2. ARTÍCULOS DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

UNA INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS ENVOLVENTE DE DATOS

Juan Aparicio Baeza
Centro de Investigación Operativa
Universidad Miguel Hernández de Elche

Resumen

Desde su nacimiento, el DEA (***D**ata **E**nvelopment **A**nalysis*) ha servido como herramienta en la evaluación de la eficiencia de entidades de muy diversa naturaleza. Las medidas de eficiencia que proporciona dicho método constituyen una generalización del clásico ratio output/input que ha venido siendo utilizado como medida de eficiencia en campos como la Economía o la Ingeniería.

Adicionalmente, el DEA ha supuesto un enfoque alternativo, desde la perspectiva de la programación matemática, para algunos problemas clásicos como el de la estimación de fronteras de producción, habitualmente analizado a través de métodos estadístico-econométricos.

1. Introducción y breve reseña histórica

El DEA es una importante y altamente fructífera técnica de Investigación Operativa centrada en la medición y análisis de la eficiencia con que se producen bienes y se proporcionan servicios. La naturaleza de las actividades de producción susceptibles de estudio mediante esta técnica varía ampliamente: desde las industrias manufactureras de todo tipo a entidades sin ánimo de lucro dedicadas a proporcionar diversos servicios tanto públicos como privados. En este contexto, al agente objetivo de la medición de la eficiencia se le suele denominar DMU (***D**ecision **M**aking **U**nit*), con el propósito de enfatizar su grado de independencia a la hora de modificar sus niveles de insumo y producción.

La historia del DEA comenzó con la tesis de Edwardo Rhodes, en la Carnegie Mellon University en Pittsburgh, dirigida por W. W. Cooper. Rhodes trabajaba en la evaluación de programas educacionales para estudiantes desaventajados que se aplicaban en escuelas públicas de los Estados Unidos subvencionadas por el Gobierno Federal. En particular, se centraron en el programa conocido como *Follow Through*. Este proyecto del Departamento de Educación de los Estados Unidos pretendía aplicar los principios estadísticos del diseño de experimentos para realizar un estudio a nivel nacional sobre el comportamiento de un conjunto de escuelas. La base de datos utilizada era lo suficientemente grande como para que problemas que se presentan con cierta frecuencia, tales como los grados de libertad, no representaran un serio inconveniente en el análisis, a pesar del elevado número de variables (inputs y outputs) involucradas. Sin embargo, la aplicación de las técnicas clásicas de carácter estadístico o econométrico condujeron a resultados poco satisfactorios mientras que, en contraposición, el DEA se reveló como una herramienta de enorme potencial. La parte más substancial del conjunto de fundamentos teóricos en los que se sustentó la tesis de Rhodes vieron la luz en un famoso artículo publicado en 1978 por Abraham Charnes, William W. Cooper y Edwardo Rhodes con el título de "*Measuring the efficiency of decision making units*" en *European Journal of Operational Research.*

Anteriormente al trabajo de Charnes, Cooper y Rhodes, fue Farrell con su artículo "*The Measurement of Productive Efficiency*" (publicado en 1957 por la revista *Journal of the Royal Statistical Society*), el autor más influyente en temas relacionados con la medición de la eficiencia y la productividad. Farrell propuso una medida de la eficiencia de una empresa dividida en dos componentes: eficiencia técnica y eficiencia de asignación. Éstas se combinan en una medida única de eficiencia global: la denominada eficiencia económica. No obstante, para ser capaces de calcular una medida de eficiencia es necesario conocer previamente la forma explícita de la función de producción. Dado que, en la práctica, la frontera de producción nunca es conocida, Farrell sugirió que esta función podría ser estimada a partir de una muestra de datos usando, alternativamente, una tecnología no paramétrica lineal a trozos, o bien, una función de producción paramétrica. Estas ideas condujeron, décadas más tarde, a dos metodologías claramente diferenciadas: el DEA y las fronteras estocásticas, respectivamente. Mientras que el DEA utiliza herramientas de la programación matemática, la aproximación a la medición de la eficiencia a través de fronteras estocásticas recurre a técnicas de carácter puramente estadístico-econométrico.

