2. ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

ON SCHEDULING MODELS

David Alcaide López de Pablo*

Departamento de Estadística e Investigación Operativa y Computación.
Universidad de La Laguna.
38204 San Cristóbal de La Laguna, Tenerife, España

Abstract

This paper is a short reference guide to build scheduling models. It also includes a collection of update bibliography on the topic. We believe that this guide can be useful both to people who start to solve scheduling problems and also to more experimented people on scheduling.

Keywords: Scheduling models, deterministic and stochastic scheduling, multicriteria scheduling, robot scheduling, cyclic scheduling.

1. Introducción

Al hablar de *Planificación* nos referimos a un conjunto de modelos y técnicas de Investigación Operativa que permiten resolver muchos problemas que surgen en diversos ámbitos, entre los que podemos destacar la industria, el comercio, las actividades financieras, la sanidad, los sectores administrativos y de gestión tanto públicos como privados, etc. En todos estos contextos surgen frecuentemente situaciones en las que se precisa asignar, a lo largo de un periodo de tiempo, un conjunto de tareas a entidades, sean éstas personas o máquinas, capaces de realizarlas, describiendo además, no sólo la mejor manera (óptima) o la manera más adecuada de asignar dichas entidades a dichas tareas, sino también la asignación más adecuada de otros posibles recursos, generalmente escasos, que han de utilizarse en la realización de las mencionadas tareas.

En los problemas de planificación siempre aparecen tres componentes muy bien diferenciadas que podemos resumir, de manera un tanto simple, como *¿qué?*, *¿quién?* y *¿para qué?*. El ¿qué? hace referencia a qué es lo que hay que hacer, qué trabajos o actividades se pretenden realizar. El ¿quién? indica quién o quienes, qué personas o qué máquinas en concreto tienen que hacer dichas actividades. Finalmente el ¿para qué? explica de alguna manera los objetivos que se persiguen (¿para qué han de hacerse dichas actividades?), y nos permite, quizás, comparar unas soluciones con otras, ofreciendo elementos de juicio para el decisor. Sobre este simple esquema de tres componentes resulta que muchos problemas reales en los ámbitos industrial, comercial, social, científico, e incluso de la vida cotidiana, admiten una aproximación que puede ajustarse bien con un modelo de planificación.

Estas tres componentes de los problemas de Planificación aparecen tanto en los problemas que en la literatura en inglés denominamos "Project Management" (nosotros diríamos "Planificación de Proyectos") como en la que denominamos "Scheduling". En este sentido, tanto unos como otros son problemas de Planificación. Lo que ocurre es que, a la hora de modelizarlos, usualmente se han adoptado esquemas de modelización distintos. En el presente trabajo nos centraremos en los modelos de "Scheduling", sin que ello excluya que muchas de las ideas que desarrollemos sean también aplicables al otro gran grupo de modelos de planificación. Existe una vasta literatura sobre el grupo de modelos de planificación conocido como "Project Mangement", entre la que podemos citar, entre otros, a Romero-López (1983), Cleland y King (1988), y Shtub et al. (1994).

Los problemas de planificación siempre han existido, y su estudio científico ha experimentado un gran auge después de la II Guerra Mundial, coincidiendo con el desarrollo general de todos los modelos de Investigación Operativa. Así, a partir de los años cincuenta, aparecen trabajos que resuelven

*Corresponding Author. E-mail: dalcaide@ull.es

problemas sencillos, hoy considerados clásicos, y que sirven de partida a modelos posteriores. Entre ellos, se pueden destacar los trabajos de Johnson (1954) y Jackson (1955), para optimizar líneas de producción; Smith (1956), para minimizar el tiempo medio de permanencia de los trabajos en un taller, (problema equivalente a minimizar el número medio de trabajos en el taller); McNaughton (1959), para minimizar el tiempo total de proceso de trabajos interrumpibles en máquinas idénticas, Moore y Hodgson (véase Moore (1968)), para minimizar el número de trabajos tardíos; Emmons (1969), que propone propiedades de dominancia entre soluciones para un problema de complejidad máxima como es el problema de la tardanza total; etc. Desde el comienzo de los años 50, y además de los artículos mencionados, han aparecido en la literatura especializada multitud de trabajos, comunicaciones y estudios presentando nuevos e interesantes resultados. Referencias básicas son, entre otras, los libros de Baker (1974) y French (1982), y los excelentes artículos de Graham et al. (1979), Lawler et al. (1982, 1993).

En un sentido amplio, el término *Planificación* (*"Scheduling"*) puede entenderse como la asignación de máquinas o procesadores a lo largo del tiempo para realizar un conjunto de trabajos (Baker (1974)), o bien como resolver el problema de encontrar la asignación temporal óptima de ciertos recursos a determinadas tareas (Lawler et al. (1993)). Cuando todos los datos del problema de planificación son conocidos a priori, el modelo se denomina determinístico. Estos modelos son estudiados por la Optimización Combinatoria. Esta área de la Investigación Operativa estudia también otros modelos asociados a problemas en los que, por ejemplo, debe determinarse una ordenación, selección ó asignación óptima en un conjunto finito de objetos. Una característica común a la mayoría de los problemas estudiados por la Optimización Combinatoria es que suelen ser relativamente "fáciles" de plantear pero mucho más difíciles de modelizar y, consecuentemente, mucho más difíciles de resolver. Esta propiedad es especialmente frecuente en los problemas de Planificación y, por tanto, su resolución exige el uso de medios de computación adecuados. En este sentido, merece especial atención el análisis de la complejidad computacional de estos problemas y las implicaciones resultantes para el diseño y análisis de algoritmos adecuados. Se acepta comúnmente que un problema esta bien resuelto o es fácil si se puede resolver por un algoritmo cuyo tiempo de ejecución esté acotado por una función polinomial en el tamaño del problema (Lawler (1976)). En una gran mayoría de problemas de Planificación no se tiene conocimiento de la existencia de tal algoritmo. Entonces surge la cuestión de probar si el problema es NP-duro o puede resolverse en tiempo polinomial. Veáse, por ejemplo, Karp (1972), y Garey y Johnson (1979). Estos conceptos complementarios son muy útiles en el análisis de problemas de planificación, donde hay cierto número de ellos que no han sido aún clasificados como pertenecientes a una u otra categoría.

