tilde{y}_t$ procedemos por factorización espectral, puesto que es muy sencillo obtener las autocovarianzas de $u_t = a^*(F)\tilde{y}_t$ por ser este un filtro autorregresivo finito de $\tilde{y}_t$. Llamaremos $\Gamma_u(j)$ a las autocovarianzas de u_t. Como u_t es una media móvil finita, su función generatriz de covarianzas será de la forma $G_u(z) = \sum_{j=-v}^{v} \Gamma_u(j)z^j$. Aplicando factorización espectral a $G_u(z)$ con la condición de que $A_0^* = B_0^*$ (para obtener un proceso VARMA en la forma habitual), obtendremos la parte MA $b^*(z)$, un nuevo ruido blanco gaussiano a_t y $\Sigma_a = Cov(a_t)$ tales que el proceso $\tilde{y}_t$ siga el modelo

$$a^*(F)\tilde{y}_t = b^*(F)a_t, \tag{2.1}$$

en el cual el tiempo corre hacia atrás.

El modelo (1) obtenido puede que tenga A_0^* distinta de la matriz identidad, aunque siempre será una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Si necesitamos el modelo para hacer predicciones podemos transformarlo premultiplicando (1) por $(A_0^*)^{-1}$.

3. Un ejemplo sencillo

Sea el proceso VARMA(1,1) $a(B)y_t = b(B)\epsilon_t$, con

$$a(z) = \begin{bmatrix} 1+0{,}5z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b(z) = \begin{bmatrix} 1+0{,}2z & 0{,}3z \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Cov(\epsilon_t) = I_2.$$

Las primeras autocovarianzas del proceso son

$$\Gamma(0) = \begin{bmatrix} 1{,}24 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(1) = \begin{bmatrix} -0{,}42 & 0{,}3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(2) = \begin{bmatrix} 0{,}21 & -0{,}15 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma(3) = \begin{bmatrix} -0{,}105 & 0{,}075 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Los índices de kronecker del proceso son $(1, 0)$, pues si formamos la matriz de Hankel con $\Gamma(j), j \in 1, 2, 3$ vemos en seguida que sus filas segunda y tercera son c.l. de la primera. Ahora nos interesa la matriz de Hankel del proceso invertido en el tiempo, este proceso tendrá como autocovarianzas las traspuestas de las de y_t y, por tanto, la matriz de Hankel será

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} -0{,}42 & 0 & 0{,}21 & 0 \\ 0{,}3 & 0 & -0{,}15 & 0 \\ 0{,}21 & 0 & -0{,}105 & 0 \\ -0{,}15 & 0 & 0{,}075 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por la misma razón que antes los índices de kronecker del proceso son también $(1, 0)$. Se obtiene el proceso $a^*(F)\tilde{y}_t = b^*(F)a_t$, con

$$a^*(z) = \begin{bmatrix} 1+0{,}5z & 0 \\ 5/7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para obtener la parte de medias móviles, calcularemos las autocovarianzas del filtro autorregresivo finito $u_t = a^*(F)\tilde{y}_t$, dadas las de $\tilde{y}_t$, estas son (aproximadamente):

$$\Gamma_u(0) = \begin{bmatrix} 1{,}13 & 0{,}89 \\ 0{,}89 & 1{,}63 \end{bmatrix}, \quad \Gamma_u(1) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}14 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\Gamma_u(j) = 0, \forall j > 1$

Aplicamos factorización espectral a $\Gamma_u(1)'z^{-1} + \Gamma_u(0) + \Gamma_u(1)z$ con la condición de que $B_0^* = A_0^*$ y obtenemos (aproximadamente):

$$b^*(z) = \begin{bmatrix} 1+0{,}185z & -0{,}021z \\ 5/7 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_a = \begin{bmatrix} 1{,}093 & 0{,}105 \\ 0{,}105 & 0{,}925 \end{bmatrix}.$$

Naturalmente, si calculamos las autocovarianzas de $\tilde{y}_t$ obtendremos las traspuestas de las de y_t.

Para trabajar numéricamente con un proceso invertido en el tiempo es mas cómodo hacer un cambio de variable del tipo $s = T + 1 - t$ (suponiendo que tengamos una serie $\mathbf{Y} = y_1, \cdots, y_T$ de longitud finita T) y, llamando $z_s = y_{T+1-t}$ y $b_s = a_{T+1-t}$ escribir el modelo (1) en la forma $a^*(B)z_s = b^*(B)b_s$, es decir, poner los datos de final a principio y trabajar con ellos con el operador B, pues el nuevo tiempo s corre hacia adelante.

4. Algunas aplicaciones

Como ya dijimos, el backcasting, que era la aplicación clásica de un proceso ARMA invertido en el tiempo, no es tan importante en la actualidad. Sin embargo, en el proceso de realización de backcasting se obtienen los errores del modelo suavizados $\hat{\epsilon}_t = E[\epsilon_t/\mathbf{Y}]$. Para obtener los $\hat{\epsilon}_t$ hay que estimar primero las innovaciones del proceso (1) (por ejemplo, mediante el algoritmo de las innovaciones, ver Brockwell y Davis (1991), sec. 11.4), para predecir con (1) $y_0, \cdots, y_{-M}$ con M suficientemente grande y, volviendo al modelo original de y_t, se obtienen recursivamente los $\hat{\epsilon}_t$ (iniciando la recursión con ceros) con una precisión arbitraria (mayor cuanto mas grande hayamos tomado M).

Otra aplicación obvia es la estimación de los valores anteriores a la serie observada, que se obtiene mediante los dos primeros pasos del proceso que acabamos de describir para estimar los $\hat{\epsilon}_t$.

También es de utilidad el proceso invertido en el tiempo en la simulación de trayectorias de un proceso VARMA con condiciones finales dadas, pues esas condiciones finales se convierten en iniciales en el proceso invertido en el tiempo.

Otras aplicaciones surgen en la discretización de ecuaciones diferenciales estocásticas (lineales o linealizadas) invertidas en el tiempo. Este tipo de ecuaciones son importantes en matemática financiera y otras aplicaciones.

Todos estos procesos se pueden realizar también expresando el modelo VARMA en forma de espacio de estado, por lo cual, como decíamos antes, el analista podrá escoger entre los dos enfoques.

La técnica que hemos explicado en este trabajo también puede extenderse al caso en que tengamos otras variables o inputs exógenos (VARMAX).

Referencias

[1] Aoki, M. (1989), *Optimization of Stochastic Systems: Topics in Discrete Time Dynamics (2nd. ed)*, New York:Academic Press.

[2] Box, G.E.P., y Jenkins, G.M. (1970), *Time Series: Theory and Methods (2nd. ed)* New York: Springer–Verlag.

[3] Brockwell, P.J., y Davis, R.A. (1991), *Time Series Analysis, Forecasting and Control* San Francisco: Holden–Day.

[4] Caines, P.E. (1988), *Linear Stochastic Systems* New York: John Wiley.

[5] Hannan, E.J. y Deistler, M. (1988), *The Statistical Theory of Linear Systems* New York: John Wiley.

[6] Reinsel, G.C. (1993), *Elements of Multivariate Time Series Analysis (2nd. ed)* New York: Springer-Verlag.

[7] Tsay, R.S. (1991), “Two Canonical Forms for Vector ARMA Processes”, *Statistica Sinica*, **1**, 247–269.