Cabe destacar, desde un punto vista histórico a la par que científico, otros esfuerzos fundacionales en la investigación y la medición de la eficiencia. En particular, nos estamos refiriendo a los trabajos de Koopmans [11] y Debreu [9]. Koopmans adaptó algunas ideas generales del economista Vilfredo Pareto para definir lo que se entendería por un vector de inputs y outputs técnicamente eficiente (no dominado). Mientras que Koopmans ofreció una definición y caracterización de la eficiencia técnica, fue Debreu el primero que propuso una medida del grado de ésta con su "coeficiente de utilización de recursos". A partir de él, Debreu obtuvo medidas de la magnitud y el coste de la ineficiencia técnica, aunque sólo en su versión más débil.

En cuanto a las aplicaciones del DEA, cabe señalar la extensa variedad de campos en los que ha sido utilizado con contrastado éxito. Inicialmente, las aplicaciones se desarrollaron en ámbitos relacionados con la educación. Pero desde entonces, han sido muchos los sectores en los que el DEA ha demostrado satisfactoriamente su aplicabilidad. Así, nos gustaría destacar las aplicaciones que se han desarrollado en el entorno sanitario (gestión de hospitales o farmacias), en el mundo financiero (estudio de entidades bancarias) e incluso en los análisis de economías municipales, estatales o nacionales. Pero éstas representan exclusivamente una exigua selección de las múltiples áreas en las que el DEA se ha aplicado con éxito. En [16] podemos encontrar una extensa relación de trabajos relacionados con las distintas aplicaciones del DEA.

Huelga decir que el enfoque dado a este artículo refleja, en todo momento, los propios conocimientos e intereses del autor. En particular, la revisión que aquí se realiza tiene como objetivo dar a conocer la existencia de una herramienta cuya aplicación permite extraer inferencias relacionadas con la manera de operar de un conjunto de productores, entendido siempre este concepto en su sentido más amplio: una entidad que mediante ciertos inputs produce unos outputs.

2. Los modelos DEA más sencillos

El DEA ha supuesto un enfoque alternativo a los planteamientos paramétricos clásicos del análisis de fronteras de producción. A diferencia de estos, cuyo objetivo es el ajuste a unos datos mediante herramientas estadísticas de una forma funcional previamente especificada, en DEA se optimiza para cada DMU un modelo de programación matemática con el deseo de estimar una frontera lineal a trozos, determinada por las DMU eficientes en el sentido de Pareto; es decir, aquéllas no dominadas (ver la Figura 1, donde las DMU vienen representadas por puntos en el plano en el caso de un input $[X]$ y un output $[Y]$). A través del enfoque paramétrico, se asume que el modelo ajustado es aplicable a cada unidad en la muestra. Por el contrario, en DEA se optimiza de manera particular la medida de "lo bien o mal que opera" cada DMU. Lógicamente, al igual que en el planteamiento paramétrico, en DEA se utiliza toda la información que proporcionan los datos observados, en este caso recurriendo a los modelos de programación matemática.

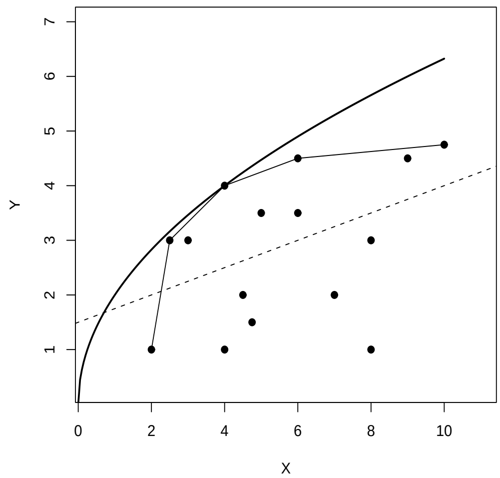

Figura 1: El DEA frente al enfoque paramétrico

Hasta la publicación del trabajo de Aigner y Chu (ver [1]), los economistas habían tenido que conformarse con la estimación de funciones "promedio", al hacer uso de modelos de regresión dependientes de la especificación del término estocástico de error con media cero. En la Figura 1, la línea discontinua representaría una de tales funciones de producción. Tras el trabajo de estos autores, el término de error se restringió a la toma de valores no negativos. Un ejemplo de este tipo de enfoque viene representado en la Figura 1 por la línea curva que envuelve bajo ella a todos los datos observados. Ahora bien, en el planteamiento paramétrico tradicional se requiere de la especificación de una forma funcional particular, que relacione la variable dependiente con las variables independientes (por ejemplo, una función de producción Cobb-Douglas). Y no sólo eso, sino que además es necesario asumir algunas hipótesis relativas a la distribución probabilística del término de error y sobre la independencia de las observaciones.