Si el problema es NP-duro, como ocurre en la mayoría de los problemas prácticos, se pueden adoptar dos aproximaciones diferentes a la solución. La primera de ellas consiste en elegir algún método exacto para resolver el problema. Entre los métodos exactos podemos citar la programación dinámica, las técnicas de ramificación y acotación, las técnicas de ramificación y corte, etc. Estos métodos exactos requerirán con frecuencia un tiempo de búsqueda de la solución invariablemente exponencial. La segunda opción consiste en considerar un método heurístico rápido para encontrar una solución aproximada. Posteriormente se realizaría un análisis comparativo de contraste de la calidad de la solución obtenida. Esta opción está especialmente justificada en muchos de los problemas de Planificación, debido a la elevada complejidad que presentan la mayoría de ellos.

El presente trabajo se estructura en cuatro secciones. En la Sección 2 estableceremos los conceptos básicos en la construcción de modelos de Planificación. La tercera Sección distinguirá diferentes "dicotomías", o "modelos de alguna manera contrapuestos" (aunque no siempre mutuamente excluyentes), que se han considerado en la literatura especializada sobre modelos de Planificación, aportando referencias bibliográficas actualizadas. Finalmente, la Sección 4 concluirá el trabajo.

2. Conceptos básicos en Planificación

Como hemos comentado, cuando se tiene la necesidad de realizar algunos trabajos o actividades (el *"¿qué?"*) por determinadas entidades (el *"¿quién?"*) capaces de realizarlos, con el propósito de conseguir determinadas finalidades u objetivos (el *"¿para qué?"*) estamos ante un problema de Planificación. Las entidades capaces de realizar los trabajos o actividades reciben el nombre genérico en la literatura de *"máquinas"* ("machines" en la literatura en inglés), independientemente de que éstas sean físicamente personas, máquinas, fases de un proceso productivo, u otras entidades de cualquier otra naturaleza. Por su parte, las actividades o trabajos a realizar reciben en la literatura especializada el nombre genérico de *"trabajos"* ("jobs" en la literatura en inglés). Finalmente el criterio o criterios de optimización se suele denominar simplemente de dicha manera, es decir, como criterio o criterios de optimización. Esta separación en tres componentes bien diferenciadas de los problemas de Planificación dio pie a que, en 1979, Graham y colaboradores (Graham et al. (1979)) propusieran un esquema triparamétrico $\alpha|\beta|\gamma$. Este esquema sirve tanto para modelizar los problemas como para catalogar los diferentes modelos de Planificación. Dicho esquema ha sido ampliamente aceptado entre los investigadores y por la literatura especializada pues, además, tiene la ventaja de que los nuevos problemas y modelos de Planificación que han ido sucesivamente apareciendo han podido clasificarse y catalogarse dentro de ese esquema. Para un mayor refrendo y contraste de la validez del esquema propuesto por Graham et al (1979), el lector interesado puede ver, entre otros, los trabajos de Lawler et al. (1993), Pinedo (2002) y (2005), Brucker (2007), Blazewicz et al. (2007), Crama et al. (2000), Levner et al. (2007), etc. y, en general, en prácticamente cualquier artículo sobre "Scheduling" posterior al año 1979.

Así, los problemas de Planificación pueden, en la mayoría de los casos, modelizarse de la siguiente manera: se precisan realizar n trabajos, tareas o procesos $J_j(j = 1, \dots, n)$ para lo que se dispone de m máquinas o procesadores $M_i(i = 1, \dots, m)$. Siempre que no haya lugar a confusión se puede hablar de "trabajo j" en lugar de J_j y de "máquina i" en vez de M_i . Se supone que cada máquina es incapaz de procesar varios trabajos simultáneamente y que, en un instante dado, cada trabajo puede realizarse en a lo sumo una máquina. Estas hipótesis básicas las podemos denominar como *hipótesis de no simultaneidad*. Nótese que estas últimas hipótesis de no simultaneidad de trabajos distintos en una misma máquina, y de no simultaneidad de varias máquinas distintas actuando sobre un mismo trabajo, pueden en ocasiones relajarse para facilitar la construcción de algoritmos para la resolución de determinados problemas. Estos algoritmos se "mueven" por soluciones no factibles para llegar finalmente a alguna solución factible que respete dichas hipótesis básicas de no simultaneidad. Tal es el caso, por ejemplo, de algunos modelos de Muntz y Coffman (1969, 1970), o de Serafini (1996).

Obviamente, diferentes características de los trabajos y de las máquinas junto con distintos criterios de optimalidad, originan una gran variedad de modelos de Planificación que los catalogamos con la clasificación triparamétrica propuesta por Graham et al. (1979) que atiende a tres campos $\alpha|\beta|\gamma$. En el primer parámetro se recogen las características de las m máquinas o procesadores $M_i(i = 1, \dots, m)$; en el segundo las de los n trabajos o tareas a procesar $J_j(j = 1, \dots, n)$; y el último indica los criterios y el modo de optimización considerados.