De trabajos como el de Aigner y Chu, que se encuadrarían en lo que se conoce actualmente como *deterministic frontier*, al ser el error resultante únicamente de ineficiencias técnicas de la empresa, surgieron las fronteras de producción estocásticas. En estos modelos una nueva variable aleatoria es añadida al error, de forma tal que éste queda compuesto aditivamente por dos términos, uno referido a la ineficiencia técnica y otro dependiente de factores externos a la industria, tales como azar, lluvias, huelgas, errores de medida, etc. En DEA, por el contrario, no se requiere de ninguna hipótesis sobre la forma funcional, ni tampoco sobre la distribución de los errores. Simplemente se calcula una medida de eficiencia relativa a una frontera "extrema", lineal a trozos, construida a partir de las observaciones muestrales, con la única condición de que todas las DMU queden envueltas por dicha frontera. Un ejemplo de tal frontera aparece también en la Figura 1.

De ahora en adelante supondremos que se desea evaluar la eficiencia de un conjunto de n DMU que consumen m inputs para producir s outputs. Concretamente, cada DMU_j ; $j = 1, \ldots, n$, que puede describirse por un par $(X_j; Y_j)$, utiliza los inputs $X_j = (x_{1j}, \ldots, x_{mj})$ para producir los outputs $Y_j = (y_{1j}, \ldots, y_{sj})$. Asumiremos adicionalmente que tanto los inputs como los outputs son estrictamente positivos.

Para entender cómo funcionan los modelos DEA necesitaremos introducir algunos conceptos básicos de la teoría económica de la producción. En este sentido, la medida de productividad comunmente utilizada (en el caso de $s = 1$ y $m = 1$), asume la forma de ratio del output producido por input consumido: $\frac{y}{x}$.

Cuando esta medida es usada con el fin de evaluar el rendimiento, por ejemplo, de obreros o empleados, es interpretada como "output producido por hora de trabajo" u "output producido por trabajador". Es obvio, por otro lado, que el gestor de una empresa o entidad cualquiera desea que dicho ratio sea lo más grande posible.

La cuestión que dilucidar, cuando nos enfrentamos a situaciones más complejas en contextos de múltiples outputs y múltiples inputs, es cómo lograr expresar un término agregado para los outputs producidos y un término agregado para los inputs consumidos; de forma que en la expresión anterior estos sustituyan a numerador y denominador, respectivamente. En el caso del DEA, el output global se obtiene como combinación lineal de los outputs observados multiplicados por unos pesos. De manera similar se determina un nivel de input global para el caso de la agregación de los recursos. De esta forma una generalización de $\frac{y}{x}$ quedaría como:

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} y_r \mu_r}{\sum_{i=1}^{m} x_i \nu_i}, \tag{1}$$

donde μ_r y ν_i son los pesos utilizados por DEA, que pueden ser interpretados económicamente como precios por output producido y costes por input consumido, respectivamente.

Dado que en ciertos contextos estos precios y costes son desconocidos, son poco fiables o se encuentran distorsionados por las regulaciones y condiciones del mercado, la filosofía DEA aboga por establecer como única restricción requerida para estos pesos, que sean no negativos. Esta libertad es usada para el cálculo de la medida de eficiencia para cada DMU de forma que sea maximizado el ratio del output global entre el input global. Más concretamente, el modelo seminal propuesto por Charnes et al. (1978), denominado CCR, para evaluar el grado de eficiencia de una DMU genérica, DMU_0, viene dado por:

$$\begin{array}{ll} \text{máx} & E_0 = \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{r0}\mu_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} x_{i0}\nu_{i0}} \\ \text{s.a} & \\ & \begin{array}{rcll} \frac{\sum_{r=1}^{s} y_{rj}\mu_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\nu_{i0}} & \leq & 1 & \forall j \\ \mu_{r0} \geq 0 & & & \forall r \\ \nu_{i0} \geq 0 & & & \forall i \end{array} \end{array} \tag{2}$$

Según las restricciones de (2), el ratio del output global frente al input global no debería nunca exceder la unidad para ninguna de las DMUs observadas. Además el objetivo del anterior programa se centra en la determinación de unos pesos (μ^*_{r0} y ν^*_{i0}) que maximicen el ratio de la DMU$_0$, la DMU que está siendo evaluada. Obviamente, $0 < E^*_0 \leq 1$.