Cada trabajo J_j tiene asociado los siguientes datos (véase Figura 1): (1) Un número m_j de operaciones $O_{1j}, \dots, O_{m_j j}$ en las que puede dividirse el trabajo J_j de manera que, fijada la planificación, cada operación se procesa en una única máquina. Podemos definir $\mu_{ij} = k$ si la operación O_{ij} debe realizarse en la máquina M_k . Si el trabajo j consta de una única operación ($m_j = 1$) podemos denotar con $\mu_j = k$ el hecho de que dicha operación deba asignarse a la máquina M_k. (2) Uno ó más tiempos de procesamiento p_j ó $p_{ij}(i = 1, \dots, m)$ necesarios para procesar el trabajo J_j en cualquier máquina ($p_{ij} = p_j, \forall i$) ó en la máquina $M_i(i = 1, \dots, m)$. (3) Una fecha de disponibilidad r_j , a partir de la cual puede comenzar a procesarse dicho trabajo. Si $r_j = 0, \forall j$, todos los trabajos están disponibles desde el mismo instante de tiempo y estaremos ante problemas de planificación *estáticos*, mientras que en caso de distintas fechas de disponibilidad, nos encontraremos ante problemas de planificación *dinámicos*. (4) Una fecha de comienzo S_j , que no es constante, sino que depende de la planificación, que indica el instante de tiempo en el que comienza el procesamiento del trabajo J_j . (5) Una fecha límite o de vencimiento d_j , en la que el trabajo J_j debería estar terminado para no incurrir en tardanza. Dicha fecha se denomina "due date" en la literatura en inglés. Si dicha fecha debe cumplirse estrictamente para obtener factibilidad la denominamos "fecha límite estricta" ("deadline"). (6) Un peso o ponderación ω_j^k que indica la importancia relativa de J_j con respecto a los otros trabajos en el criterio k con $1 \leq k \leq K$, siendo K el número de criterios considerados. (7) Una función de costo real f_j^k por cada criterio k, donde $f_j^k(t)$ es el coste asociado, según el criterio k, al trabajo J_j cuando éste se completa en el instante de tiempo t. Dicha función dependerá, en general, de los parámetros anteriores.

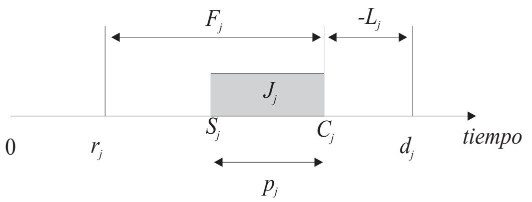

Figura 1. Datos y variables asociados a un trabajo

En el caso determinístico los datos m_j, r_j, p_j, p_{ij}, d_j, ω_j^k de cada trabajo son constantes conocidas mientras que en el caso estocástico pueden aleatorizarse dichos valores. Comentemos ahora más específicamente los valores de los parámetros $\alpha|\beta|\gamma$ que hacen referencia a los diferentes problemas de planificación.

2.1. Características de las máquinas

Podemos distinguir los problemas de planificación en los que se dispone de una única máquina ($\alpha = 1$) de aquellos problemas en los que podemos utilizar varias máquinas. Desde el momento en que se disponga de dos ó más máquinas cabe la posibilidad de que varias de ellas ejecuten trabajos distintos u operaciones de diferentes trabajos simultáneamente, y entonces podremos hablar de *paralelismo*. Además, será conveniente distinguir los problemas en los que las máquinas ejecutan las mismas funciones (máquinas *no especializadas*) de aquellos problemas en los que ciertas máquinas están especializadas en ciertas tareas y no pueden realizar otras (máquinas *especializadas*). Estas distinciones se resumen en el esquema siguiente:

Los problemas de planificación con *máquinas no especializadas* son aquellos en los que las máquinas ejecutan las mismas funciones. Estos problemas se clasifican a su vez en problemas con máquinas *idénticas*, *uniformes*, y *no relacionadas*. En los problemas con *máquinas idénticas* las máquinas tienen, además, la misma velocidad de proceso. En los problemas con *máquinas uniformes*, las máquinas tienen distinta velocidad de proceso, pero éstas son constantes carácterísticas de las máquinas y no dependen de los trabajos. De manera que, si una máquina es dos veces más rápida que otra para un trabajo, será también dos veces más rápida para cualquier otro trabajo. En los problemas con *máquinas no relacionadas*, la velocidad de proceso depende tanto de las máquinas como de los trabajos, sin que podamos relacionar las distintas velocidades de las máquinas.

En los problemas de planificación con *máquinas especializadas*, existe especialización de las máquinas en ciertas tareas. Van asociadas con problemas en los que los trabajos a realizar se dividen en varias operaciones o tareas. Estos problemas se clasifican a su vez en *sistemas flow shop*, *sistemas open shop*, y *sistemas job shop*.

En los *sistemas flow shop*, cada trabajo se procesa por todos ó algunos de los procesadores siguiendo un orden prefijado por un patrón común. Dicho orden es relevante y es siempre el mismo, es decir, todos los trabajos deben seguir un mismo patrón de flujo, esto es, la misma trayectoria de máquinas. No es necesario que un trabajo j pase por todas las máquinas. Si el trabajo j no se procesa por la máquina i se considera $p_{ij} = 0$. De esta manera se engloba también los problemas flow-shop en los que no todos los trabajos tengan que ejecutarse en todas las máquinas. Obsérvese que un sistema flow-shop se parece a una cadena de montaje, sin embargo, existen algunas diferencias entre ellos. En primer lugar, en un sistema flow-shop puede existir una gran variedad de trabajos mientras que en una cadena de montaje es un producto estándar el que se procesa. En segundo lugar, los trabajos del flow shop no tienen por que ser procesados por todas las máquinas ya que un trabajo puede prescindir de una o varias máquinas. Sin embargo, todos los trabajos de una cadena de montaje han de pasar por todas las máquinas de la cadena. En tercer lugar, en el flow-shop la actuación de una máquina sobre un trabajo no depende de la máquina precedente en dicho trabajo, mientras que en una cadena de montaje si existe tal dependencia. Finalmente, en el flow-shop cada trabajo tiene su propio tiempo de procesamiento en cada máquina, mientras que en una cadena de montaje el tiempo de procesamiento de los trabajos en una máquina es el mismo para todos ellos.

En los *sistemas open shop*, cada trabajo se procesa por todos los procesadores y el procesamiento puede realizarse en cualquier orden. Es decir, en un sistema open-shop, cada trabajo J_j consiste en un *conjunto* (y no cadena) de $m_j = m$ operaciones $O_{1j}, \ldots, O_{mj}$, donde O_{ij} se procesa en la máquina M_i en un tiempo p_{ij}. Es decir, se han numerado las operaciones del trabajo J_j de modo que la operación O_{ij} se realiza en la máquina i, $\mu_{ij} = i$, $\forall j$. A diferencia con los problemas flow shop, el orden en que se realicen las operaciones es irrelevante.

En los *sistemas job shop*, el subconjunto de máquinas que procesa un trabajo y el orden de proceso son arbitrarios pero conocidos a priori. Es decir, en un sistema job-shop, cada trabajo J_j consiste en una cadena de m_j operaciones $O_{1j}, \ldots, O_{m_j j}$. No tiene por que ser $m_j = m$. Incluso puede ser $m_j > m$, con lo que puede presentarse la situación en la que alguna máquina procese dos o más operaciones de un mismo trabajo. La trayectoria de máquinas de cada trabajo esta dada pero no tiene que ser la misma para todos los trabajos. Es decir, O_{ij} se procesa en la máquina μ_{ij} en un tiempo p_{ij}. Cualquier empresa de manufacturas que no se dedique en masa a la producción de un único producto tiene problemas de planificación similares al job - shop. Cada producto tiene su propia ruta a través de las diferentes áreas de trabajo y máquinas de la factoría. Nótese que los problemas flow-shop pueden considerarse como un caso particular de los problemas job-shop en los que todos los trabajos siguen el mismo patrón de flujo o trayectoria de máquinas. Así una editorial que debe planificar la producción de varios libros a través de los departamentos de escritura, impresión, encuadernado, y empaquetado sería un problema flow-shop con cuatro máquinas; cada departamento es una máquina y los trabajos, es decir, los libros, fluyen en el orden escritura, impresión, encuadernado, y empaquetado.

2.2. Características de los trabajos

Las condiciones impuestas por los trabajos para su ejecución se recogen en el segundo campo β, que se estructura a su vez en diversos subcampos o parámetros en relación, entre otros, a los siguientes conceptos característicos de los trabajos: (a) *Interrupciones.* Permitir interrupciones significa que el procesamiento de cualquier operación puede interrumpirse y continuarse más tarde. Las interrupciones tienen sentido sólo si se puede retomar el trabajo en el estado en el que se había dejado. No interesa dejar un trabajo si retomarlo nos obliga a repetir lo que de él habíamos hecho. Los modelos con interrupciones se denotan con el término *pmtn* en el campo β. (b) *Relaciones de precedencia.* Caracterizan las relaciones de dependencia o precedencia entre trabajos. Dos trabajos u operaciones serán dependientes si el comienzo de la ejecución de uno de ellos está condicionada a la conclusión previa del otro. Estas relaciones se suelen representar con un grafo dirigido acíclico que, en ocasiones, puede ser tipo árbol. (c) *Existencia de fechas de disponibilidad*, que permite distinguir entre los problemas estáticos (todos los trabajos están disponibles desde el instante inicial), de los problemas dinámicos, en los que cada trabajo tiene su propio instante de disponibilidad. (d) *Cotas al número de operaciones.* En ocasiones, y especialmente en los problemas job shop donde el número de operaciones puede ser superior al número de máquinas, puede ser conveniente acotar superiormente el número de operaciones. (e) *Tiempos de proceso.* Muchos problemas son resolubles con tiempos de proceso unitarios y no lo son con tiempos de proceso generales. (f) *Recursos adicionales.* En ocasiones, puede considerarse en el modelo de planificación la existencia de recursos adicionales. Conviene notar que las máquinas y los recursos adicionales son conceptos distintos desde el mismo momento en que se empieza a construir el modelo de planificación. Así, lo que consideramos como "máquina" en un modelo, quizás lo podamos considerar como "recurso adicional" en otro modelo, y viceversa.

2.3. Criterios de optimalidad

El tercer y último campo expresa el número de funciones objetivo a considerar, sus características y, en caso de más de un criterio, el tipo de optimización en el que se está interesado, es decir, si se buscan puntos eficientes, puntos extremos, realizar una optimización simultánea o una optimización jerárquica.

Recordamos que, fijada la planificación, podemos calcular para cada trabajo las siguientes variables (ver también la Figura 1): (1) El *tiempo de completación* C_j, que indica el instante en el que el procesamiento del trabajo J_j concluye. (2) La *demora* $L_j = C_j - d_j$, donde una demora positiva indica la tardanza en la completación del trabajo, mientras que, la conclusión del trabajo anticipadamente a su fecha límite d_j se indica por una demora negativa o adelanto, cuyo valor absoluto es la cantidad de tiempo anticipada. (3) La *tardanza*, que viene dada por $T_j = \text{máx}\{0, L_j\}$, indica el retraso en la ejecución del trabajo J_j. (4) El *indicador de trabajo tardío* U_j, que valdrá 1 si el trabajo no se concluye antes de su fecha límite, es decir, $U_j = 1$ si $C_j > d_j$, y 0 en cualquier otro caso.

En función de las variables anteriores se definen las funciones objetivo a minimizar. Estas pueden hacer referencia al coste máximo o al coste total. Sea pues γ^k uno de los criterios considerados, con $1 \leq k \leq K$, siendo K el número total de criterios que intervienen en el problema. Dicha función será, en general, una función $\gamma^k = \gamma^k(C_1, \ldots, C_n)$ de los tiempos de completación $(C_j, j = 1, \ldots, n)$. Usualmente, aunque no siempre, se trabaja con funciones crecientes de los tiempos de completación. Este tipo de funciones se denominan funciones regulares. Dependiendo de la naturaleza del problema interesará o no incorporar tiempo ocioso en la máquina. Normalmente suelen ser funciones de tipo máximo ($\gamma^k = f^k_{max} = \text{máx}_{j=1,\ldots,n}\{f^k_j\}$), o de tipo suma ($\gamma^k = \sum_{j=1}^n f^k_j$), donde $f^k_j = f^k_j(C_j)$ es el costo asociado, en el criterio k, a terminar el trabajo j en el instante de tiempo C_j.