(2) es un modelo de programación fraccional lineal que puede ser transformado en un modelo de programación lineal al uso, a través del cambio de variables propuesto por Charnes y Cooper (ver [5]).

$$\begin{array}{lll} \text{máx} & E_0 = \sum_{r=1}^{s} y_{r0} u_{r0} & \\ \text{s.a} & & \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{i0} v_{i0} = 1 & \\ & \sum_{r=1}^{s} y_{rj} u_{r0} \leq \sum_{i=1}^{m} x_{ij} v_{i0} & \forall j \\ & u_{r0} \geq 0 & \forall r \\ & v_{i0} \geq 0 & \forall i \end{array} \tag{3}$$

A (3) también se le conoce como el modelo DEA CCR en su versión de los multiplicadores. A partir de (3) obtenemos, de manera computacionalmente sencilla, el valor del *score* de eficiencia en (2), E^*_0, de la DMU$_0$.

Si denotamos por (E^*_0, v^*_0, u^*_0) a una de las soluciones óptimas de (3), entonces podremos identificar si la DMU evaluada es eficiente o no, haciendo uso de la siguiente definición:

Definición 2.1. *La DMU$_0$ es eficiente si $E^*_0 = 1$ y existe al menos una solución óptima (v^*_0, u^*_0), con $v^*_0 > 0$ y $u^*_0 > 0$. En cualquier otro caso, diremos que la DMU$_0$ es ineficente.*

Por otro lado, el problema dual asociado a (3) da lugar a la formulación del modelo DEA CCR en su versión envolvente:

$$\begin{array}{lll} \text{mín} & \theta_0 & \\ \text{s.a} & & \\ & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \lambda_{j0} \leq x_{i0}\theta_0 & \forall i \\ & \sum_{j=1}^{n} y_{rj} \lambda_{j0} \geq y_{r0} & \forall r \\ & \lambda_{j0} \geq 0 & \forall j \end{array} \tag{4}$$

Obviamente, tenemos que $E^*_0 = \theta^*_0$.

De este problema surge la interpretación del *score* de eficiencia DEA, como la máxima reducción equiproporcional de todos los inputs de la DMU$_0$ que es factible conseguir a la vista de los datos observados. Además, los términos $x^*_{i0} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda^*_{j0}$ para los inputs y $y^*_{r0} = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda^*_{j0}$ para los outputs permiten determinar unos "niveles objetivo", llamados *targets*, situados sobre la frontera y que la DMU$_0$ debería imitar para convertirse en eficiente.

En consecuencia, DEA es capaz de proporcionar al gestor de la DMU$_0$ su nivel de eficiencia relativo al conjunto muestral de DMU homogéneas observado, E^*_0, y unas guías de cómo lograr ser eficiente a través de los *targets* en inputs y outputs.

Por supuesto que de la misma manera que se ha definido un modelo DEA CCR de "orientación input", es decir, centrado en la reducción equiproporcional o "radial" de los inputs, puede definirse, análogamente, un modelo DEA CCR de "orientación output". Con las posteriores repercusiones sobre eficiencia y *targets* que ello conlleva.

El artículo seminal de Charnes, Cooper y Rhodes dio pie al desarrollo de posteriores modificaciones y mejoras del modelo CCR. Una famosa versión del modelo inicial es la conocida como modelo DEA BCC (de nuevo dicho apelativo proviene del uso de las iniciales de sus autores: Banker, Charnes y Cooper [ver [4]]). En dicho artículo, se propone un enfoque alternativo de tipo axiomático para la evaluación de la eficiencia que permite además trabajar bajo la hipótesis de que las DMU observadas operan a escala variable. Aunque el grado de eficiencia de cada DMU se continuaría determinando a través de proyecciones equiproporcionales (radiales).