Cabe destacar que la clasificación triparamétrica $\alpha|\beta|\gamma$ es una clasificación abierta. Los nuevos problemas de planificación que se han investigado a lo largo de los años, y que se siguen investigando hoy en día, se han ido incorporando a versiones extendidas y ampliadas de dicha clasificación.

3. Diferentes problemas de planificación

En esta sección comentaremos diferentes "dicotomías", o "modelos de alguna manera contrapuestos" (aunque no siempre mutuamente excluyentes), que se han considerado en la literatura especializada sobre modelos de Planificación, aportando referencias bibliográficas actualizadas.

3.1. Planificación determinística versus planificación estocástica

Cuando todos los datos asociados al problema de planificación (ya comentados en la sección 2), son constantes conocidas, estamos ante un problema de planificación determinística. Si alguno (o algunos) de dichos datos son variables aleatorias, entonces estamos ante problemas de planificación estocástica. Para la resolución de muchos problemas reales es suficiente utilizar modelos de planificación determinística, mientras que para otros se precisa necesariamente los modelos de planificación estocástica, ya que estos pueden recoger y modelizar mejor la realidad intrínseca del problema en cuestión. Por ejemplo, si se producen averías de las máquinas que intervienen en un proceso productivo o en cualquier otro problema de planificación, la modelización de los periodos de tiempo entre averías (máquinas disponibles) y de reparación de las mismas (duración de la avería), se podrá hacer mejor con una variable aleatoria que con un valor numérico constante. En los modelos estocásticos también se sigue trabajando con la clasificación triparamétrica $\alpha|\beta|\gamma$ comentada anteriormente e inicialmente propuesta por Graham et al. (1979). No obstante, y como es lógico y natural, la variación de los tres campos recogida en los parámetros α, β, y γ se amplia notablemente para poder reflejar las características de las variables aleatorias que intervienen como dato en el problema, y la naturaleza de la optimización perseguida, ya que podemos optimizar en esperanza (valor esperado óptimo) y de otras maneras. En cualquier caso, es siempre más difícil desarrollar un marco o esquema de clasificación que recoja toda la variabilidad de los modelos de planificación estocástica.

En muchas ocasiones podemos entender los problemas de planificación determinística como un caso particular de los de planificación estocástica donde los datos numéricos son variables aleatorias constantes. Generalmente los problemas estocásticos son más difíciles de resolver que su correspondiente contraparte determinística. Esto, no obstante, no es una regla general y tiene excepciones importantes. Por ejemplo, es conocido que el problema determinístico $P||C_{max}$ consistente en minimizar el instante final de completación (*"makespan"*, en inglés, C_{max}) de todos los trabajos es NP-duro, incluso en el caso de dos máquinas $P2||C_{max}$ (Karp (1972)). Sin embargo, la versión estocástica, y en el caso exponencial $P2|X_j \sim exp(\lambda_j)|E[C_{max}]$, donde $X_j \sim exp(\lambda_j)$ denota que los tiempos de proceso (variables X_j) son variables aleatorias exponenciales (de parámetro λ_j), es un problema que se resuelve polinomialmente con la regla $LEPT$ (*"longest expected processing time first"*) (véase Bruno y

Downey (1977), Pinedo y Weiss (1979)).

Algunas referencias, que podemos citar como punto de partida para el lector interesado en planificación determinística, son las siguientes: Baker (1974), French (1982), Graham et al. (1979), Dempster et al. (1982), Lawler et al. (1982, 1993), Alcaide (1995), Pinedo (2002, 2005), Chrétienne et al. (1995), Blazewicz et al. (2007), Brucker (2007), Levner et al. (2007). En cuanto a planificación estocástica podemos destacar: Dempster et al. (1982), Pinedo (2002), Chrétienne et al. (1995), Weiss (1982, 1995), Rodríguez-González (1999). El trabajo de Weiss (1995) puede ser una buena guía para familiarizarse con los modelos de planificación estocástica.

3.2. Planificación unicriterio versus planificación multicriterio

Cuando se pretende optimizar un único objetivo estamos ante problemas y modelos de planificación unicriterio. Las características del mismo se recogen en el tercer campo, en el parámetro como ya hemos comentado. Si intervienen varios criterios estamos ante modelos de planificación multicriterio, y el parámetro se convierte en un vector de parámetros. A la hora de resolver los problemas de planificación multicriterio podemos utilizar todas las técnicas de optimización multicriterio, con la dificultad añadida de los problemas de planificación, ya que suelen ser relativamente fáciles de plantear, pero, normalmente, muy difíciles de resolver. Referencias importantes en planificación multicriterio son los trabajos de Hoogeveen (Hoogeveen (1992, 2005)), y las referencias que en ellos se citan.

3.3. Planificación sin robots versus planificación con robots que trasladan los trabajos

En numerosos problemas de planificación, sobre todo en procesos industriales y procesos productivos, conviene tratar de manera diferenciada las máquinas, estaciones de trabajo o fases del proceso, de los robots o mecanismos que mueven los trabajos de unas fases a otras, de unas máquinas a otras, o de unas estaciones de trabajo a otras. En estos casos es especialmente conveniente considerar los robots o unidades que trasportan los trabajos dentro del modelo. En algunos modelos se consideran dichos robots como máquinas adicionales y se modelizan como ellas. Esto ocurre por ejemplo en algunos trabajos de Timkovsky (ver Timkovsky (2004) y las referencias allí citadas). Normalmente se le suele dar a los robots o entidades que transportan los trabajos un tratamiento más diferenciado de las otras máquinas que aparecen en el modelo. Referencias representativas de este tema pueden encontrarse, entre otros, en Hall (1999), Hall et al. (1998), Levner et al. (2007), y las referencias allí citadas.

3.4. Planificación no periódica versus planificación cíclica o periódica

Existe un interés creciente en los modelos de planificación cíclica o periódica (”cyclic scheduling” en la terminología inglesa). Esto ocurre tanto desde el punto de vista de la literatura especializada en planificación como entre los usuarios más pragmáticos del mundo industrial y empresarial. Existen numerosos ejemplos de aplicaciones de los modelos de planificación cíclica (periódica) en diferentes industrias (ver por ejemplo Hall (1999), Pinedo (2002)), control automático (Romanovskii (1967), Cohen et al. (1985)), computaciones multiproceso (Hanen y Munier (1995a, 1995b), Kats y Levner (2003)), robótica (Livshits et al. (1974), Kats y Mikhailettskii (1980), Kats (1982), Sethi et al. (1992), Lei (1993), Kats y Levner (1997), Hall (1999), Crama et al. (2000), Agnetis y Pacciarelli (2000), Dawande et al. (2005, 2007)), y en comunicaciones y transporte (Dausha et al. (1985), Sharma y Paradkar (1995), Kubiak (2005)). Las ventajas de los planteamientos de planificación cíclica (periódica) frente a la planificación convencional (no periódica) en procesos flexibles de producción (”flexible manufacturing systems”), han sido ampliamente discutidas en la literatura especializada. El lector interesado puede acudir, entre otros, a los trabajos de Karabati y Kouvelis (1996), Lee y Posner (1997), Hall et al. (2002), Seo y Lee (2002), Timkovsky (2004), Levner et al. (2007) y las numerosas referencias allí citadas.

La idea fundamental de la planificación cíclica (periódica) es que el horizonte temporal es infinito, no tiene fin, y la producción se planifica en ciclos o periodos que se repiten periódicamente (y valga la redundancia) uno detrás de otro. Para planificar estos ciclos suele considerarse el concepto de MPS (”minimal part set”) introducido por Hitz (1980). Así, si el objetivo de la producción consiste en producir 200 unidades del producto A, 300 unidades del producto B, y 500 unidades del producto C, entonces el MPS consiste en dos unidades del producto

A, tres del B, y 5 del C, es decir, 10 unidades, cuya producción debe repetirse 100 veces para completar el objetivo de la producción total. En estos problemas, si lo que interesa es maximizar la producción, el problema resulta equivalente a encontrar una planificación cíclica donde la longitud del ciclo o periodo T sea mínima. Estos problemas suelen ser muy interesantes y tienen grandes conexiones con problemas sobre grafos. Como referencias representativas en planificación cíclica podemos citar, entre otros, a Romanovksii (1967), Dantzig et al. (1967), Dauscha et al. (1985), Chrétienne (1991), Hanen y Munier (1995a), Hall (1999), Hall et al. (1998), Hall et al. (2002), Ioachim et al. (2001), Ioachim y Soumis (1995), Hanen (1994, 2008), Karabati y Kouvelis (1996), Crama et al. (2000), Brucker y Kampmeyer (2005), Kampmeyer (2006), Dawande et al. (2005, 2007), Kats y Levner (1997, 1998, 2003), Levner y Kats (1998), Alcaide et al. (2007), Levner et al. (2007), Kats et al. (2008), Levner et al. (2008); y también a las numerosas referencias allí citadas.

4. Conclusiones

El presente trabajo es una pequeña guía de referencia para construir modelos de planificación que incluye diversa bibliografía actualizada. Creemos que puede ser útil tanto para aquellos que se inicien en el apasionante mundo de la resolución de problemas de planificación como para los lectores más experimentados en estos temas.

Agradecimientos

El autor quiere expresar su gratitud a todos aquellos investigadores y compañeros con los que ha trabajado en el estudio y construcción de modelos y algoritmos para la resolución de problemas de planificación. Este trabajo está parcialmente financiado por los Proyectos de Investigación MTM2006-10170 y MTM2007-60928 del Gobierno de España, los cuales cuentan con la ayuda de Fondos Europeos para el Desarrollo Regional.

Referencias

[1] Agnetis, A., D. Pacciarelli. (2000). Part sequencing in three-machine no-wait robotic cells. *Operations Research Letters*, **27**, 185-192.

[2] Alcaide López de Pablo, D. (1995). *Problemas de Planificación y Secuenciación Determinística: Modelización y Técnicas de Resolución*, Tesis Doctoral. Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación. Universidad de La Laguna. Tenerife. España. Publicado también por el Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna. Soportes Audiovisuales e Informáticos. Serie Tesis Doctorales. Curso 1995/96. Ciencias y Tecnologías. Vol. 10. Servicio de Publicaciones Universidad de La Laguna, 2004.

[3] Alcaide, D., C. Chu, V. Kats, E. Levner, G. Sierksma. (2007). Cyclic multiple-robot scheduling with time-window constraints using a critical path approach. *European Journal of Operational Research*, **177**, 147-162.

[4] Baker, K.R. (1974). *Introduction to Sequencing and Scheduling*, John Wiley.

[5] Blazewicz, J., K. Ecker, E. Pesch, G.Schmidt, J. Weglarz. (2007). *Handbook of Scheduling Theory*, Springer, Berlin.

[6] Brucker, P. (2007). *Scheduling Algorithms*, Springer, Berlin.

[7] Brucker, P., T. Kampmeyer. (2005). Tabu search algorithms for cyclic machine algorithms for cyclic machine scheduling problems. *Journal of Scheduling*, **8**, 303-322.

[8] Bruno, J., P. Downey. (1977). Sequencing tasks with exponential service times on two machines. *Technical Report. Department of Electrical Engineering and Computer Science. University of California, Santa Bárbara.*

[9] Chrétienne, P. (1991). The basic cyclic scheduling problem with deadline. *Discrete Applied Mathematics*, **30**, 109-123.