Hemos visto hasta el momento que los modelos DEA CCR y BCC proporcionan medidas de eficiencia técnica en un sentido radial, y que sesgan el estudio exclusivamente a la medición de ineficiencia con respecto al lado de los inputs o al lado de los outputs. Ahora nos centraremos, sin embargo, en un nuevo modelo: el modelo aditivo, cuyos resultados responden al concepto económico de optimalidad de Pareto tal y como ya había sido interpretado anteriormente por Koopmans. Dicho modelo, introducido en 1985 por Charnes, Cooper, Golany, Seiford y Stutz (ver [7]), incorpora en la medida de eficiencia ineficiencias de todo tipo; es decir, radiales y no radiales, tanto de origen input como output. La formulación en su versión de envoltura y con retorno de escala constante es la siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{máx} & A_0 = \sum_{i=1}^{m} s_{i0}^- + \sum_{r=1}^{s} s_{r0}^+ \\
\text{s.a} & \\
& \begin{array}{rcll}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_{j0} & = & x_{i0} - s_{i0}^- & \forall i \\
\sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_{j0} & = & y_{r0} + s_{r0}^+ & \forall r \\
s_{i0}^- \geq 0 & & & \forall i \\
s_{r0}^+ \geq 0 & & & \forall r
\end{array}
\end{array}
\tag{5}
$$

Al resolver (5) se maximiza la distancia L_1 desde la DMU_0 hasta la frontera eficiente en la dirección noroeste. Concretamente, para una DMU_0 se selecciona el punto sobre la frontera eficiente que maximiza la distancia L_1 de entre todos aquellos que dominan, en el sentido de Pareto, a dicha DMU. La DMU_0 se considerará, entonces, eficiente si y sólo si el valor óptimo de (5), A_0^*, es 0. Por tanto, dicha unidad será ineficiente si no se encuentra localizada sobre la frontera eficiente; esto es, si alguna componente s_{i0}^{-*} o s_{r0}^{+*} es no nula, lo que, por otro lado, nos indica las fuentes y la magnitud de la ineficiencia en los correspondientes inputs y outputs. Además, pueden obtenerse *targets* para la DMU_0 a través de $x_{i0}^* = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_{j0}^*$ para cada uno de los inputs y $y_{r0}^* = \sum_{j=1}^{n} y_{rj}\lambda_{j0}^*$ para cada uno los outputs.

Es obvio que los valores de la función objetivo del modelo aditivo, A_0, dependen de las unidades de medida de las variables (inputs/outputs). Por esta razón, sus mismos autores propusieron la siguiente normalización de A_0:

$$
A_0^N = \sum_{i=1}^{m} \frac{s_{i0}^-}{x_{i0}} + \sum_{r=1}^{s} \frac{s_{r0}^+}{y_{r0}}, \tag{6}
$$

dando lugar a una nueva variante conocida como el modelo aditivo extendido.

2. Presente y futuro del DEA

En la anterior sección mostramos algunos de los modelos básicos en DEA a partir de los cuales se han desarrollado otros mucho más complejos, respondiendo a la dificultad de la naturaleza de las situaciones de producción abordadas.

En esta sección, expondremos algunas de las vías abiertas de investigación más notables y prolíficas, siempre considerando el carácter más teórico del DEA. Las líneas de investigación que destacar serían las siguientes:

- Uno de los aspectos relacionados con la medición de la eficiencia que ha despertado un gran interés recientemente ha sido el desarrollo de las medidas de eficiencia generalizadas. El objetivo inicial de dichas medidas es el diseño de indicadores que tengan en cuenta todo tipo de ineficiencias (tanto radial como no radial) a la hora de evaluar a una DMU. Además, se intenta que estas medidas satisfagan ciertas propiedades deseables. Concretamente, algunas de las medidas que más repercusión han producido en los círculos económicos son: la medida de *Russell* (tanto orientada como no orientada) y la medida *Enhanced Russell Graph* (ver, por ejemplo, [12]).

- Los modelos DEA clásicos suelen producir los niveles de *targets* más alejados de la DMU evaluada. Véase, por ejemplo, el caso del modelo aditivo donde la expresión de la distancia L_1 es maximizada en lugar de minimizada. Este hecho ha motivado la aparición de diversos artículos orientados a la determinación de los *targets* "más cercanos" a la unidad que está siendo evaluada (ver, por ejemplo, [3] y [13]).

- Otro problema que ha suscitado un gran interés, sin lugar a dudas, ha sido el tema de la determinación de una clasificación de las DMU. Con este objetivo se ha desarrollado el concepto de "supereficiencia" (ver [2]), que permite discriminar entre DMU eficientes, y el concepto de *common set of weights* (ver [14] y [15]), mediante el cual se restringe la libertad de los pesos DEA obligando a que el ratio de eficiencia de toda DMU (expresión (1)) se mida a través de los mismos pesos.