[10] Chrétienne, P., E.G. Coffman, Jr., J.K. Lenstra, Z. Liu, eds. (1995). *Scheduling Theory and Its Applications*, Wiley.

[11] Cleland, D.I., R.W. King, eds. (1988). *Project Management Handbook*, Van Nostrand-Reinhold. NY.

[12] Cohen, G., D. Dubois, J.P. Quadrat, M. Viot. (1985). A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**, 210-220.

[13] Crama, Y., V. Kats, J. van de Klundert, E. Levner. (2000). Cyclic scheduling in robotic flowshops. *Annals of Operations Research*, **96**, 97-124.

[14] Dantzig, G.B., W. Blattner, M.R. Rao. (1967). Finding a cycle in a graph with minimum cost to time ratio with application to a ship routing problem. *P. Rosenstiehl, ed. Theory of Graphs. Dunod, Paris, and Gordon and Breach, New York*, 77-84.

[15] Dauscha, W., H.D. Modrow, A. Neumann. (1985). On cyclic sequence types for constructing cyclic schedule *Zeitschrift fur Operations Research*, **29**, 1-30.

[16] Dawande, M., H.N. Geismer, S.P. Sethi, C. Sriskandarajah. (2005). Sequencing and scheduling in robotic cells: Recent developments. *Journal of Scheduling*, **8**, 387-426.

[17] Dawande, M.N., H.N. Geismer, S.P. Sethi, C. Sriskandarajah. (2007). *Throughput Optimization in Robotic Cells*, Springer, Berlin.

[18] Dempster, M.A.H., J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan (eds.) (1982). *Deterministic and Stochastic Scheduling*, NATO Advanced Study Institutes Series, serie C, vol. 84.

[19] Emmons, H. (1969). One-machine sequencing to minimize certain functions of job tardiness. *Oper. Res.*, **17**, 701-715.

[20] French, S. (1982). *Sequencing and Scheduling, an Introduction to the Mathematics of the Job Shop.*, Ellis Horwood Series.

[21] Garey, M., D. Johnson. (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company, San Francisco.

[22] Graham, R.L., E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. (1979). Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: A survey. *Annals of Discrete Mathematics*, **5**, 287-326.

[23] Hall, N.G. (1999). Operations research techniques for robotic system planning, design, control and analysis. *S.Y. Nof, ed. Handbook of Industrial Robotics, Vol. II, John Wiley*, 543-577 (Chapter 30).

[24] Hall, N.G., H. Kamoun, C. Sriskanadarajah. (1998). Scheduling in robotic cells: complexity and steady state analysis. *European Journal of Operational Research*, **109**, 43-65.

[25] Hall, N.G., T.E. Lee, M.E. Posner. (2002). The complexity of cyclic shop scheduling problems. *Journal of Scheduling*, **5**, 307-327.

[26] Hanen, C. (1994). Study of a NP-hard cyclic scheduling problem: The recurrent job-shop. *European Journal of Operational Research*, **72**, 82-101.

[27] Hanen, C. (2008). Cyclic Scheduling: An Introduction. *Universite Paris X Nanterre/LIP6 UPMC, available at http://graal.ens-lyon.fr/ fvivien/EPIT/Slides/Hanen.pdf.*

[28] Hanen, C., A. Munier. (1995a). Cyclic scheduling on parallel processors: An overview. *P. Chrétienne, E.G. Coffman, Jr., J.K. Lenstra, Z. Liu, eds. Scheduling Theory and Its Applications. Wiley*, 194-226.

[29] Hanen, C., A. Munier. (1995b). A study of the cyclic scheduling problem on parallel processors. *Discrete Applied Mathematics*, **57**, 167-192.

[30] Hitz, K.L. (1980). Scheduling of flow shops II. *Report No. LIDS-R-879, Laboratory for Information and Decision Systems, MIT, Cambridge, MA.*

[31] Hoogeveen, J.A. (1992). *Single-Machine Bicriteria Scheduling*, PhD Thesis. CWI, The Netherlands Technology, Amsterdam.

[32] Hoogeveen, J.A. (2005). Multicriteria scheduling. *European Journal of Operational Research*, **167**, 592-623.

[33] Ioachim, I., E. Sanlaville, M. Lefebvre. (2001). The basic cyclic scheduling model for robotic flowshops. *INFOR*, **39**, 257-277.

[34] Ioachim, I., F. Soumis. (1995). Schedule efficiency in a robotic production cell. *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, **7**, 5-26.

[35] Jackson, J.R. (1955). Scheduling a production line to minimize maximum tardiness. *Research Report 43, Management Science Research Project, UCLA.*

[36] Johnson, S.M. (1954). Optimal two and three stage production schedules with setup includes. *Naval Research Logistic Quarterly*, **1**, 61-68.

[37] Kampmeyer, T. (2006). *Cyclic Scheduling Problems*, PhD thesis, University of Osnabrück, Germany.

[38] Karabati, S., P. Kouvelis. (1996). Cyclic scheduling in flow lines: Modelling, observations, effective heuristics and a cycle time minimization procedure. *Naval Research Logistics*, **43**, 211-231.

[39] Karp, R.M. (1972). Reducibility among combinatorial problems. *R.E. Miller, J.W. Thatcher, eds. Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York*, 85-100.

[40] Kats, V. (1982). An exact optimal cyclic scheduling algorithm for multioperator service of a production line. *Automation and Remote Control*, **422**, 538-543.

[41] Kats, V., L. Lei, E. Levner. (2008). Minimizing the cycle time of multiple-product processing networks with a fixed operation sequence and time-window constraints. *European Journal of Operational Research*, **187**, 1196-1211.

[42] Kats, V., E. Levner. (1997). A strongly polynomial algorithm for no-wait cyclic robotic flowshop scheduling. *Operations Research Letters*, **21**, 171-179.