- Podemos encontrarnos con situaciones donde se dispone de información adicional o donde cierto grupo de especialistas son capaces de realizar suposiciones cualificadas que conducen a la imposición de restricciones sobre los pesos, además de las de no negatividad usualmente utilizadas. Dos modelos, y diversas variantes posteriores de estos, han sido ampliamente desarrollados en la literatura con el fin de que el manejo de esta información adicional sea lo más simple posible: *Cone-ratio* y *Assurance Region* (ver, por ejemplo, [8] y [18]).

- Desde hace bastante tiempo, prácticamente desde la misma concepción del DEA, se ha pretendido dotar a esta herramienta de cierto carácter estadístico-econométrico. En este sentido, cabe destacar los esfuerzos realizados en los últimos tiempos ligando la determinación de intervalos de confianza sobre los *scores* de eficiencia a la metodología *bootstrap* (ver [17]).

Referencias

[1] Aigner, D.J. and Chu, S.F. (1968). On Estimating the Industry Production Function. *Amer. Econ. Rev.*, **58**, 826-839.

[2] Andersen P. and Petersen N.C. (1993). A Procedure for Ranking Efficient Units in Data Envelopment Analysis. *Manage. Sci.*, **39**, 1261-1264.

[3] Aparicio J., Ruiz J.L. and Sirvent I. (2006). Closest Targets and Minimum Distance to the Pareto-Efficient Frontier in DEA. *J. Productiv. Anal.*, (Forthcoming).

[4] Banker, R.D., Charnes A. and Cooper W.W. (1984). Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis. *Manage. Sci.*, **30**, 1078-1092.

[5] Charnes A. and Cooper W.W. (1962). Programming with Linear Fractional Functionals. *Naval Res. Logist. Quart.*, **9**, 181-186.

[6] Charnes A., Cooper W.W. and Rhodes E. (1978). Measuring the Efficiency of Decision Making Units. *Europ. J. Operational Res.*, **2**, 429-444.

[7] Charnes A., Cooper W.W., Golany B., Seiford L. and Stutz J. (1985). Foundations of Data Envelopment Analysis for Pareto-Koopmans Efficient Empirical Production Functions. *J. Econometrics*, **30**, 91-107.

[8] Charnes A., Cooper W.W., Golany B., Huang Z.M. and Sun D.B. (1990). Polyhedral Cone-ratio DEA models with an Illustrative Application to Large Commercial Banks. *J. Econometrics*, **46**, 73–91.

[9] Debreu, G. (1951). The Coefficient of Resource Utilisation. *Econometrica*, **19**, 273-292.

[10] Farrell, M.J. (1957). The Measurement of Productive Efficiency. *J. Roy. Statistical Society*, **Series A, CXX, Part 3**, 253-290.

[11] Koopmans, T.C. (1951). *An Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities*, Ed. Wiley, New York.

[12] Pastor J.T., Ruiz J.L. and Sirvent I. (1999). An Enhanced DEA Russell Graph Efficiency Measure. *Europ. J. Operational Res.*, **115**, 596-607.

[13] Portela M.C.S., Borges P.C and Thanassoulis E. (2003). Finding Closest Targets in Non-Oriented DEA Models: The Case of Convex and Non-Convex Technologies. *J. Productiv. Anal.*, **19**, 251-269.

[14] Roll Y., Cook W.D. and Golany B. (1991). Controlling Factor Weights in Data Envelopment Analysis. *IIE Transactions*, **23**, 2-9.

[15] Roll Y. and Golany B. (1993). Alternate Methods of Treating Factor Weights in DEA. *Omega*, **21**, 99-109.

[16] Seiford, L.M. (1996). Data Envelopment Analysis: The Evolution of the State of the Art (1978-1995). *J. Productiv. Anal.*, **7**, 99-138.

[17] Simar L. and Wilson P.W. (1998). Sensitivity Analysis of Efficiency Scores: How to Bootstrap in Nonparametric Frontier Models. *Manage. Sci.*, **44**, 49-61.

[18] Thompson R.G., Langemeier L.N., Lee C.T., Lee E. and Thrall R.M. (1990). The Role of Multiplier Bounds in Efficiency Analysis with Application to Kansas Farming. *J. Econometrics*, **46**, 93–108.