[43] Kats, V., E. Levner. (1998). Cyclic scheduling of operations for a part type in an FMS handled by a single robot: a parametric critical-path approach. *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, **10**, 129-138.

[44] Kats, V., E. Levner. (2003). Polynomial algorithms for periodic scheduling of tasks on parallel processors. *L.T. Yang, M. Paprzycki, eds. Practical Applications of Parallel Computing: Advances in Computation Theory and Practice, Vol. 12, Nova Science Publishers, Canada*, 363-370.

[45] Kats, V.B., Z.N. Mikhailetskii. (1980). Exact solution of a cyclic scheduling problem. *Automation and Remote Control*, **4**, 187-190.

[46] Kubiak, W. (2005). Solution of the Liu-Layland problem via bottleneck just-in-time sequencing. *Journal of Scheduling*, **8**, 295-302.

[47] Lawler, E.L. (1976). *Combinatorial Optimization: Networks and Matroids*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

[48] Lawler, E.L., J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan. (1982). Recent developments in deterministic sequencing and scheduling: a survey. *Dempster, M.A.H., J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan (eds.) Deterministic and stochastic scheduling. NATO Advanced Study Institutes Series, serie C, vol. 84.*

[49] Lawler, E.L., J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys. (1993). Sequencing and scheduling: algorithms and complexity. *Graves, S.C., A.H.G. Rinnooy Kan, P.H. Zipkin (eds.) Handbooks in Operations Research and Management Science, capítulo 9, vol. 4, North Holland.*

[50] Lee, T.E., M.E. Posner. (1997). Performance measures and schedules in periodic job shops. *Operations Research*, **45**, 72-91.

[51] Lei, L. (1993). Determining the optimal starting times in a cyclic schedule with a given route. *Computers and Operations Research*, **20**, 807-816.

[52] Levner, E., V. Kats. (1998). A parametrical critical path problem and an application for cyclic scheduling. *Discrete Applied Mathematics*, **87**, 149-158.

[53] Levner, E., V. Kats, D. Alcaide López de Pablo. (2007). Cyclic scheduling in robotic cells: An extension of basic models in machine scheduling problems. *E. Levner, ed. Multiprocessor Scheduling, Theory and Applications. I-Tech. Publishers, Vienna, Austria, 436 pp.*

[54] Levner, E., V. Kats, D. Alcaide López de Pablo, T.C.E. Cheng. (2008). A survey of cyclic scheduling problems: complexity, algorithms and applications. *Unpublished manuscript.*

[55] Livshits, E.M., Z.N. Mikhailetsky, E.V. Chervyakov. (1974). A scheduling problem in an automated flow line with an automated operator. *Computational Mathematics and Computerized Systems*, **5**, 151-155 (Russian).

[56] McNaughton, R. (1959). Scheduling with deadlines and loss functions. *Management Sci.*, **6**, 1-12.

[57] Moore, J.M. (1968). An n job, one machine sequencing algorithm for minimizing the number of late jobs. *Management Science*, **15**, 102-109.

[58] Muntz, R.R., E.G. Coffman Jr. (1969). Optimal preemptive scheduling on two processor systems. *IEEE Trans. Computers C*, **18**, 1014-1020.

[59] Muntz, R.R., E.G. Coffman Jr. (1970). Preemptive scheduling of real time tasks on multiprocessor systems. *J. Assoc. Comput. Mach.*, **17**, 324-338.

[60] Pinedo, M. (2002). *Scheduling: Theory, Algorithms and Systems*, Prentice Hall, N.J.

[61] Pinedo, M. (2005). *Planning and Scheduling in Manufacturing and Services*, Springer, New York.

[62] Pinedo, M., G. Weiss. (1979). Scheduling on stochastics tasks on two parallel processors. *Naval Research Logistics Quarterly*, **26**, 527-535.

[63] Rodríguez-González, A. (1999). *Cuestiones Notables sobre Problemas de Planificación Estocástica*, Memoria de Licenciatura. Departamento de Estadística, Investigación Operativa y Computación. Universidad de La Laguna. Tenerife. España.

[64] Romanovskii, I.V. (1967). Optimization of stationary control of a discrete deterministic process. *Kybernetika (Cybernetics)*, **3**, 66-78.

[65] Romero-López, C. (1983). *Técnicas de Planificación y Control de Proyectos*, Editorial Pirámide. Madrid.

[66] Seo, J.W., T.E. Lee. (2002). Steady-state analysis and scheduling of cycle job shops with overtaking. *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, **14**, 291-318.

[67] Serafini, P. (1996). Scheduling jobs on several machines with the job splitting property. *Operations Research*, **44**, 617-628.

[68] Sethi, S.P., C. Sriskandarajah, G. Sorger, J. Blazewicz, W. Kubiak. (1992). Sequencing of parts and robot moves in a robotic cell. *International Journal of Flexible Manufacturing Systems*, **4**, 331-358.

[69] Sharma, R.R.K., S.S. Paradkar. (1995). Modelling a railway freight transport system. *Asia Pacific Journal of Operational Research*, **12**, 17-36.

[70] Shtub, A., J. Bard, S. Globerson. (1994). *Project Management*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.

[71] Smith, W.E. (1956). Various optimizers for single stage production. *Naval Research Logistic Quarterly*, **3**, 59-66.

[72] Timkovsky, V.G. (2004). Cyclic shop scheduling. *Leung, J.Y.-T. ed. Handbook of scheduling: algorithms, models, and performance analysis. Chapman and Hall/CRC*, 7.1-7.22.

[73] Weiss, G. (1982). Multiserver stochastic scheduling. *Dempster, M.A.H., J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan (eds.) Deterministic and stochastic scheduling. NATO Advanced Study Institutes Series, serie C, vol. 84.*

[74] Weiss, G. (1995). A tutorial in stochastic scheduling. *P. Chrétienne, E.G. Coffman, Jr., J.K. Lenstra, Z. Liu, eds. Scheduling Theory and Its Applications. Wiley*, 33-64.